JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STEICHEN

Remarques diverses sur les positions et les figures d'équilibre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 221-230.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__221_0>

REMARQUES DIVERSES

SUR LES POSITIONS ET LES FIGURES D'ÉQUILIBRE;

PAR M. STEICHEN,

Professeur à l'École militaire de Bruxelles.

La Note de M. Lejeune-Dirichlet sur les positions d'équilibre *stable* et *instable*, insérée dans le tome XII de ce Journal (page 474), m'a donné l'idée de présenter quelques remarques que j'ai faites depuis longtemps sur le même sujet.

Le point de vue sous lequel on envisage habituellement la chose dans la mécanique rationnelle me semble trop restreint, puisque l'on n'y considère qu'un système de points matériels, soumis à des forces *attractives* ou *répulsives* qui ne dépendent que de la distance, etc.; et que, d'un autre côté, l'on ne voit pas même par là jusqu'à quel point la proposition que l'on veut démontrer est susceptible d'application aux machines et aux systèmes terrestres en général, même abstraction faite des résistances passives.

Pour mettre dans les idées cette clarté si nécessaire, alors surtout qu'il s'agit de propositions générales plus ou moins vagues, nous pensons qu'il est utile de distinguer *les positions d'équilibre* des systèmes rigides, et *les figures d'équilibre* des systèmes et machines qui sont sujets à varier de forme tant par l'effet des vitesses acquises que par l'action même des forces qui y sont appliquées. Dans ce même but, nous allons reprendre quelques définitions.

La *position d'équilibre* d'un corps rigide, soumis à des forces données, est cette position spéciale pour laquelle ces forces se font équilibre, et telle que si le corps est dérangé par une force ou impulsion étrangère qui cesse ensuite, l'équilibre ne subsiste généralement plus.

La *position d'équilibre stable* est celle à laquelle le corps tend à revenir sous l'action des forces appliquées, après qu'il en a été dérangé, n'importe de quelle manière.

La *position d'équilibre instable* est celle dont le solide, une fois dérangé quelque peu que ce soit, s'écarte de plus en plus par l'effet même des forces primitives.

La *position d'équilibre indifférente* est celle dont le corps, une fois dérangé par une cause étrangère, ne tend ni à se rapprocher ni à s'écarter par l'effet même des forces primitives.

On définirait de même les *figures* d'équilibre stable, instable, indifférente, dans les machines.

Habituellement on ne s'arrête pas à ces sortes de définitions, parce que l'on juge que la chose se définit suffisamment par les mots *stable* et *instable* qui l'expriment; mais on n'en admet pas moins d'une manière indirecte les idées que nous exprimons par une définition formelle de mots.

On ne pourra donc pas, croyons-nous, objecter que nous mettions dans nos définitions plus qu'il ne faut et qu'on ne le fait ordinairement; et la seule difficulté qui se présente consiste à ne pas pouvoir démontrer immédiatement ce que l'on définit. Mais à défaut de pouvoir surmonter cette difficulté, ou plutôt d'éviter cet inconvénient, nous devons ici nous contenter (ce qui arrive d'ailleurs dans d'autres cas) de raisonner dans la supposition que l'objet défini existe, sauf à justifier ensuite cette supposition par n'importe quelle espèce de démonstration.

Il y ici une différence essentielle à établir entre une machine et un système rigide: en effet, une machine n'est jamais susceptible que d'un mouvement ou que d'un dérangement unique dans un sens défini ou dans le sens diamétralement opposé, et c'est même là l'unique caractère commun à toutes les machines. Au contraire, un corps solide, même gêné par un ou plusieurs obstacles, est le plus souvent susceptible encore de plusieurs dérangements. Il faut donc au moins admettre comme une chose possible à priori, qu'un corps solide une fois dérangé de sa position d'équilibre, tende ou à reprendre cette position sous l'action des forces appliquées, ou à s'en écarter de plus en plus, selon le mode du dérangement produit.

Ainsi il se peut que pour de certains corps solides une même position d'équilibre jouisse successivement de la propriété d'être stable, instable, indifférente.

