JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Thèse sur le mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes, en raison inverse du carré des distances

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 17-34.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__17_0>

THÈSE

SUR LE

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL ATTIRÉ PAR DEUX CENTRES FIXES,

EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DES DISTANCES;

PAR M. J.-A. SERRET.

§ I.

Euler a le premier traité le problème de la détermination du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes, suivant la loi ordinaire de l'inverse du carré des distances. En supposant que le mouvement s'accomplisse dans un plan, il est parvenu à séparer les variables et à ramener la question aux quadratures [*]. Lagrange en a donné ensuite une solution nouvelle, qui n'est plus bornée au cas du plan, et il a même ajouté un troisième centre fixe placé au milieu de la droite qui joint les deux autres, et doué d'une action attractive ou répulsive, proportionnelle à la distance [**]. Legendre, à son tour, a approfondi les détails de la question avec un soin tout particulier [***]. On lui doit cette remarque importante, que les variables employées par Euler peuvent être considérées comme les paramètres d'ellipses et d'hyperboles qui ont pour foyers les centres fixes, et dont l'intersection détermine le point mobile; par où l'on voit que les coordonnées elliptiques, dont

[*] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1760.

[**] *Mécanique analytique*, tome II, page 108, et *Anciens Mémoires de Turin*, tome IV.

[***] *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 411.

les géomètres ont fait un si grand usage dans ces derniers temps, se sont présentées, pour la première fois, dans un problème de mécanique. Enfin M. Jacobi a pris cette question des deux centres fixes pour un des exemples de l'application de son principe du dernier multiplicateur [*], et M. Liouville s'en est occupé dernièrement aussi dans une étude générale sur différents cas où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. M. Liouville a donné deux méthodes [**], qui l'une et l'autre s'appliquent à notre problème. L'une est fondée sur la considération des équations aux différentielles partielles; l'autre, qui conduit à des résultats moins étendus, est peut-être plus élémentaire : mais M. Liouville ne l'a développée que pour le cas du plan, en observant toutefois qu'elle peut aussi s'étendre au cas général de l'espace. C'est cette extension de la méthode de M. Liouville que nous nous proposons de présenter ici.

§ II.

La position d'un point sur un plan, ou plus généralement sur une surface quelconque, est déterminée par deux coordonnées α et β, qui sont des fonctions prises à volonté, de ses coordonnées rectangulaires. Tout déplacement infiniment petit ds du point sur la surface s'exprimera par les accroissements $d\alpha$, $d\beta$ de ces coordonnées, et son carré aura la forme

$$ds^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2,$$

toutes les fois que les équations

$$\alpha = \text{constante}, \qquad \beta = \text{constante}$$

seront celles de deux systèmes de lignes orthogonales. Cette condition, qui est nécessaire, est également suffisante; en sorte qu'il existera pour chaque surface une infinité de systèmes de coordonnées, dans lesquels ds^2 aura la forme précédente.

Si maintenant on considère un point situé d'une manière quelconque dans l'espace, et que l'on fasse passer un plan par ce point et par une

---

[*] *Journal de Crelle*, tomes XXVII et XXIX.

[**] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tomes XI et XII.

droite fixe, on pourra déterminer la position du point dans ce plan, par deux coordonnées α, β du genre de celles qu'on vient d'indiquer, et l'on achèvera de fixer sa position dans l'espace à l'aide d'une troisième coordonnée γ, dont les différentes valeurs correspondront aux différentes positions que peut prendre le plan que nous considérons autour de l'axe qu'il contient. Par exemple, on pourra prendre pour γ l'angle que fait ce plan avec un plan fixe mené par l'axe fixe.

Cela posé, si ds désigne le déplacement infiniment petit du point correspondant aux accroissements $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ de ses trois coordonnées, ds' le déplacement obtenu en ne faisant varier que α et β, et enfin λ'' le carré de la distance du point à l'axe fixe, on aura évidemment

$$ds^2 = ds'^2 + \lambda'' d\gamma^2,$$

et, par conséquent,

$$ds^2 = \lambda d\alpha^2 + \lambda' d\beta^2 + \lambda'' d\gamma^2.$$

Dans cette formule, les quantités λ, λ', λ'' ne renferment que les deux coordonnées α et β, qui peuvent être choisies d'une multitude de manières différentes; quant à la coordonnée γ, sa signification géométrique est parfaitement déterminée par ce qui précède. Au reste, la forme de l'expression de ds^2 resterait la même, si l'on prenait pour α, β, γ les paramètres de trois systèmes quelconques de surfaces orthogonales; alors λ, λ', λ'' pourraient être des fonctions des trois coordonnées α, β, γ. Mais, loin d'avoir besoin de ce degré de généralité, nous nous restreindrons encore à un cas plus particulier, celui où $\lambda' = \lambda$, que M. Liouville a considéré dans le cas du plan. Ainsi, désormais nous prendrons

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) + \lambda'' d\gamma^2,$$

λ et λ'' étant, nous le répétons, indépendants de γ.

