JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Démonstration géométrique de quelques théorèmes relatifs à la théorie des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 73-79.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__73_0>

Démonstration géométrique de quelques théorèmes relatifs à la théorie des surfaces;

Par M. J. BERTRAND.

I.

Théorème I. *Si l'un des rayons de courbure d'une surface est constant, cette surface appartient à la famille des surfaces canaux, c'est-à-dire qu'elle peut être considérée comme l'enveloppe des positions d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une certaine courbe.*

Ce théorème a été établi par Monge dans son *Traité d'Analyse appliquée à la Géométrie;* M. Rodrigues en a donné depuis, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* une démonstration plus simple, mais qui, comme celle de Monge, est purement analytique. Les considérations suivantes conduisent très-simplement au même résultat.

Considérons une des lignes de courbure le long desquelles le rayon de courbure soit constant. Les normales menées à la surface par les différents points de cette ligne enveloppent, comme on sait, une ligne à double courbure à laquelle elles doivent être toutes tangentes et qui est le lieu des extrémités des rayons de courbure. Mais ici les rayons de courbure étant tous égaux, le lieu de leurs extrémités est une courbe située sur une surface *parallèle* à la surface proposée; cette courbe doit, par conséquent, être coupée à angle droit par les normales de celle-ci sur lesquelles se trouvent ses différents points. Ces normales devant lui être tangentes et la couper à angle droit, cette courbe ne peut exister et doit se réduire à un point. Ainsi donc toutes les normales à la surface menées par les points d'une même ligne de courbure doivent concourir en un même point. Si, de ce point comme centre, avec un rayon égal au rayon de courbure donné, on décrit une sphère, cette sphère sera évidemment inscrite dans la surface, et la touchera tout le long de la ligne de courbure; une seconde ligne de courbure pourra être considérée comme la courbe de contact d'une seconde sphère inscrite de même rayon, et, par suite, la surface proposée est l'enveloppe d'une série de sphères de même rayon. Si l'on considère deux sphères infiniment voisines, elles se coupent évidemment suivant un grand cercle; ce grand cercle doit être, d'après la théorie connue des enveloppes, leur ligne de contact avec la surface, et, par suite, d'après ce qui a été dit plus haut, l'une des lignes de courbure pour lesquelles le rayon est constant. Le centre de courbure commun aux différents points de ce cercle est évidemment placé en son centre.

II.

Corollaire. *Si les deux courbures d'une surface sont constantes, cette surface est une sphère.*

D'après les résultats que nous venons d'obtenir, les centres de première et de seconde courbure doivent former dans la surface proposée deux lignes en chaque point desquelles doivent se réunir un nombre infini de normales menées par les points d'une même ligne de courbure. Mais toutes ces normales doivent former un plan, car ce sont les rayons d'un même cercle; et comme elles doivent rencontrer le lieu des centres de la seconde courbure, ce lieu doit être situé dans tous les plans qui répondent aux diverses lignes de la première courbure: il ne peut donc être qu'une droite par laquelle passeront les différents plans; et, par suite, les normales de la surface proposée rencontrant une même droite, celle-ci est de révolution, or la sphère est évidemment la seule surface de révolution dont les deux courbures soient constantes.

La démonstration précédente serait en défaut si les deux courbures constantes étaient égales entre elles, car, dans ce cas, les courbes qui contiennent les centres de courbure se réduiraient à une seule; mais une pareille hypothèse est inadmissible, à moins que la courbe ne se réduise à un point. Et, en effet, dans le cas actuel, tous les points de la surface sont des ombilics, et, par suite, une courbe quelconque peut être considérée comme ligne de courbure. Si donc les normales menées à la surface par les différents points de cette courbe ne concouraient pas en un même point, elles devraient être tangentes à la ligne qui contient les centres de courbure, et, par conséquent, toutes les normales de la surface seraient tangentes à une même courbe; ce qui évidemment est impossible, car il faudrait pour cela que tous les points de cette surface fussent en même temps situés sur la surface développable dont la courbe en question serait l'arête de rebroussement.

III.

THÉORÈME II. *Une surface dont tous les points sont des ombilics est une sphère.*

Ce théorème, dû à Meunier, a été démontré depuis par Monge et par Poisson. Ces géomètres l'établissent en intégrant les équations différentielles qui expriment la condition énoncée; on peut, comme on va le voir, y parvenir par des considérations purement géométriques.