L'ellipsoïde pesant et homogène, ayant ses trois diamètres conjugués rectangles inégaux entre eux, nous offre un exemple remarquable de ce cas, s'il repose par l'extrémité de son diamètre moyen sur un plan horizontal parfaitement uni sur lequel il puisse, par conséquent, rouler sans frottement. En effet, s'il y a à partir d'une section principale des directions consécutives qui doivent faire considérer la position initiale comme stable, il y aura à partir de la section principale perpendiculaire une infinité de directions elliptiques consécutives qui doivent faire envisager la même position comme instable. Il doit donc y avoir aussi une direction toute spéciale et intermédiaire qui donne à cette même position la propriété d'une position d'équilibre *neutre* ou *indifférente;* ce qui est confirmé par la propriété de l'ellipsoïde de pouvoir être coupé suivant deux circonférences de cercle par deux plans menés suivant l'axe moyen. L'exemple de l'ellipsoïde se trouve, il est vrai, déjà cité dans la *Mécanique* de Poisson, mais dans un sens un peu différent.

Dans les machines, il faut également admettre les trois espèces de figures d'équilibre, quoiqu'il serait peut-être très-difficile de citer un bon exemple d'une figure ou position d'équilibre *indifférente*. En effet, tant que l'on ne définit pas les machines sur lesquelles on veut raisonner, il faut reconnaître deux cas comme possibles : ou le centre de gravité des forces sollicitantes, ou plutôt de leurs poids équivalents, s'élève et s'abaisse alternativement au-dessus et au-dessous d'un même plan horizontal, ou il se déplace seulement dans un tel plan. Dans ce dernier cas, chaque figure, si toutefois il y a encore changement de figure, doit être une figure ou une position d'équilibre indifférente ; car il y aura constamment équilibre dynamique entre les forces ou leurs poids équivalents, puisque la descente verticale et virtuelle est nulle par hypothèse, et que, par suite, il en est de même de la somme des moments virtuels de ces poids ou de ces forces. Mais le plus souvent, pour ne pas dire toujours, le centre de gravité dont il s'agit se rapproche et s'éloigne alternativement d'un même plan horizontal de comparaison, et alors pendant le mouvement utile de la machine l'équilibre dynamique n'a lieu généralement que quand le centre de gravité est à sa plus grande hauteur ou profondeur : cette situation rend, en effet, nulle la somme des moments virtuels effectifs des forces, et la force vive totale de la machine sera, par conséquent aussi, en général, un *maximum* ou un *minimum*. Ceci est vrai quelle que soit la nature des forces sollicitantes, et se trouve indépendant de ces restrictions de forces attractives et répulsives, fonctions de la distance, restrictions avec lesquelles on a exposé et enseigné le principe des forces vives jusqu'à l'époque de M. Poncelet, qui a, selon nous, le mérite incontestable d'avoir le premier exposé ce même principe sous une nouvelle face et avec ce haut degré de clarté et de généralité qu'il n'avait pas auparavant. En effet, il est vrai de dire, pour tous les cas, que le demi-accroissement de force vive instantanée est équivalent à la somme des moments virtuels effectifs des forces, soit qu'il y ait, soit qu'il n'y ait pas de loi qui exprime la force en fonction du chemin décrit par son point d'application, à compter d'une position initiale quelconque. De plus, en prenant les choses du point de vue de M. Poncelet, on conçoit aussi immédiatement que, dans le cas actuel, la figure d'équilibre stable doit répondre à une force vive maximum du système. En effet, immédiatement après que celui-ci a passé par la figure de l'équilibre stable, en vertu des vitesses qui animent ses différentes parties, les forces sollicitantes tendront (par définition) à le ramener à cette position ou à cette figure, alors même qu'il s'en éloigne de plus en plus par l'effet de ces vitesses. Donc la somme des moments virtuels des forces qui jouent le rôle de résistances actives (on fait abstraction des résistances passives) est supérieure à la somme des moments des forces qui tendent dans le sens même du mouvement utile. Il suit de là que la force vive du système doit diminuer pendant tout le temps où la figure s'écarte de la figure d'équilibre stable : mais on verrait de même que la force vive doit augmenter pendant tout l'intervalle où la figure variable se rapproche de plus en plus de cette même figure d'équilibre ; de sorte que la force vive maximum a lieu à l'instant même où le système affecte dans son mouvement révolutif la figure d'équilibre stable. Mais là où il y un mouvement périodique ou révolutif réglé ou non réglé, qui n'est pas censé s'éteindre à l'instar du mouvement oscillatoire, il faut qu'à un certain intervalle une force vive *minimum* succède à une force vive *maximum;*

cela est évident et résulte aussi de ce que, après le passage par la figure stable, l'accroissement de force vive a une valeur négative, de même que la somme totale des moments virtuels: il y aura donc diminution incessante de force vive jusqu'à l'époque où la figure variable sera telle, que les forces se fassent encore une fois équilibre, et que la somme des moments soit nulle. Mais cette nouvelle figure sera instable; car, immédiatement après le passage par cette figure, la force vive doit croître de nouveau pour pouvoir redevenir ensuite un maximum. Donc la somme totale des moments virtuels des forces doit avoir pour chaque instant une valeur positive sur toute l'étendue d'un intervalle fini, quelque petit qu'il soit d'ailleurs.