§ III.

Considérons maintenant le mouvement d'un point matériel déterminé par les trois coordonnées α, β, γ dont il vient d'être question, et supposons que le principe des forces vives ait lieu; on aura, en désignant par ds l'élément parcouru pendant le temps dt, par U la fonction des forces accélératrices, et par C une constante arbitraire,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}),$$

ou

$$\lambda\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \lambda''\frac{d\gamma^2}{dt^2} = 2(\mathrm{U} + \mathrm{C}). \tag{1}$$

Cette équation, qu'il est plus simple et plus convenable de former directement, se déduit aussi des équations du mouvement, qui, d'après les principes de la *Mécanique analytique*, et en se rappelant que λ et λ'' ne contiennent pas γ, sont :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d.\lambda\dfrac{d\alpha}{dt}}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\lambda}{d\alpha}\left(\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} + \dfrac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\lambda''}{d\alpha}\dfrac{d\gamma^2}{dt^2} + \dfrac{d\mathrm{U}}{d\alpha}, \\ \dfrac{d.\lambda\dfrac{d\beta}{dt}}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\lambda}{d\beta}\left(\dfrac{d\alpha^2}{dt^2} + \dfrac{d\beta^2}{dt^2}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\lambda''}{d\beta}\dfrac{d\gamma^2}{dt^2} + \dfrac{d\mathrm{U}}{d\beta}, \\ \dfrac{d.\lambda''\dfrac{d\gamma}{dt}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\gamma}. \end{cases}$$

Nous supposerons que la dérivée $\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma}$ est toujours nulle, ou que U ne dépend pas de la coordonnée γ. Cela arrivera nécessairement toutes les fois que les forces agissant sur le mobile, seront toutes situées à chaque instant dans le plan déterminé par l'angle γ correspondant, circonstance qui se présentera dans le problème que nous nous sommes proposé de résoudre. Ayant ainsi

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\gamma} = 0,$$

la dernière des équations précédentes nous donnera

$$\frac{d.\lambda''\frac{d\gamma}{dt}}{dt} = 0,$$

et, en intégrant,

$$\lambda''\frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{\mathrm{B}}, \tag{3}$$

B désignant une constante arbitraire; alors l'équation (1) des forces vives donnera

$$\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2} = \frac{2(\mathrm{U}+\mathrm{C}) - \frac{\mathrm{B}}{\lambda''}}{\lambda}. \tag{4}$$

En vertu des équations (3) et (4), les deux premières des équations (2) deviendront

$$\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{U}+\mathrm{C})\frac{d\lambda}{d\alpha} + \frac{d\mathrm{U}}{d\alpha} - \frac{\mathrm{B}}{2\lambda\lambda''^2}\left(\lambda''\frac{d\lambda}{d\alpha} - \lambda\frac{d\lambda''}{d\alpha}\right);$$

$$\frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{U}+\mathrm{C})\frac{d\lambda}{d\beta} + \frac{d\mathrm{U}}{d\beta} - \frac{\mathrm{B}}{2\lambda\lambda''^2}\left(\lambda''\frac{d\lambda}{d\beta} - \lambda\frac{d\lambda''}{d\beta}\right).$$

Ces équations, respectivement multipliées par $2\lambda d\alpha$, $2\lambda d\beta$, prennent la forme très-simple

$$\left\{\begin{aligned} d\left(\lambda^2\frac{d\alpha^2}{dt^2}\right) &= \frac{d\left(2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}\right)}{d\alpha}\,d\alpha,\\ d\left(\lambda^2\frac{d\beta^2}{dt^2}\right) &= \frac{d\left(2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}\right)}{d\beta}\,d\beta,\end{aligned}\right. \tag{5}$$

dont l'une résulte de l'autre en vertu de l'équation des forces vives, ou plutôt en vertu des équations (3) et (4).

