JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNEST LAMARLE

Note sur la continuité considérée dans ses rapports avec la convergence des séries de Taylor et de Maclaurin

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 305-342.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__305_0>

NOTE

Sur la continuité considérée dans ses rapports avec la convergence des séries de Taylor et de Maclaurin;

Par M. Ernest LAMARLE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

En publiant la Note insérée dans ce Journal (tome XI, pages 129 et suivantes), j'ai eu pour objet de préciser les caractères distinctifs que toute fonction présente selon qu'elle est ou qu'elle n'est pas développable en série convergente, d'après un des types réductibles aux formules de Taylor ou de Maclaurin. M. Aug. Cauchy ayant démontré antérieurement que la série de Maclaurin est convergente, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être continue, j'avais remarqué que les termes de cette proposition, souvent mal comprise, se prêtaient à de fausses interprétations. Pour plus de rigueur et de clarté, il me parut utile d'établir nettement que la condition de continuité pouvait toujours être omise en ce qui concerne la dérivée, et qu'elle était, d'ailleurs, insuffisante, à moins qu'elle n'impliquât une certaine périodicité de la fonction.

Selon moi, la continuité proprement dite peut subsister indépendamment de toute périodicité, et il y a avantage à ne point confondre ces deux caractères. Cela posé, j'ai cru devoir énoncer, comme il suit, le théorème en question :

« Toute fonction est développable en série convergente, suivant
» la formule de Maclaurin, tant que le module de la variable reste
» moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction

» cesse d'être continue, ou de prendre même valeur aux deux limites » $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Hors de là, la série devient divergente. »

Dans une Note, que renferme le volume déjà cité (pages 313 et suivantes), M. Cauchy conteste la dernière partie de l'énoncé que je viens de reproduire. Il rappelle, en outre, que, dès 1844, il a fourni lui-même des explications catégoriques sur le sens et les restrictions que comporte l'énoncé qui lui appartient. Ces explications, je me hâte de le dire, m'avaient échappé jusqu'ici. Conformes, en partie, à mes propres remarques, elles ont sur elles l'avantage de la priorité. Toutefois, je ne puis les admettre sans réserve, pas plus que l'exemple choisi par l'illustre géomètre pour démontrer l'inexactitude de l'énoncé rappelé ci-dessus. Les points sur lesquels nous restons divergents, n'étant dépourvus à mes yeux ni d'intérêt ni d'importance, il convient que je cherche à les élucider par de nouveaux développements.

Tel est l'objet de la présente Note.

§ Ier.

Théorie de la continuité.

Considérant les caractères distinctifs que doit offrir une fonction pour être développable en série convergente suivant la formule de Maclaurin, j'ai dit, relativement à la condition de continuité, qu'elle était insuffisante à moins qu'elle n'impliquât une certaine périodicité de la fonction.

M. Cauchy fait observer que si j'avais eu sous les yeux le Mémoire qu'il a publié sur les fonctions continues, et que j'eusse rapproché certain passage de ce Mémoire des principes exposés dans son *Analyse algébrique,* je me serais certainement borné à dire que, dans le théorème en question, la condition de continuité est la seule qu'on doive mentionner, vu que cette condition implique une certaine périodicité de la fonction.

Il est incontestable qu'en définissant, ainsi qu'il l'a fait dans le passage qu'il cite, ce qu'il entend par fonction continue, M. Cauchy a voulu comprendre la condition d'une certaine périodicité au nombre de celles que toute fonction doit remplir pour être développable en série convergente suivant la formule de Maclaurin. Quant aux principes exposés par l'auteur dans son *Analyse algébrique*, je ne pense pas qu'ils soient généralement interprétés dans le sens qu'il leur attribue. C'est, du moins, ce que j'ai cru remarquer en lisant plusieurs passages de divers écrits, et notamment ce paragraphe que j'extrais textuellement des *Leçons de Calcul différentiel et intégral*, publiées par M. l'abbé Moigno (tome II, pages 327 et 328) :

« *Il est enfin une autre formule très-générale démontrée aussi par*
» *M. Cauchy, et qu'il importe de rappeler en finissant. Désignons par* z
» *une variable imaginaire dont* r *soit le module et* t *l'argument, par* Fz
» *une fonction qui reste finie et continue ainsi que sa dérivée* $\mathrm{F}'(z)$,
» *pour toute valeur du module* R, *inférieure à une certaine limite*
» *donnée* R. *Supposons,* DE PLUS, *que,* r *restant constant, la fonc-*
» *tion* $\mathrm{F}(z)$ *soit une fonction périodique qui reprenne pour* $t = \alpha + 2\pi$,
» *la valeur qu'elle avait pour* $t = \alpha$. »

Sans insister sur ce point, voyons comment M. Cauchy procède pour *établir directement* que toute fonction d'une variable imaginaire ne peut être continue, sans être en même temps périodique.

La variable étant d'abord réelle, M. Cauchy donne la définition suivante [*] :

« Supposons que, dans la fonction $f(x)$, on fasse varier x par de-
» grés insensibles en attribuant à cette variable une série de valeurs
» infiniment rapprochées les unes des autres. La fonction $f(x)$ restera
» continue pour toutes ces valeurs de x, si pour chacune d'elles elle
» acquiert constamment une valeur unique et finie, et si d'ailleurs un
» accroissement infiniment petit, attribué à l'une quelconque de ces
» valeurs de x, produit toujours un accroissement infiniment petit de
» la fonction elle-même. »

Il ajoute ensuite :

« Énoncée en ces termes, la définition des fonctions continues n'est
» pas seulement applicable au cas où x reste réel ; on pourra l'appli-
» quer encore, sans difficulté, au cas même où x devient imaginaire.