La figure d'équilibre dont il s'agit est donc telle, que si l'on y plaçait la machine avec une vitesse nulle, et qu'on l'en dérangeât ensuite un tant soit peu, dans l'un ou l'autre sens du seul mouvement possible, les forces qui tendraient dans le sens même du dérangement auraient une somme de moments virtuels, partant une tendance dynamique plus grande que la somme des moments des forces tendant en sens contraire. Or tel est précisément, par définition, le caractère de la figure d'équilibre instable qui correspond, par conséquent, à une force vive *minimum*.

Remarque I. Toutes les fois qu'il est question de figures d'équilibre stables et instables, il faut faire abstraction des frottements et des autres résistances passives, s'il y en a. En effet, en ayant égard aux frottements seuls, on peut déjà trouver diverses figures, toutes assez voisines d'une même figure d'équilibre, pour que la somme des moments virtuels de toutes les forces sollicitantes reste inférieure à la somme des moments virtuels des frottements, et chacune de ces figures sera pour la machine une figure de repos, et non pas une vraie figure d'équilibre.

Mais parmi toutes ces figures qui correspondent chacune à une inéquation de moments, il doit y en avoir une de chaque côté de la figure de l'équilibre idéal, qui réponde à une équation de moments, et c'est là la figure d'équilibre de la machine, eu égard aux frottements; c'est une *figure d'équilibre effectif ou physique*. Les figures de l'équilibre effectif existent donc bien aussi, mais elles ne sont pas les mêmes que celles de l'équilibre rationnel. Toutefois elles en diffèrent d'autant moins que les frottements sont plus faibles, et c'est dans ce sens seulement qu'il est permis de les confondre les unes avec les autres dans de certains cas, tels que celui du pendule et d'un solide à surface continue, qui serait pesant et qui poserait sur une surface d'appui horizontale très-unie; car, dans des cas pareils, le frottement de glissement et celui de roulement sont réduits aux plus minimes proportions.

Remarque II. Il résulte de ce qui a été dit plus haut, qu'en admettant l'existence de la figure stable, l'existence de la figure instable en résulte comme une conséquence nécessaire. De plus, comme dans la plupart des machines il y a des pièces à mouvement alternatif, le mouvement uniforme rigoureux est impossible. Donc, puisque le mouvement d'un tel système est révolutif ou périodique, il faut qu'il y ait dans chaque cas pareil une position de force vive *maximum* et une autre de force vive *minimum absolue*, ce qui nous semble démontrer suffisamment l'existence des figures d'équilibre des machines en général. Mais, comme l'exception est du moins possible ici, c'est-à-dire comme il peut y avoir quelques cas de machines dans lesquelles le mouvement uniforme soit possible d'une manière permanente, sous l'action même des forces sollicitantes, chaque figure ou position de la machine sera alors une position d'équilibre indifférente. D'après cela, il nous paraît impossible et superflu de démontrer analytiquement et d'une manière générale l'existence des figures d'équilibre stables et instables; on est d'autant plus porté à en juger ainsi que, dans chaque cas défini, la recherche de ces figures doit dépendre d'une équation algébrique ou transcendante dans laquelle la réalité de diverses racines doit résulter de la forme de l'équation, partant du genre de machines pour lequel on raisonne.

Remarque III. Concevons qu'une machine, occupant d'abord sa position d'équilibre stable, en soit dérangée par une impulsion étrangère, avec une énergie et des vitesses trop faibles pour qu'elle puisse atteindre jusqu'à sa figure d'équilibre instable. Les forces sollicitantes éteindront ces vitesses et ramèneront ensuite la machine vers sa figure initiale qu'elle dépasse encore par l'effet des vitesses acquises du côté opposé à celui vers lequel la portait l'impulsion initiale; mais, après un certain intervalle, les forces actives la ramèneront de nouveau à sa figure primitive, qu'elle dépassera encore pour continuer ainsi indéfiniment. C'est le cas le plus général du mouvement oscillatoire, qui serait perpétuel s'il pouvait se faire dans le vide et sans frottement. Mais, ces dernières conditions étant physiquement impossibles, les résistances passives absorberont, à chaque oscillation et à chaque écart de part et d'autre de la figure stable, une certaine quantité de travail, ce qui raccourcira graduellement l'amplitude des oscillations et ramènera finalement la machine à sa figure stable, ou, du moins, dans une position très-voisine, où elle restera désormais au repos sous l'action même des forces sollicitantes.