Si tous les points d'une surface sont des ombilics, les deux nappes de la surface lieu des centres de courbure se confondent. Si l'on considère sur cette surface une ligne quelconque, cette ligne sera le lieu des centres de courbure relatifs à une certaine ligne tracée sur la surface proposée, et les normales menées par les points de cette dernière ligne seront tangentes à la première. On en conclut que si M est un point de la surface lieu des centres de courbure, A le point correspondant de la surface proposée, AM doit être tangente à toutes les courbes menées par le point M sur la première surface. Le lieu des points M a donc pour chaque point une tangente, et non pas un plan tangent; c'est donc une courbe, et non une surface. Nous sommes donc conduits à conclure, comme dans le cas précédent, que les normales à la surface proposée doivent être tangentes à une même courbe; ce qui est impossible, à moins que cette courbe ne se réduise à un point, ce qui n'aura lieu que si la surface est une sphère.

IV.

Théorème III. *Si l'une des séries de lignes de courbure d'une surface est formée de courbes planes situées dans des plans parallèles, les lignes de l'autre série seront également planes. Les lignes de courbure parallèles projetées sur le plan de l'une d'elles donneront des courbes ayant même développée, et la surface pourra être engendrée par une courbe de figure invariable dont le plan tournera autour de la surface d'un cylindre auquel il restera constamment tangent.*

Ce théorème a été démontré par Monge, puis par M. Olinde Rodrigues par la considération d'équations aux différences partielles. La démonstration suivante me paraît plus propre à entrer dans l'enseignement.

D'après un théorème de M. Joachimstall, démontré géométriquement par M. Liouville dans le tome XI de ce Journal, les lignes de l'une des courbures étant planes, leurs plans coupent la surface sous un angle constant, tout le long d'une même ligne. Il en résulte que deux quelconques de ces plans intercepteront sur les lignes de courbure de l'autre système des arcs de longueurs égales. Cette égalité est évidente, en effet, quand les plans considérés sont infiniment rapprochés, et elle a, par conséquent, lieu pour les sommes d'un nombre quelconque d'éléments correspondants, et, par suite, pour deux arcs finis quelconques.

Si maintenant on projette la surface sur un plan parallèle à ceux des lignes de courbure du premier système, les deux séries de lignes de courbure seront représentées en projection par des courbes orthogonales, puisque l'une d'elles a toujours sa tangente parallèle au plan de projection; de plus, les lignes du premier système conserveront la propriété d'intercepter sur les projections de deux lignes quelconques du second système des arcs de même longueur. Et, en effet, les éléments égaux de ces lignes sur la surface ont évidemment la même inclinaison sur le plan de projection, et, par suite, leurs projections doivent être égales. Or on sait que si, sur un plan, deux séries de courbes se coupent à angle droit, de manière à décomposer le plan en rectangles infiniment petits, la différence entre deux côtés opposés d'un de ces rectangles est proportionnelle à la courbure des lignes auxquelles ces côtés appartiennent, et ne peut s'annuler que quand cette courbure est elle-même égale à zéro. Les lignes de la seconde courbure se projettent donc suivant des lignes droites; elles sont, par conséquent, planes. On voit aussi que les projections des lignes de courbure du premier système ont toutes mêmes normales, et, par suite, mêmes développées. On peut ajouter que les lignes de courbure du second système sont nécessairement superposables; car si l'on considère deux de ces courbes partant de deux points A et A′ d'une même ligne de courbure du premier système, en rapportant chacune d'elles à des axes rectangulaires situés dans son plan et dirigés suivant la droite d'intersection des plans des deux lignes de courbure et suivant une perpendiculaire à cette droite; nommant y les ordonnées parallèles à ce dernier axe, $\frac{dy}{dx}$ sera exprimé, dans les deux courbes, par une même fonction de y, en sorte que les deux lignes ont même équation différentielle; et comme pour $y = 0$, on a dans l'une et dans l'autre $x = 0$, et la même valeur pour $\frac{dy}{dx}$, les deux courbes ne peuvent manquer d'être superposables.