Elles ne diffèrent de celles qui sont relatives au plan, que par le terme $\mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}$ qui disparaîtrait dans ce cas, et qui n'apporte d'ailleurs aucune complication.

Les équations (5) pourront évidemment être intégrées une fois si leurs seconds membres ne contiennent respectivement, l'un que α, l'autre que β; c'est-à-dire si l'on a

$$2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''} = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta), \tag{6}$$

les fonctions $f(\alpha)$ et $\mathrm{F}(\beta)$ ne contenant la première que α, la seconde que β: alors les équations (5) deviennent

$$d\left(\lambda^2\frac{d\alpha^2}{dt^2}\right) = f'(\alpha)\,d\alpha,$$

$$d\left(\lambda^2\frac{d\beta^2}{dt^2}\right) = -\,\mathrm{F}'(\beta)\,d\beta;$$

d'où, par l'intégration,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda^2 \frac{d\alpha^2}{dt^2} = f(\alpha) - \mathrm{A},\\ &\lambda^2 \frac{d\beta^2}{dt^2} = \mathrm{A} - \mathrm{F}(\beta).\end{aligned}\right.$$

Nous mettons la même constante A dans ces deux équations, afin que l'équation (4) soit satisfaite.

§ IV.

La double intégration qui vient d'être effectuée repose sur l'hypothèse que nous avons faite, et en vertu de laquelle la quantité $2\lambda\mathrm{U} + 2\mathrm{C}\lambda - \mathrm{B}\frac{\lambda}{\lambda''}$ a la forme $f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta)$. Il pourra arriver, dans certains problèmes, que cette condition ne soit pas remplie généralement, mais qu'elle puisse cependant être satisfaite pour certaines valeurs particulières attribuées aux constantes arbitraires B et C; ce qui se traduira par des relations équivalentes entre les circonstances initiales du mouvement: et quand ces relations auront lieu, on pourra toujours appliquer la méthode précédente. Mais cette méthode est surtout intéressante dans le cas où la condition exprimée par l'équation (6) a lieu indépendamment des valeurs attribuées aux constantes B et C; car on pourra toujours, comme on va voir, résoudre complétement le problème correspondant, et cela pour un état initial quelconque. Il faut alors que chaque terme du premier membre de l'équation (6) soit de même forme que le second membre.

Soit donc

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \varphi(\alpha) - \Phi(\beta),\\ \lambda\mathrm{U} &= \psi(\alpha) - \Psi(\beta),\\ \frac{\lambda}{\lambda''} &= \varpi(\alpha) - \Pi(\beta),\end{aligned}\right.$$

d'où résultera

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} f(\alpha) &= 2\psi(\alpha) + 2\mathrm{C}\varphi(\alpha) - \mathrm{B}\varpi(\alpha),\\ \mathrm{F}(\beta) &= 2\Psi(\beta) + 2\mathrm{C}\Phi(\beta) - \mathrm{B}\Pi(\beta),\end{aligned}\right.$$

et voyons comment on pourra achever, dans ce cas, l'intégration des équations du mouvement.

§ V.

Les équations (7) donnent immédiatement, par la division.

$$(10)\qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-\mathrm{A}}}=\frac{d\beta}{\sqrt{\mathrm{A}-\mathrm{F}(\beta)}},$$

équation différentielle où les variables sont séparées, et qui sera l'une de celles de la trajectoire du mobile, ou, si l'on veut, l'équation de la trajectoire du point dans le plan mobile.

Pour avoir la seconde équation de la trajectoire, nous combinerons l'une quelconque des deux équations (7), la première par exemple. avec l'équation (3); on obtient ainsi

$$\frac{\lambda}{\lambda''}\frac{d\alpha}{d\gamma}=\frac{\sqrt{f(\alpha)-\mathrm{A}}}{\sqrt{\mathrm{B}}},$$

d'où, en mettant au lieu de $\frac{\lambda}{\lambda''}$ sa valeur écrite précédemment,

$$d\gamma=\sqrt{\mathrm{B}}\,\frac{\varpi(\alpha)-\Pi(\beta)}{\sqrt{f(\alpha)-\mathrm{A}}}\,d\alpha,$$

et, à cause de l'équation (10),

$$(11)\qquad d\gamma=\sqrt{\mathrm{B}}\left(\frac{\varpi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-\mathrm{A}}}-\frac{\Pi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{\mathrm{A}-\mathrm{F}(\beta)}}\right).$$

Cette équation, où les variables sont séparées, est la deuxième équation de la trajectoire du mobile. Il ne reste donc plus que la valeur du temps à déterminer.

