

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

**Démonstration d'un théorème de M. Boole concernant
des intégrales multiples**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 13 (1848), p. 245-248.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13_245_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DÉMONSTRATION

D'un théorème de M. Boole concernant des intégrales multiples;

PAR M. A. CAYLEY.

THÉORÈME. « Soient P, Q des fonctions de n variables $x, y, \dots$;
» lesquelles fonctions satisfassent à la condition

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots dx dy \dots e^{-(Pv + Qw)i} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n} e^{-\frac{n\pi i}{4}} e^{-G(v, w)i}}{\sqrt{H(v, w)}},$$

» où, comme à l'ordinaire, $i = \sqrt{-1}$; $G(v, w)$, $H(v, w)$ sont des
» fonctions homogènes de v, w des ordres 1 et n respectivement (on
» verra, dans la suite, qu'il y a plusieurs fonctions P, Q qui satisfont
» à une équation de cette forme).

» Cela étant, posons

$$(2) \quad V = \int \dots dx dy \dots \frac{f(P)}{Q^{\frac{1}{2}n + q}},$$

» les limites de l'intégration étant données par la condition $P = 1$;
» et soient

$$(3) \quad G\left(1, \frac{1}{s}\right) = \sigma, \quad H\left(1, \frac{1}{s}\right) = s^{-n} \varphi.$$

» On aura pour l'intégrale V cette formule,

$$(4) \quad V = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + q)} \int_0^{\infty} \frac{S s^{-q-1} ds}{\sqrt{\varphi}},$$

» dans laquelle

$$(5) \quad S = \frac{(1-\sigma)^{-q}}{\Gamma(-q)} \int_0^1 t^{-q-1} f[\sigma + t(1-\sigma)] dt. \quad »$$

Ce théorème remarquable est dû à M. Boole, qui me l'a communiqué sous une forme un peu différente [*] en me priant d'y suppléer la démonstration et d'en faire part aux géomètres; il ne m'a fallu, pour le prouver, que modifier un peu le procédé dont s'est servi M. Boole même, dans son Mémoire : « Researches in the integral calculus, » *Irish Transactions*, tome XXI.

Je vais donc reproduire cette démonstration en l'appliquant au problème dont il s'agit.

On démontre par une analyse semblable à peu près à celle par laquelle se démontre le théorème de Fourier, que l'expression

$$6) \frac{1}{\pi \Gamma(\frac{1}{2}n+q)} \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty dv \int_0^\infty dw e^{\left[(\alpha-P)v - Qw + (\frac{1}{2}n+q)\frac{\pi}{2}\right]i} \dots w^{\frac{1}{2}n+q-1} f\alpha$$

se réduit (en n'y faisant attention qu'à la partie réelle) à $\frac{fP}{Q^{\frac{1}{2}n+q}}$ ou à zéro, selon que la quantité P se trouve ou ne se trouve pas comprise entre les limites 0, 1. Donc, en substituant cette intégrale triple dans l'expression de V, on peut étendre depuis $-\infty$ jusqu'à ∞ les intégrations par rapport aux variables $\alpha, \gamma, \dots$. De cette manière, et en réduisant par l'équation (1), on obtient tout de suite

$$(7) \quad V = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n-1} e^{\frac{1}{2}q\pi i}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+q)} \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty dv \int_0^\infty dw \frac{e^{[\alpha v - G(v, w)]i} \dots w^{\frac{1}{2}n+q-1}}{\sqrt{H(v, w)}} f\alpha.$$

Donc, en écrivant

$$w = \frac{v}{s}, \quad dw = -\frac{v ds}{s^2}$$

[ce qui donne, par les équations (3),

$$G(v, w) = v\sigma, \quad H(v, w) = v^n s^{-n} \varphi],$$

[*] M. Boole écrit

$$S = \left(-\frac{d}{d\sigma}\right)^q f\sigma,$$

expression à la vérité plus simple, mais qui donne lieu, ce me semble, à quelques difficultés.