Cette dernière propriété montre que la surface peut être engendrée par le mouvement d'une ligne de figure invariable dont le plan reste constamment perpendiculaire à un plan fixe, et, par suite, tangent à un même cylindre.

V.

Théorème IV. *Si une surface fermée est telle, que des plans parallèles y déterminent constamment des sections semblables, cette surface est un ellipsoïde.*

On sait, en effet, qu'un plan parallèle à un plan tangent mené à une distance infiniment petite du point de contact donne toujours pour section une courbe infiniment petite dont la *forme* diffère infiniment peu de celle d'une ellipse; si donc toutes les sections faites par des plans parallèles sont rigoureusement semblables entre elles, il faut qu'elles soient toutes des ellipses.

Reste donc à démontrer qu'une surface dont toutes les sections planes sont des ellipses est nécessairement un ellipsoïde. Cette proposition a été admise par plusieurs auteurs, mais on n'en a pas, à ma connaissance, publié de démonstration [*].

Nous commencerons par remarquer que, dans une surface dont toutes les sections sont des ellipses, le lieu des milieux d'un systeme quelconque de lignes parallèles est un plan. Et, en effet, tout plan parallèle aux cordes doit évidemment couper ce lieu suivant une ligne droite. Or, par deux points quelconques A et B appartenant à ce lieu, on peut toujours faire passer un pareil plan qui le coupera, par conséquent, suivant la droite AB; cette droite, qui réunit deux points quelconques du lieu, y est, par conséquent, située tout entière, ce qui est la propriété caractéristique du plan.

Considérons un de ces plans diamétraux qui coupent la surface suivant une ellipse ayant son centre en un point O. Menons par ce point une parallèle OC aux cordes que le plan coupe en deux parties égales, et considérons dans la surface une série de sections planes parallèles à un plan quelconque conduit suivant OC. Ces diverses sections seront, par hypothèse, des ellipses, et dans chacune de ces ellipses le diamètre des cordes parallèles à OC sera la droite d'intersection du plan de cet ellipse par le plan diamétral qui correspond à cette direction; ces divers diamètres sont donc tous parallèles entre eux. Il est évident, de plus, que leurs milieux sont en ligne droite, car ce sont des cordes parallèles d'une même ellipse; enfin leurs conjugués, étant des droites parallèles à OC, forment évidemment un plan, et, par suite, leurs extrémités sont sur une ellipse résultant de l'intersection de ce plan par la surface proposée et ayant un diamètre commun avec celle qui résulte de l'intersection du plan diamétral. D'après cela, la surface peut être considérée comme engendrée par une ellipse de grandeur variable qui se meut de manière à ce que son plan restant parallèle à un plan fixe, les deux extrémités de deux diamètres conjugués soient toujours situées sur deux ellipses ayant un diametre commun; or rien n'est plus facile que de former l'équation d'une pareille surface, et l'on reconnaîtra sans peine un ellipsoïde.

---

[*] M. P.-H. Blanchet m'a parlé, depuis la rédaction de cette Note, d'un ouvrage qu'il compte prochainement publier et dans lequel cette proposition se trouve démontrée.

VI.

Je terminerai cette Note en indiquant un rapprochement entre deux propriétés importantes des surfaces que l'on démontre indépendamment l'une de l'autre.

Sur une surface quelconque, les lignes géodésiques ont en chaque point leur plan osculateur normal à la surface. Cette proposition me paraît une conséquence immédiate du théorème de Meunier, d'après lequel le rayon de courbure d'une ligne tracée sur une surface est égal à celui de la section normale menée suivant la tangente, multiplié par le cosinus de l'angle que cette section forme avec le plan osculateur de la courbe proposée. Il est évident, en effet, qu'un arc infiniment petit dont la corde est donnée diffère d'autant plus de cette corde que sa courbure est plus grande. Si donc on donne sur une surface deux points infiniment voisins A et B, l'arc le plus court qui puisse réunir ces deux points sera celui qui aura le plus grand rayon de courbure; et comme tous ces arcs peuvent être considérés comme ayant même tangente, le théorème de Meunier nous apprend que le plus grand rayon de courbure appartiendra à celui dont le plan osculateur sera normal à la surface. La ligne la plus courte doit donc, en chacun de ses points, jouir de cette propriété.