On pourra, de l'une quelconque des équations (7), tirer la valeur de l'élément du temps; la première, par exemple, donne

$$dt=\frac{\lambda\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-\mathrm{A}}},$$

ou, en mettant au lieu de λ, sa valeur

$$dt=\frac{\varphi(\alpha)-\Phi(\beta)}{\sqrt{f(\alpha)-\mathrm{A}}}\,d\alpha;$$

et, en vertu de l'équation (10),

$$(12)\qquad dt=\frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-\mathrm{A}}}-\frac{\Phi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{\mathrm{A}-\mathrm{F}(\beta)}},$$

équation où les variables sont encore séparées. On voit, par les équations (10), (11) et (12), que le problème se trouve ramené aux quadratures. La forme de ces équations mérite d'être remarquée : on voit, par exemple, que l'expression du temps ne dépend que des coordonnées α et β, et qu'on pourra la déterminer sans connaître la coordonnée γ.

En posant

$$\begin{aligned}\Theta &= \int\sqrt{2\psi(\alpha)+2C\varphi(\alpha)-B\varpi(\alpha)-A}\,.\,d\alpha \\ &+\int\sqrt{-2\Psi(\beta)-2C\Phi(\beta)+B\Pi(\beta)+A}\,.\,d\beta+\gamma\sqrt{B},\end{aligned}$$

on donne à ces équations une forme remarquable.

En effet, les intégrales des équations (10), (11) et (12) pourront s'écrire comme il suit :

$$\frac{d\Theta}{dA}=A',\quad \frac{d\Theta}{dB}=B',\quad \frac{d\Theta}{dC}=t-t_0,$$

A', B' et t_0 désignant trois nouvelles constantes arbitraires. C'est sous cette forme qu'elles se présentent d'elles-mêmes, quand on fait usage de la méthode d'intégration fondée sur l'emploi d'une équation aux différentielles partielles dont nous avons parlé au § I.

§ VI.

Les résultats qui précèdent ne cesseront pas d'avoir lieu si l'on substitue à α une fonction quelconque d'une nouvelle variable μ, et à β une fonction d'une variable ν ; si l'on pose, en un mot,

$$d\alpha=\sqrt{m}d\mu,\quad d\beta=\sqrt{n}d\nu,$$

ce changement, insignifiant au point de vue théorique, nous sera commode pour l'application de nos formules. L'expression de ds^2 sera alors

$$ds^2=\lambda(md\mu^2+nd\nu^2)+\lambda''d\gamma^2,$$

λ et λ'' représentant des fonctions des variables μ et ν.

Les équations (8) deviendront

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}\lambda &= \varphi\ (\mu)-\Phi\ (\nu),\\ \lambda U &= \psi\ (\mu)-\Psi\ (\nu),\\ \frac{\lambda}{\lambda''} &= \varpi\ (\mu)-\Pi\ (\nu),\end{aligned}\right.$$

où les fonctions φ, Φ, etc., n'ont plus évidemment la même signification qu'au § IV. Quant aux équations (10), (11) et (12), qui font connaître la trajectoire du mobile et l'expression du temps, elles seront

$$(14)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} = \frac{\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}},\\
&d\gamma = \sqrt{B}\,\frac{\varpi(\mu)\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} - \sqrt{B}\,\frac{\Pi(\nu)\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}},\\
&dt = \frac{\varphi(\mu)\sqrt{m}d\mu}{\sqrt{2\psi(\mu)+2C\varphi(\mu)-B\varpi(\mu)-A}} - \frac{\Phi(\nu)\sqrt{n}d\nu}{\sqrt{-2\Psi(\nu)-2C\Phi(\nu)+B\Pi(\nu)+A}}.
\end{aligned}\right.$$

§ VII.