Le mouvement oscillatoire d'une machine de part et d'autre de la figure d'équilibre stable aura lieu toutes les fois que la force vive initiale imprimée est moindre que la double somme des quantités de travail des forces qui répondent aux espaces qui seraient décrits par leurs points d'action dans l'intervalle de la figure stable à la figure instable.

Si la force vive imprimée est précisément égale à cette double somme, la machine atteindra jusqu'à la figure instable où elle se maintiendra, et si cette force vive dépasse enfin l'autre quantité, le mouvement périodique et révolutif aura lieu; mais tout mouvement oscillatoire autour de la figure instable est impossible, car quelque faible que soit la cause qui dérange alors la machine, les forces sollicitantes l'en écarteront de plus en plus, et le mouvement révolutif aura lieu.

Remarque IV. Dans une machine à mouvement périodique, le centre de gravité des forces, ou plutôt de leurs poids équivalents, décrit ou une portion finie d'un axe vertical d'un mouvement alternatif, ou bien une courbe fermée; car, d'après ce qui est déjà dit, le cas où il se meut sur un même plan horizontal peut être laissé de côté. Ne considérons d'abord que le cas où ce centre a le mouvement vertical alternatif et celui où la courbe décrite n'a que deux tangentes horizontales. Alors, pendant toute la durée de sa descente, la somme des moments virtuels des poids équivalents est positive pour chaque instant; de sorte que, dans cet intervalle, la force vive s'accroît de plus en plus, tandis que pendant la montée elle diminue constamment. On peut donc dire aussi que, quand la force vive est un minimum, le centre de gravité, non pas de la machine, mais des poids équivalents, y compris ceux de ses pièces, est le plus profondément placé, et qu'il est à sa plus grande élévation pour la figure d'équilibre instable. Mais la courbe fermée, *plane* ou *à double courbure,* parcourue par le centre en question, peut avoir plus de deux tangentes horizontales; de sorte que, pour de certains cas, il peut y avoir plus de deux figures d'équilibre.

Concevons la figure de la machine en repos, pour laquelle ce centre se trouve sur la courbe au point de contact avec l'une quelconque d des tangentes intermédiaires horizontales. L'équilibre subsistera entre les forces ou leurs poids équivalents; et la figure dont il s'agit sera *stable* ou *instable,* selon que la tangente d laissera entièrement au-dessus ou au-dessous d'elle les deux parties de courbe qui se raccordent en son point de contact: seulement cette stabilité est plus ou moins resserrée, selon que la tangente d est elle-même plus ou moins rapprochée d'une autre tangente horizontale supérieure. Une remarque analogue s'applique à la figure instable.

Mais si le point de contact de la courbe avec d est un point d'inflexion, il correspondra à une figure d'équilibre de la machine qui ne sera ni absolument stable ni absolument instable, et qui, néanmoins, participera de l'une et de l'autre de ces propriétés. En effet, comme alors une branche courbe se trouve inférieure à la tangente d, et l'autre supérieure, il s'ensuit que, si l'on dérange le système de manière à élever le centre de gravité, il reprendra ou du moins il tendra à reprendre la figure primitive; et si, par suite du dérangement, le centre s'abaisse, le système s'écartera de plus en plus et jusqu'à une nouvelle tangente horizontale, car les forces agiront alors dans le sens même du dérangement produit. Une telle figure d'équilibre d'une machine, qui répond à un point d'inflexion à tangente horizontale dans la courbe décrite par le centre de gravité des poids équivalents, est ce qu'on peut nommer une figure d'équilibre *ambiguë* ou *douteuse.* Lorsqu'une machine, dans son état dynamique, passe par une figure douteuse, la force vive, dont l'accroissement instantané est nul alors, ne sera cependant ni un *maximum* ni un *minimum.* En effet, dans le cas où le mouvement du centre de gravité est ascendant, la force vive diminue pendant que ce point mobile s'élève vers le point d'inflexion ; pendant l'instant où il décrit l'élément de d, la force vive reste stationnaire, pour diminuer ensuite par degrés insensibles pendant que le centre s'élève sur la courbe au-dessus de d, et jusqu'à atteindre une nouvelle tangente horizontale. Il est aisé de suivre pas à pas les diverses faces par lesquelles passe alternativement la force vive totale de la machine dont la valeur *maximum* absolue a évidemment lieu pour la position la plus profonde, et la valeur *minimum* absolue pour la position la plus élevée du centre de gravité des poids équivalents.

