JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Sur la réduction des formes quadratiques au plus petit nombre de termes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 412-414.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__412_0>

SUR LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES AU PLUS PETIT NOMBRE DE TERMES;

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin*, 9 novembre 1848.

Il y a une infinité de manières de transformer les formes quadratiques à n variables par des substitutions linéaires au déterminant 1 en d'autres équivalentes. On peut se servir des coefficients de la substitution pour réduire la forme. En général, dans la réduction des fonctions, on se propose de réduire au plus petit nombre les arguments dont la fonction dépend. Mais pour les formes quadratiques, le problème est autre: on s'est proposé de renfermer dans des limites les coefficients de la forme, de sorte que, parmi toutes les formes équivalentes, il n'y en ait qu'une seule *réduite*. Mais, même pour les formes quadratiques, le premier point de vue n'est pas sans importance, c'est-à-dire la question de déterminer le plus petit nombre des termes auxquels une forme quadratique à n variables soit réductible.

Pour les formes binaires, il est évident qu'il n'y a pas de telles réductions, ou, ce qui revient au même, on ne peut faire disparaître un des trois termes de la forme. Quant aux formes quadratiques à plus de deux variables, elles sont toujours réductibles à un moindre nombre des termes. Le nombre des termes croît avec le nombre des variables, mais pour les formes quadratiques complètes comme les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10,..., et pour les formes réduites au plus petit nombre de termes, comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7,...; de sorte que, pour 3, 4, 5,... variables, on peut faire disparaître 1, 3, 5.... coefficients. On peut remplacer une forme quadratique à n

variables par une autre équivalente qui ne contient, outre les carrés des variables, que les produits de chaque variable par la variable immédiatement suivante. Donc, sans perdre de généralité, on pourra prendre pour une forme quadratique quelconque à n variables une expression telle que celle-ci :

$$a\omega^2 + 2a_1\omega\omega_1 + a_2\omega_1^2 + 2a_3\omega_1\omega_2 + a_4\omega_2^2 + 2a_5\omega_2\omega_3 + a_6\omega_3^2 + \ldots$$
$$+ 2a_{2n-1}\omega_{n-1}\omega_n + a_{2n}\omega_n^2.$$

Le moyen d'effectuer une telle réduction consiste en ce qu'on substitue à une expression linéaire donnée

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i x_i,$$

un seul terme $f.u$, f étant le diviseur commun de α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_i$.

J'appellerai *systèmes équivalents* deux systèmes de quantités qui dépendent l'un de l'autre, de manière qu'en mettant des nombres entiers pour les quantités de l'un des systèmes, les quantités de l'autre deviennent également des nombres entiers. Pour que deux systèmes soient équivalents, il faut que les quantités de l'un soient des fonctions linéaires de l'autre, et que les coefficients de ces fonctions soient des nombres entiers au déterminant 1. Étant donnée une expression linéaire de i variables x_1, $x_2, \ldots, x_i$,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i x_i,$$

dont les coefficients α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_i$ soient des nombres entiers, on pourra remplacer les quantités x_1, $x_2, \ldots, x_i$ par un système de quantités équivalentes, telles que, u en étant une, et f étant le plus grand diviseur commun de α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_i$, on ait l'équation

$$f.u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i x_i$$

J'expliquerai dans une autre occasion la méthode pour trouver les substitutions les plus simples et aux plus petits coefficients.

Soit V une forme quadratique à n variables x_1, $x_2, \ldots x_n$, où l'ensemble des termes affectés de x_n soit

$$x_n(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}) + a_n x_n^2.$$

Substituons aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ un système équivalent x'_1, $x'_2, \ldots, x'_{n-1}$, de sorte qu'on ait

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} = f_1 x'_{n-1},$$

f_1 étant le plus grand diviseur commun de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$; alors il viendra

$$V = a_n x^2 + f_1 x_n x'_{n-1} + V_1.$$

V_1 étant une forme quadratique des variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$. Soient, dans V_1, les termes multipliés par x'_{n-1},

$$x'_{n-1}(a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + \ldots + a'_{n-2} x'_{n-2}) + a'_{n-1} x'^2_{n-1}.$$

En introduisant pour $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-2}$ un système équivalent x''_1, $x''_2, \ldots, x''_{n-2}$, tel que

$$a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + \ldots + a'_{n-2} x'_{n-2} = f_2 x''_{n-2},$$

f_2 étant le plus grand diviseur commun de $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-2}$, on obtiendra

$$V = a_n x_n^2 + f_1 x_n x'_{n-1} + a'_{n-1} x'^2_{n-1} + f_2 x'_{n-1} x''_{n-2} + V_2,$$

V_2 étant une forme quadratique des $(n-2)$ quantités $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n-2}$.

En continuant, on parviendra à la transformation

$$\begin{aligned} V_n = {} & a_n x_n^2 + a'_{n-1} x'^2_{n-1} + a''_{n-2} x''^2_{n-2} + \ldots + a_1^{(n-1)} x_1^{(n-1)2} \\ & + f_1 x_n x'_{n-1} + f_2 x'_{n-1} x''_{n-2} + f_3 x''_{n-2} x'''_{n-3} + \ldots + f_{n-1} x_2^{(n-2)} x_1^{(n-1)}, \end{aligned}$$

ce qui est une expression réduite du genre mentionné plus haut.

J'ajoute encore la remarque que, les coefficients des produits des variables dans la forme primitive étant des nombres pairs, il en sera de même des nombres $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$.