Considérons trois axes rectangulaires, dont l'un, celui des x par exemple, soit la droite fixe autour de laquelle tourne le plan déterminé par l'angle γ; prenons aussi pour γ l'angle que fait le plan mobile avec le plan xy, en sorte que cet angle soit nul, quand le plan mobile coïncide avec le plan xy. Cela posé, nous prendrons pour μ et ν les paramètres de deux systèmes d'ellipses et d'hyperboles homofocales situées dans le plan mobile, et qui, lorsque celui-ci coïncidera avec le plan xy, auront pour équations

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1.$$

Ces équations donnent

$$b^2x^2 = \mu^2\nu^2, \quad b^2y^2 = (\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2),$$

et

$$dx^2 + dy^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right).$$

En outre, comme la quantité désignée par λ'' n'est autre que la valeur de y^2 que nous venons d'écrire, on aura cette valeur de ds^2,

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right) + \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2}\,d\gamma^2;$$

on aura donc alors

$$m = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad n = \frac{1}{b^2 - \nu^2}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2, \quad \lambda'' = \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2}.$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{b^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{b^2}{b^2 - \nu^2};$$

en sorte que les quantités λ et $\frac{\lambda}{\lambda''}$ ont bien la forme exigée au § VI, et que l'on pourra appliquer la méthode que nous avons indiquée, toutes les fois que la fonction des forces U aura la forme

$$\frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

M. Liouville a démontré que le système des coordonnées elliptiques est le seul dans lequel la quantité λ a la forme exigée; il est remarquable que, dans le cas plus général de l'espace, la quantité $\frac{\lambda}{\lambda''}$ ait aussi la même forme, ce qui nous a permis de faire cette extension de la méthode.

Nous pourrons donc poser

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \qquad \Phi(\nu) = \nu^2,$$
$$\varpi(\mu) = \frac{b^2}{\mu^2 - b^2}, \qquad \Pi(\nu) = \frac{-b^2}{b^2 - \nu^2}:$$

en sorte que les équations (14) deviendront

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}},\\ &d\gamma = b^2\sqrt{B}\,\frac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} - b^2\sqrt{B}\,\frac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}},\\ &dt = \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)[2\psi(\mu) + 2C\mu^2 - A] - Bb^2}} - \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)[2\Psi(\nu) + 2C\nu^2 - A] - Bb^2}},\end{aligned}\right.$$

et résoudront tout problème de mouvement d'un point, dans lequel la fonction des forces sera de la forme

$$(16)\qquad U = \frac{\psi(\mu) - \Psi(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Il est presque superflu d'ajouter ici que, pour obtenir tous les points du plan mobile, il est nécessaire de donner aux quantités ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$ des valeurs tantôt positives, tantôt négatives. On sait, du reste, que les géomètres font disparaître cette difficulté relative aux signes en introduisant un angle θ à la place de ν, savoir, en posant

$$\nu = b\cos\theta \quad \text{et} \quad \sqrt{b^2 - \nu^2} = b\sin\theta.$$

Nous allons actuellement faire l'application de la méthode précédente au problème du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré des distances, et nous ajouterons même, avec Lagrange, un troisième centre placé au milieu de la droite qui joint les deux premiers, et doué d'une action proportionnelle à la distance.

§ VIII.

Prenons pour les trois centres fixes les foyers et le centre des ellipses et des hyperboles orthogonales dont il vient d'être question, et désignons par r, r' et R les rayons vecteurs issus de ces centres; la fonction des forces aura pour valeur

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + KR^2,$$

g, g' et K désignant trois constantes données, que l'on peut supposer à volonté positives ou négatives.

Mais on a évidemment

$$r = \mu + \nu, \quad r' = \mu - \nu, \quad R^2 = \mu^2 + \nu^2 - b^2;$$

donc

$$\begin{aligned} U &= \frac{g}{\mu + \nu} + \frac{g'}{\mu - \nu} + K(\mu^2 + \nu^2 - b^2) \\ &= \frac{[(g + g')\mu - Kb^2\mu^2 + K\mu^4] - [(g - g')\nu - Kb^2\nu^2 + K\nu^4]}{\mu^2 - \nu^2}. \end{aligned}$$

On voit que la fonction U a, dans ce cas, la forme exigée par notre méthode d'intégration, et, en comparant sa valeur à l'équation (16), on pourra poser

$$\begin{aligned} \psi(\mu) &= (g + g')\mu - Kb^2\mu^2 + K\mu^4, \\ \Psi(\nu) &= (g - g')\nu - Kb^2\nu^2 + K\nu^4; \end{aligned}$$

d'où il suit qu'en substituant ces valeurs de $\psi(\mu)$ et $\Psi(\nu)$, les équations (15) feront connaître la solution du problème qui dépendra, dans le cas général, des fonctions abéliennes. Toutefois, ces transcendantes se réduiront à de simples fonctions elliptiques, si l'on ne considère que les deux premiers centres fixes, c'est-à-dire si l'on fait $K = 0$.

En posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} M &= (\mu^2 - b^2)[2K\mu^4 + 2(C - Kb^2)\mu^2 + 2(g + g')\mu - A] - Bb^2, \\ N &= (\nu^2 - b^2)[2K\nu^4 + 2(C - Kb^2)\nu^2 + 2(g - g')\nu - A] - Bb^2. \end{aligned}$$

les équations (15) donneront

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \frac{d\nu}{\sqrt{N}}, \\ &d\gamma = b^2 \sqrt{B}\left[\frac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{M}} - \frac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{N}}\right], \\ &dt = \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M}} - \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \right.$$

Celles-ci fourniront la solution générale de notre problème, et l'on reviendrait au cas du plan en posant $B = 0$.

Quant aux trois constantes A, B, C qui entrent dans les équations (17), on les déterminera aisément par les conditions initiales du mouvement. Ainsi, en désignant par μ_0, ν_0, γ_0, μ'_0, ν'_0, γ'_0 les valeurs de μ, ν, γ, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ pour $t = 0$, et par V la vitesse initiale dont l'expression dépend de ces six quantités, on aura

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} V^2 - \frac{g}{\mu_0 + \nu_0} - \frac{g'}{\mu_0 - \nu_0} - K(\mu_0^2 + \nu_0^2 - b^2), \\ B &= \frac{(\mu_0^2 - b^2)^2 (b^2 - \nu_0^2)^2}{b^4} \gamma'^2_0, \end{aligned}$$

et enfin A se déterminera par l'une des équations

$$M_0 = (\mu_0^2 - \nu_0^2)^2 \mu'^2_0, \qquad N_0 = (\mu_0^2 - \nu_0^2)^2 \nu'^2_0,$$

où M_0 et N_0 désignent ce que deviennent M et N par le changement de μ et ν en μ_0 et ν_0. Les constantes étant ainsi déterminées, on pourra écrire les équations suivantes, qui font connaître la trajectoire du mobile et l'expression du temps :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{N}}, \\ &\gamma = \gamma_0 + b^2 \sqrt{B} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{(\mu^2 - b^2)\sqrt{M}} - b^2 \sqrt{B} \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{(\nu^2 - b^2)\sqrt{N}}, \\ &t = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M}} - \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \right.$$

Il résulte des principes de la théorie des fonctions elliptiques, que dans une infinité de cas, et si $K = 0$, la première des équations (17) admettra une intégrale générale algébrique, et qu'ainsi à la première des équations (18), qui est transcendante, on pourra substituer une équation algébrique qui sera celle de la trajectoire du mobile dans le plan, variable ou invariable, que détermine l'angle γ; cette équation renfermera d'ailleurs les deux quantités μ et ν, qui seront par conséquent toutes deux variables. Cependant il peut arriver que, quelle que soit la valeur de K, la trajectoire du mobile soit une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers et pour centre les trois centres fixes, auquel cas son équation sera

$$\mu = \text{une constante}, \quad \text{ou} \quad \nu = \text{une constante}.$$

C'est ce que nous allons maintenant expliquer.

§ IX.

La première des équations (17), où A, B, C ont des valeurs déterminées, admet, outre son intégrale générale, la solution particulière

$$MN = 0;$$

en sorte que l'on pourra la vérifier en prenant pour μ l'une des racines de $M = 0$, ou pour ν l'une des racines de $N = 0$. Mais pour que cette solution particulière de l'équation différentielle puisse convenir à notre problème, il faut d'abord que l'on ait

$$M_0 = 0, \quad \text{ou} \quad N_0 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mu'_0 = 0, \quad \text{ou} \quad \nu'_0 = 0,$$

auquel cas la trajectoire du mobile aurait pour équation

$$\mu = \mu_0, \quad \text{ou} \quad \nu = \nu_0.$$

En outre, cette condition, qui est nécessaire, n'est pas suffisante; car la trajectoire indiquée par la solution particulière ne saurait évidemment convenir que dans le cas où la solution générale fournie par les équations (18) serait en défaut, ce qui ne peut arriver que si quelques-unes des intégrales définies qu'elles contiennent, deviennent infinies. Or, pour que l'intégrale

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}},$$

dont l'élément est supposé infini pour $\mu = \mu_0$, soit elle-même infinie, il faut évidemment que le polynôme M contienne le facteur $\mu - \mu_0$ au moins à la seconde puissance, ou, en d'autres termes, que l'équation

$$M = 0$$

ait au moins deux racines égales à μ_0.