Nous conclurons de là, et conformément à la remarque présentée par M. Lejeune-Dirichlet, qu'il est inexact de dire, avec les auteurs de mécanique rationnelle, que les figures d'équilibre d'un système soient exclusivement et alternativement stables et instables, attendu qu'elles peuvent être séparées par une et même par plusieurs *figures douteuses*, dont nous venons de constater l'existence.

Mais nous ne croyons pas qu'il soit permis d'alléguer ici, avec l'auteur cité, l'exemple du pendule comme rentrant dans ces cas rares. En effet, le pendule nous offre un exemple tout spécial du mouvement oscillatoire autour de sa figure d'équilibre; et, pour de tels cas, les auteurs n'ont sans doute jamais entendu affirmer que là le système passe alternativement par sa figure stable et instable. Mais si l'on imagine au pendule une force vive initiale suffisante, il aura son mouvement révolutif complet; et comme le centre de gravité des forces qui le sollicitent, ou des poids de ses parties ici, décrit alors une circonférence de cercle, c'est-à-dire une courbe fermée qui n'admet que deux tangentes horizontales et aucun point d'inflexion, il s'ensuit que, la chose étant convenablement envisagée, le pendule nous offre, au contraire, un des exemples les plus simples dans lesquels la figure d'équilibre *douteuse* n'existe pas.

Remarque V. Disons brièvement ce que nous nommons, pour abréger le langage, un poids équivalent à une force donnée qui agit d'après un mode connu sur une machine : tangentiellement à la ligne d'action de la force on peut placer une poulie de renvoi, faire passer suivant cette ligne même un cordon parfaitement flexible et inextensible d'une longueur définie, et enfin suspendre à son extrémité un poids capable d'exercer le long du cordon et sur la machine un effort égal à la force; c'est son poids équivalent. Or, si pour chaque figure de la machine on dispose toujours les poulies de la même manière par rapport aux points d'application des forces, et que l'on emploie constamment les mêmes longueurs de cordon, l'ensemble des poids équivalents aura un centre de gravité, et les positions de ce centre seront sur une même courbe continue, si toutefois les forces données sont elles-mêmes constantes ou qu'elles ne varient que par degrés insensibles dans leurs intensités et dans leurs lignes de direction.

Remarque VI. La question de la détermination des figures et des positions d'équilibre n'est ni sans difficulté ni sans importance dans la mécanique rationnelle, et surtout dans la mécanique appliquée. En effet, dès que l'on connaît la figure stable et instable qui succède, on en déduit immédiatement l'équation de condition qui fait connaître le poids et la masse du volant destiné à régulariser le mouvement général à un degré donné. Navier et M. Poncelet ont les premiers fait connaître cette méthode par quelques beaux exemples; mais nous ne sachions pas que l'on ait encore traité la question suivante que nous n'avons réussi à résoudre que d'une manière peu approchée, et dont voici l'énoncé : On sait que la machine à vapeur fixe de Watt a à peu près des dimensions constantes bien connues; on demande de déterminer, eu égard à ces proportions, les diverses figures d'équilibre de la machine, en négligeant ou en tenant compte du poids du balancier et de sa masse, et en laissant du même côté les résistances passives. Ces figures étant trouvées d'une manière au moins très-approchée, calculer le poids ou la masse du volant destiné à régulariser le mouvement à un degré donné. Nous devons faire remarquer que les procédés graphiques indiqués par M. Poncelet dans son Cours de machines de Metz, et qui sont fondés sur un beau théorème de MM. Chasles et Bobillier, résolvent aussi la question d'une manière approchée. On pourrait se proposer aussi de déterminer les positions d'équilibre d'une ellipse homogène pesante, qui serait placée entre deux plans inclinés, se coupant suivant une droite horizontale.

Bruxelles, 21 janvier 1848.