

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. JOUBERT

Démonstration d'un théorème de statique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 13 (1848), p. 241-244.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13_241_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE STATIQUE;

PAR M. C. JOUBERT,

Élève de l'École Normale.

Avant de donner l'énoncé de ce théorème, j'en rappellerai un autre qui m'y a conduit, et que voici :

« Quand on applique à tous les éléments d'une surface fermée quelconque des forces normales proportionnelles au produit $d\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$, $d\sigma$ désignant la surface de l'élément auquel la force est appliquée, R et r les rayons de courbure principaux de la surface, toutes ces forces se font équilibre. »

Pour le démontrer, souvenons-nous d'abord que des forces appliquées à tous les éléments d'une surface fermée quelconque, dirigées suivant la normale, et proportionnelles aux surfaces de ces éléments, se font équilibre.

Cela posé, considérons sur la surface proposée un élément $d\sigma$, auquel nous appliquons une force $Pd\sigma$, P désignant un facteur constant. Si, par les différents points de la surface, nous menons les normales, et si nous prolongeons chacune d'elles vers l'extérieur d'une même longueur ds , le lieu de ces extrémités sera une seconde surface ayant les mêmes normales que la proposée. A l'élément $d\sigma$ de la première surface correspondra sur la seconde un élément $d\sigma'$, déterminé par l'intersection avec cette dernière des différentes normales menées par les points de contour de l'élément $d\sigma$. Appliquons de même à l'élément $d\sigma'$ une force normale $Pd\sigma'$, mais contraire à la force $Pd\sigma$. Nous faisons la même chose pour tous les éléments des deux surfaces.

Toutes les forces appliquées à la première surface se feront équilibre, d'après le théorème cité en commençant : il en sera de même des forces appliquées à la seconde. Si nous composons ces forces entre

elles, leurs résultantes se feront encore équilibre. Or les deux forces $Pd\sigma'$ et $Pd\sigma$ donnent une résultante égale à leur différence $P(d\sigma' - d\sigma)$, que nous pouvons supposer appliquée à l'élément $d\sigma$ et dirigée suivant la normale. Nous faisons la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces; et les forces $P(d\sigma' - d\sigma)$, appliquées à la première, se feront équilibre.

Or il résulte d'une formule démontrée par M. Bertrand, dans un Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales, que la différence $d\sigma' - d\sigma$ des deux éléments correspondants peut se mettre sous la forme $d\sigma ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$. La démonstration de cette formule y est présentée à peu près dans les termes suivants :

Quelque petit que soit l'élément $d\sigma$, nous pouvons toujours le concevoir décomposé en une infinité de rectangles infiniment petits par rapport à lui-même. Supposons ces rectangles déterminés par les lignes de courbure; les deux surfaces ayant les mêmes normales, les lignes de courbure se correspondent, et à chaque rectangle ABCD, formé par quatre lignes de courbure sur la première surface, correspondra un rectangle A'B'C'D' sur la seconde. Posons

$$\begin{aligned} AB &= \alpha, & AC &= \beta, \\ A'B' &= \alpha + d\alpha, & A'C' &= \beta + d\beta. \end{aligned}$$

Les droites A'A, B'B sont normales à la première surface, et vont se rencontrer en un point O à une distance R du point A et $R + ds$ du point A'. Nous aurons donc, dans le triangle A'B'O,

$$\alpha + d\alpha : \alpha :: R + ds : R,$$

donc

$$d\alpha = \frac{\alpha ds}{R};$$

et, de même,

$$d\beta = \frac{\beta ds}{r},$$

et, par suite, le rectangle A'B'C'D' sera

$$(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta) = \alpha\beta \left(1 + \frac{ds}{R} + \frac{ds}{r} \right).$$

Ainsi donc, en passant de la première surface à la seconde, les rectangles augmentent proportionnellement à la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$: il en sera donc de même des éléments correspondants, et nous aurons

$$d\sigma' - d\sigma = d\sigma ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right).$$

En remplaçant $d\sigma' - d\sigma$ par cette valeur dans l'expression de la force appliquée à l'élément $d\sigma$, nous voyons que des forces $Pd\sigma ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$, appliquées à tous les éléments de la première surface, se font équilibre, et ces forces sont précisément proportionnelles au produit $d\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$; de sorte que le théorème énoncé se trouve démontré [*].

Le théorème, bien connu du reste, dont je viens d'indiquer une démonstration nouvelle, telle qu'elle a été donnée par M. Bertrand dans ses Conférences à l'École Normale, m'a conduit au suivant :

« Si l'on applique à tous les éléments d'une surface fermée des forces
» normales proportionnelles à l'expression $\frac{d\sigma}{Rr}$, $d\sigma$ désignant toujours
» la surface de l'élément, R et r les deux rayons de courbure de la
» surface, toutes ces forces se font équilibre. »

Considérons toujours les deux surfaces dont il a été question dans la démonstration du théorème précédent; appliquons à l'élément $d\sigma$ de la première surface une force normale représentée par

$$Pd\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right),$$

et à l'élément correspondant de la seconde, une force

$$Pd\sigma' \left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds} \right),$$

normale, mais contraire à la précédente. Faisons la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces.

[*] Une démonstration analogue prouverait que des forces appliquées à tous les éléments d'une courbe plane fermée, dirigées suivant la normale et proportionnelles à $\frac{ds}{p}$ (ds désignant l'élément de l'arc et p le rayon de courbure), se font équilibre.

D'après le théorème précédent, les forces appliquées à la première surface se font équilibre, et, en faisant attention que $R + ds$ et $r + ds$ sont les rayons principaux de la seconde surface, nous voyons qu'il en est de même des forces appliquées à cette dernière. Si nous composons ces forces entre elles, leurs résultantes se feront encore équilibre: or les deux forces $Pd\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$ et $Pd\sigma' \left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds} \right)$, composées entre elles, donnent une résultante égale à leur différence

$$Pd\sigma' \left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds} \right) - Pd\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right);$$

en remplaçant $d\sigma'$ par sa valeur

$$d\sigma + d\sigma ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right),$$

cette différence devient

$$Pd\sigma \left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds} - \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) + Pd\sigma ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds} \right).$$

Réduisant et négligeant les quantités infiniment petites du quatrième ordre, l'expression de cette force deviendra

$$2Pd\sigma ds \frac{1}{Rr}.$$

Cette force $2Pd\sigma ds \frac{1}{Rr}$ peut être considérée comme appliquée à l'élément $d\sigma$ de la première surface. Nous pouvons faire la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces. Ainsi donc les forces $2Pd\sigma ds \frac{1}{Rr}$, appliquées à tous les éléments de la première surface, se font équilibre, et ces forces sont proportionnelles à $\frac{d\sigma}{Rr}$: le théorème énoncé se trouve donc démontré.