Ainsi la trajectoire du mobile sera l'ellipse $\mu = \mu_0$, ou l'hyperbole $\nu = \nu_0$, si l'on a

$$M_0 = 0, \quad \left(\frac{dM}{d\mu}\right)_0 = 0,$$

ou

$$N_0 = 0, \quad \left(\frac{dN}{d\nu}\right)_0 = 0.$$

C'est le résultat auquel est parvenu Lagrange dans sa *Mécanique analytique*, à l'aide de considérations qui me semblent moins élégantes et moins rigoureuses que les précédentes [*].

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une trajectoire elliptique, et ne considérons, pour plus de simplicité, que le cas où l'on a $K = 0$ et $B = 0$, c'est-à-dire le cas où le mobile se meut dans un plan fixe, et n'est attiré que par deux centres fixes en raison inverse du carré des distances; on aura simplement

$$M = (\mu^2 - b^2)[2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A],$$
$$N = (\nu^2 - b^2)[2C\nu^2 + 2(g - g')\nu - A].$$

Nous voulons que l'équation $M = 0$ ait deux racines égales à μ_0; nous supposons, d'ailleurs, que μ_0 n'est pas égal à b, ce qui correspondrait à un mouvement rectiligne : il faudra donc que l'équation

$$2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A = 0$$

[*] *Mécanique analytique*, tome II, page 115.

ait ses deux racines égales à μ_0, ce qui exige que l'on ait

$$C = -\frac{g+g'}{2\mu_0}, \qquad A = (g+g')\mu_0;$$

d'où il résulte, pour la vitesse initiale dirigée suivant la tangente à l'ellipse μ_0,

$$V^2 = \frac{g(\mu_0-\nu_0)^2 + g'(\mu_0+\nu_0)^2}{\mu_0(\mu_0^2-\nu_0^2)};$$

et alors l'expression du temps sera donnée par l'équation

$$t = \sqrt{\mu_0}\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{(\mu_0^2-\nu^2)\,d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{g(\mu_0-\nu)^2+g'(\mu_0+\nu)^2}}.$$

§ X.

Il est remarquable que cette solution du problème par l'orbite elliptique ou hyperbolique constitue une solution particulière des équations différentielles du mouvement. Ce cas étant certainement digne d'intérêt, il me paraît convenable de montrer qu'on peut déduire de suite les résultats qui précèdent, des équations ordinaires du mouvement.

En se bornant, comme précédemment, au cas du plan, ces équations seront

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g(x+b)}{r^3} - \frac{g'(x-b)}{r'^3},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gy}{r^3} - \frac{g'y}{r'^3}; \end{aligned}\right.$$

et, en faisant

$$x = \frac{\mu\nu}{b}, \quad y = \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b}, \text{ et } \mu = \text{une constante},$$

ces équations se changeront dans celles-ci :

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu\frac{d^2\nu}{dt^2} &= -\frac{g(\mu\nu+b^2)}{(\mu+\nu)^3} - \frac{g'(\mu\nu-b^2)}{(\mu-\nu)^3},\\ \nu\frac{d^2\nu}{dt^2} + \frac{b^2}{b^2-\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 &= \frac{g(b^2-\nu^2)}{(\mu+\nu)^3} + \frac{g'(b^2-\nu^2)}{(\mu-\nu)^3}. \end{aligned}\right.$$

qui, elles-mêmes, peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{g(\mu\nu+b^2)}{(\mu+\nu)^3} - \frac{g'(\mu\nu-b^2)}{(\mu-\nu)^3},\\ &\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \frac{b^2-\nu^2}{\mu}\left[\frac{g}{(\mu+\nu)^2}+\frac{g'}{(\mu-\nu)^2}\right]: \end{aligned}\right.$$

et il est facile de s'assurer que la première de ces deux équations s'obtient en différentiant la seconde, et, par suite, qu'elle se trouvera vérifiée en même temps qu'elle. On peut donc effectivement supposer μ constant, auquel cas la dernière équation fera connaître l'expression du temps, qui sera la même que celle écrite plus haut. Quant à la vitesse initiale, sa valeur se trouve essentiellement déterminée par les coordonnées à l'origine du mouvement.

