JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note de M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 34-37.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__34_0>

Note de M. Liouville.

La méthode que j'ai employée dans mon premier Mémoire sur le mouvement d'un point matériel, et que M. Serret a suivie dans cette Thèse pour résoudre le problème de la détermination du mouvement d'un point sollicité par deux centres fixes F, F', ou plutôt par trois centres fixes F, O, F', équidistants et en ligne droite, avec les lois d'attraction respectives r^{-2}, r, r^{-2}, s'applique non moins facilement au cas où, ces lois restant les mêmes, le centre O demeure seul immobile, tandis que les deux autres F, F' tournent à l'entour, sur une circonférence de cercle, de manière à se trouver constamment aux deux extrémités du diamètre qui a, dans le plan du cercle, même longitude que le point matériel soumis à l'action des trois centres, c'est-à-dire aux deux extrémités du diamètre déterminé par la droite OP qui joint le centre O à la projection P (sur le plan du cercle) du point matériel proposé M. Ce cas nouveau et remarquable de l'intégration des équations du mouvement a été déjà traité par une autre méthode dans mon second Mémoire; mais j'ai promis d'y revenir et d'y appliquer la méthode plus élémentaire du premier Mémoire. En remplissant ici ma promesse, je profiterai, pour abréger, des secours que m'offre la Thèse de M. Serret. Les six premiers paragraphes de cette Thèse contiennent, en effet, des résultats généraux que je puis prendre pour point de départ. Ces résultats admis, ainsi que les notations des paragraphes cités, je continue comme on va le voir.

Considérons trois axes de coordonnées rectangulaires dont l'un, celui des z, soit la droite fixe autour de laquelle tourne le plan déterminé par l'angle γ; supposons d'ailleurs que γ soit l'angle du plan mobile avec le plan des xz. Enfin, prenons pour μ et ν les paramètres de deux systèmes d'ellipses et d'hyperboles homofocales situées dans le plan mobile, et résultant de l'intersection, par ce plan, des surfaces (de révolution autour de l'axe des z) représentées par les équations

$$\frac{x^2+y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\mu^2-b^2}=1,$$

$$\frac{x^2+y^2}{\nu^2}-\frac{z^2}{b^2-\nu^2}=1,$$

où b est une constante. En joignant à ces équations celle du plan mobile, qui est

$$y = x \operatorname{tang} \gamma,$$

on trouvera aisément

$$x=\frac{\mu\nu}{b}\cos\gamma,\quad y=\frac{\mu\nu}{b}\sin\gamma,\quad z=\frac{1}{b}\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}.$$

Il faudra, bien entendu, donner aux seconds membres des signes convenables, ou, si l'on veut, on fera $\nu = b\cos\theta$, et l'on prendra sans ambiguïté

$$x=\mu\cos\theta\cos\gamma,\quad y=\nu\cos\theta\sin\gamma,\quad z=\sqrt{\mu^2-b^2}\sin\theta$$

Mais nous aimons mieux conserver la variable ν.

Des valeurs de x, y, z, on déduit, pour $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ou ds^2, l'expression suivante :

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right) + \frac{\mu^2\nu^2}{b^2}\,d\gamma^2.$$

On aura, par conséquent, ici

$$m = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad n = \frac{1}{b^2 - \nu^2}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2, \quad \lambda'' = \frac{\mu^2\nu^2}{b^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{b^2}{\nu^2} - \frac{b^2}{\mu^2};$$

en sorte que les quantités λ et λ'' ont bien la forme exigée au § VI. On pourra donc, avec les coordonnées que nous employons, intégrer les équations du mouvement d'un point, toutes les fois que la fonction des forces sera de la forme

$$U = \frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Il suffira, en effet, de poser dans les formules (14),

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \quad \Phi(\nu) = \nu^2, \quad \varpi(\mu) = -\frac{b^2}{\mu^2}, \quad \Pi(\nu) = -\frac{b^2}{\nu^2}.$$

Si donc on prend en particulier

$$\begin{aligned} \psi(\mu) &= g\mu + g'\mu + k\mu^4 - kb^2\mu^2, \\ \Psi(\nu) &= g\nu - g'\nu + k\nu^4 - kb^2\nu^2, \end{aligned}$$

la fonction des forces qui résultera de cette hypothèse, savoir,

$$U = \frac{g}{\mu + \nu} + \frac{g'}{\mu - \nu} + k(\mu^2 + \nu^2 - b^2),$$

satisfera à toutes les conditions que notre méthode d'intégration exige. Mais la valeur de U que je viens d'écrire est précisément celle qui convient au cas de nos trois centres F, O, F' (dont le second seul est immobile), en plaçant le centre O à l'origine fixe des coordonnées x, y, z, et les centres F, F' aux foyers communs des ellipses et des hyperboles (μ), (ν) situées dans le plan mobile et entraînées, pour ainsi dire, par le point matériel dans son mouvement. Ces foyers sont, à chaque instant, dans le plan des xy, sur la trace du plan mobile et à une distance constante b de l'origine. Il est donc bien clair que ces foyers et l'origine donnent trois points qui peuvent en effet être pris pour nos trois centres d'action. Or, en désignant par r, r', R les distances de ces points F, F', O au point mobile, il vient sans difficulté

$$r = \mu + \nu, \quad r' = \mu - \nu, \quad R^2 = \mu^2 + \nu^2 - b^2.$$

La formule

$$U = \frac{g}{\mu + \nu} + \frac{g'}{\mu - \nu} + k(\mu^2 + \nu^2 - b^2)$$

peut dès lors s'écrire

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2,$$

et l'on reconnaîtra sans peine que telle est réellement l'expression de la fonction des forces propre à une combinaison d'actions émanant des centres F, F', O, en raison inverse du carré de la distance pour les deux premiers, et en raison directe de la distance pour le troisième. Il est assez curieux de voir cette expression de la fonction des forces, et par suite l'intégrale des forces vives, se conserver ainsi, dans une question où figurent des centres mobiles, telles qu'elles seraient s'il ne s'agissait que de centres fixes. Cela tient à ce que les déplacements des points F et F' s'effectuent dans des directions toujours perpendiculaires aux droites r, r' correspondantes, en sorte que les variations de ces droites à chaque instant sont les mêmes que si F et F' restaient immobiles. Nous ne croyons pas, au reste, devoir pousser plus loin les détails de la solution du problème que nous nous étions proposé : ce qui précède paraîtra sans doute suffisant.