

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Note de M. Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 13 (1848), p. 15.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__15_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Note de M. HERMITE.

Depuis longtemps j'avais trouvé de mon côté la démonstration élémentaire suivante du théorème relatif aux nombres premiers $4k + 1$.

Supposant

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

convertissons $\frac{a}{p}$ en fraction continue jusqu'à ce qu'on obtienne deux réduites consécutives $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$, telles que n soit $< \sqrt{p}$ et $n' > \sqrt{p}$; on aura, comme on sait,

$$\frac{a}{p} = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{nn'},$$

où ε est < 1 . De là on tire

$$na - mp = \varepsilon \cdot \frac{p}{n'};$$

donc

$$(na - mp)^2 < p.$$

Ajoutant membre à membre avec

$$n^2 < p,$$

il vient

$$(na - mp)^2 + n^2 < 2p.$$

Or le premier membre de cette inégalité est un multiple entier de p d'après la condition

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

il faut donc qu'on ait précisément

$$(na - mp)^2 + n^2 = p.$$