Si V désigne toujours cette vitesse initiale, v et v' les deux valeurs qu'elle prend quand on fait successivement $g' = 0$, $g = 0$, on aura

$$V^2 = v^2 + v'^2;$$

d'où résulte ce théorème donné pour la première fois par Legendre :

Soit A *un point d'une ellipse dont* F *et* F' *sont les deux foyers; soit v la vitesse nécessaire pour qu'un point matériel placé en* A *décrive l'ellipse sous l'influence d'une force attractive en raison inverse du carré de la distance émanant du foyer* F; *soit pareillement v' la vitesse nécessaire pour que le même point décrive l'ellipse sous l'influence d'une force attractive, en raison inverse du carré de la distance émanant du foyer* F' : *si ces deux forces attractives agissent à la fois sur le mobile, et que sa vitesse initiale* V *soit telle que l'on ait* $V^2 = v^2 + v'^2$, *il décrira encore la même ellipse.*

Ce théorème n'est, au surplus, qu'un corollaire d'une proposition beaucoup plus générale donnée par M. Bonnet [*].

§ XI.

Dans l'examen du cas particulier que nous venons de faire, nous avons supposé la quantité μ_0 différente de b, et nous sommes parvenu à cette conséquence, que la vitesse initiale du mobile doit avoir une

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome IX, page 113.

valeur convenablement déterminée pour chaque mouvement elliptique : mais on sent que cette condition n'est plus nécessaire dans le cas où $\mu_0 = b$, qui est celui d'un mouvement rectiligne, et que ce mouvement pourra subsister quelle que soit la vitesse initiale : il est d'ailleurs évident que l'analyse du paragraphe précédent ne s'applique pas à ce cas, car les équations (20) ne résultent des équations (19) qu'après la suppression du facteur $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, qui est alors nul ; en sorte que la seconde des équations (21) est impropre à représenter le mouvement rectiligne, ce qui, du reste, résulte aussi de ce que cette équation, qui est seulement du premier ordre, ne renferme aucune constante arbitraire. Mais les considérations exposées au § IX nous feront connaître aisément la solution dans ce cas particulier. Nous avons vu que l'équation

$$M = (\mu^2 - b^2)\left[2C\mu^2 + 2(g + g')\mu - A\right] = 0$$

doit avoir deux racines égales à b; il suffit donc que l'on ait

$$2Cb^2 + 2(g + g')b - A = 0,$$

et la constante C ne sera assujettie qu'à la seule condition

$$C = \frac{1}{2}V^2 - \frac{g}{b + \nu_0} - \frac{g'}{b - \nu_0};$$

à l'aide des deux équations précédentes, on déterminera les deux constantes A et C, qui seront exprimées à l'aide de la vitesse initiale V, laquelle pourra être prise arbitrairement, et alors le temps sera donné par la formule

$$dt = \frac{\sqrt{b^2 - \nu^2}\,d\nu}{\sqrt{-2C\nu^2 - 2(g - g')\nu + A}}.$$

Ce cas très-simple peut se traiter directement, mais il nous a paru convenable de le déduire de notre analyse.

§ XII.

Enfin, pour compléter cette discussion, il nous reste à indiquer comment on peut déduire de notre solution générale les résultats connus relatifs au mouvement d'un point matériel attiré par un seul centre fixe. Il suffira évidemment de poser $g' = 0$ en même temps que

$K = 0$, et l'on aura pour l'équation de la trajectoire

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(2C\mu^2 + 2g\mu - A)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(2C\nu^2 + 2g\nu - A)}};$$

celle-ci est l'équation d'Euler, qui admet, comme on sait, une intégrale algébrique. En formant cette intégrale, on devra retrouver l'équation d'une conique ayant le centre fixe unique pour l'un de ses foyers; et, réciproquement, connaissant l'équation de la conique, on aurait l'intégrale de l'équation précédente : mais on peut obtenir une démonstration mécanique plus simple du théorème d'Euler, ainsi que l'a remarqué M. Jacobi; car si l'on suppose que g est nul en même temps que g' et K, le corps n'étant sollicité par aucune force se mouvra en ligne droite : or on pourra former l'équation de cette ligne droite, entre les deux coordonnées μ et ν. D'ailleurs, en posant, pour abréger,

$$\frac{A}{2C} = e,$$

la même ligne droite sera aussi représentée par l'équation

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - e)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - e)}};$$

en sorte que l'on aura de suite l'intégrale de cette équation différentielle.