les limites par rapport à la nouvelle variable s seront ∞ , 0, et l'on obtiendra, en changeant l'ordre des intégrations,

$$(8) \quad V = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+q)} \int_0^\infty ds \frac{S s^{-q-1}}{\sqrt{p}},$$

dans laquelle expression

$$(9) \quad S = \frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}q\pi i} \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty dv v^q e^{(\alpha-\sigma)vi} f\alpha;$$

et il ne s'agit plus que de faire voir l'identité de cette valeur avec celle qui est donnée par l'équation (5). Pour cela, je remarque que l'on aura

$$(10) \quad \begin{cases} \int_0^\infty dv v^q e^{(\alpha-\sigma)vi} = \Gamma(q+1) e^{\frac{1}{2}(q+1)\pi i} (\alpha-\sigma)^{-q-1} \\ \text{ou} \quad \Gamma(q+1) e^{-\frac{1}{2}(q+1)\pi i} (\sigma-\alpha)^{-q-1}, \end{cases}$$

selon que $(\alpha-\sigma)$ est positif ou négatif; les valeurs correspondantes de $\frac{1}{\pi} e^{\frac{1}{2}q\pi i} \int_0^\infty dv v^q e^{(\alpha-\sigma)vi}$ sont

$$(11) \quad \frac{1}{\pi} e^{(q+\frac{1}{2})\pi i} \Gamma(q+1) (\alpha-\sigma)^{-q-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi i} \Gamma(q+1) (\sigma-\alpha)^{-q-1};$$

or, en ne faisant attention qu'aux parties réelles, et en réduisant par une propriété connue des fonctions Γ , ces valeurs se réduisent à $\frac{1}{\Gamma(-q)} (\alpha-\sigma)^{-q-1}$ et zéro respectivement; d'après cela, l'équation (9) se réduit à

$$(12) \quad S = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_\sigma^1 (\alpha-\sigma)^{-q-1} f\alpha d\alpha,$$

et enfin, en écrivant

$$\alpha = \sigma + t(1-\sigma), \quad d\alpha = (1-\sigma) dt,$$

on obtient pour S la valeur donnée par l'équation (5), de manière que la formule dont il s'agit se trouve complètement démontrée.

Il paraît difficile de trouver les formes générales de P , Q rien n'étant, je crois, connu sur la solution des équations telles que l'équa-

tion (1)]; mais des formes particulières se présentent assez facilement. Ainsi, en ne considérant que les exemples que m'a donnés M. Boole (lesquels j'ai depuis vérifiés), soit

$$(13) \quad P = 2(lx + my + \dots), \quad Q = v^2 + x^2 + y^2 + \dots$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), les intégrations s'effectuent sans difficulté et sous la forme nécessaire, et l'on obtient

$$G(v, w) = wv^2 - \frac{(l^2 + m^2 + \dots)v^2}{w}, \quad H(v, w) = w^n,$$

ou enfin

$$(14) \quad \sigma = \frac{v^2}{s} - (l^2 + m^2 + \dots)s, \quad \varphi = 1.$$

Soit encore (ce qui comprend comme cas particulier le problème des attractions)

$$(15) \quad P = \frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} + \dots, \quad Q = v^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 + \dots;$$

on obtient sans plus de difficulté

$$(16) \quad \varphi = \frac{(s+f^2)(s+g^2)\dots}{f^2g^2}, \quad \sigma = \frac{v}{s} + \frac{a^2}{f^2+s} + \frac{b^2}{g^2+s} \dots$$

Soit encore, pour dernier exemple,

$$(17) \quad P = l^2 x^2 + \frac{L^2}{x^2} + \dots, \quad Q = v^2 + \lambda^2 x^2 + \frac{\Lambda^2}{x^2} + \dots;$$

on aura, pour ce cas-ci,

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi = (l^2 s + \lambda^2)(L^2 s + \Lambda^2) \dots, \\ \sigma = \frac{1}{s} [v^2 + 2\sqrt{(l^2 s + \lambda^2)(L^2 s + \Lambda^2)} + \dots]. \end{cases}$$

Les formules qui se rapportent à cet exemple aussi bien qu'au premier sont, je crois, entièrement nouvelles.