Puis, vient une démonstration dont je vais reproduire les points principaux.

---

[*] *Voir* la Note insérée dans ce Journal (tome XI, page 315).

ε désignant une quantité positive infiniment petite, et la variable imaginaire x ayant pour expression

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = re^{\theta\sqrt{-1}},$$

M. Cauchy remarque que si l'on pose successivement $\theta = \pi - \varepsilon$, puis $\theta = -(\pi - \varepsilon)$, on trouve, dans la première hypothèse,

$$x = -re^{-\varepsilon\sqrt{-1}},$$

et, dans la seconde,

$$x = -re^{\varepsilon\sqrt{-1}}.$$

On voit donc qu'en passant de l'une de ces hypothèses à l'autre, la variable imaginaire x, qui reste toujours très-peu différente de $-r$, ne varie qu'infiniment peu.

Cela posé, M. Cauchy conclut que la fonction $f(x)$ ne peut rester fonction continue de x dans le voisinage de la valeur particulière $x = -r$, qu'autant qu'elle varie elle-même infiniment peu, quand on passe de la supposition $\theta = \pi - \varepsilon$ à la supposition $\theta = -(\pi - \varepsilon)$, ce qu'on peut exprimer encore, ajoute-t-il, en disant que la fonction $f(x)$ ne pourra rester fonction continue de x dans le voisinage de la valeur particulière $x = -r$, si elle ne reprend pas la même valeur, quand l'argument θ passe de la valeur $+\pi$ à la valeur $-\pi$.

Ici se présentent plusieurs observations.

S'agit-il d'abord de la définition considérée en elle-même; je remarquerai que, prise en toute rigueur, elle rendrait inutile la démonstration qui la suit. En effet, la variable imaginaire

$$x = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

étant périodique, il est évident que la fonction devrait subir la même loi de périodicité, par cela seul qu'elle serait assujettie à n'admettre qu'une valeur unique pour chaque valeur de la variable. Une interprétation aussi étroite conduirait à des résultats, qui déjà sont inadmissibles [*],

[*] Dira-t-on, par exemple, que la fonction

$$f(x) = x + \arccos x$$

est discontinue parce qu'à la valeur unique $x = 0$ répondent les deux valeurs

$$f(x) = \frac{\pi}{2},\quad f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

alors même qu'on s'en tient exclusivement au système des valeurs réelles. Je ne puis donc m'y arrêter. Il est clair, d'ailleurs, que M. Cauchy lui-même la repousse, puisqu'il a jugé une démonstration nécessaire.

S'agit-il ensuite de cette démonstration; je dois déclarer qu'elle ne me paraît pas concluante.

En effet, ou bien l'argument θ est pris pour variable indépendante, les variables imaginaires x et $f(x)$ en étant toutes deux fonction; ou bien la variable x, quoique imaginaire, reste variable indépendante.

Dans le premier cas, et c'est le seul que nous admettions comme offrant un sens précis, on ne peut rien conclure de ce que les fonctions x et $f(x)$ subissent ou non un changement brusque, lorsque la variable indépendante θ, passant de la valeur $+\pi$ à la valeur $-\pi$, change elle-même brusquement de grandeur numérique.

Dans le second cas, la suite continue des valeurs $-r^{\mp\varepsilon\sqrt{-1}}$ *étant donnée à priori*, c'est faire une supposition toute gratuite que de considérer ces valeurs de la variable imaginaire comme impliquant, par rapport à celles de l'argument θ qui leur correspondent, les deux suites exprimées respectivement l'une par $\pi-\varepsilon$, l'autre par $-(\pi-\varepsilon)$. Pourquoi ces deux suites, entre lesquelles il y a solution de continuité, plutôt que la suite continue $\pi\mp\varepsilon$? Je vois bien que le procédé suivi rend possible une démonstration qui ne le serait pas autrement. Mais comment justifier ce procédé, alors même qu'il serait permis de prendre pour variable *indépendante* l'expression imaginaire

$$x = re^{\theta\sqrt{-1}}.$$

Dans le système des valeurs réelles, la variable indépendante croissant ou décroissant avec continuité, chacune des valeurs qu'elle affecte se résout en un ensemble où les parties intégrantes se confondent, sans qu'il y ait lieu d'établir entre elles aucune distinction. Peu importe d'ailleurs qu'il s'agisse du tout ou d'une partie. L'un comme l'autre devant être conçu de toutes pièces, il y a toujours unité de conception, et nulle difficulté ne surgit. Pour passer de là au système des valeurs imaginaires, il suffit d'observer que celles-ci se composent de deux parties réelles que le signe $\sqrt{-1}$ permet de réunir symboliquement, sans qu'elles cessent pour cela de rester essentiellement distinctes. Dès lors tout se réduit à la considération des quantités réelles, seules saisissables et intelligibles. Que deux de ces quantités soient réunies dans une même expression, où la présence d'un symbole particulier élève entre elles une barrière qui les isole complétement, la nécessité de ne les point confondre, et de maintenir pour chacune d'elles les règles et conventions généralement établies, n'en subsiste pas moins que si, figurant dans des équations distinctes, elles étaient effectivement séparées.

Essayons d'exposer, à ce point de vue, la théorie de la continuité.

L'idée de fonction est complexe. Elle implique, avant tout, la conception d'une variable qui subsiste par elle seule ou dont on dispose arbitrairement. Cette variable, dite *indépendante,* ne peut qu'être réelle.

On distingue, par rapport à la variable indépendante, deux modes de variations. Lorsqu'on se donne une suite de valeurs numériques, telles que a, b, c, d, etc., et que, *passant brusquement de l'une à l'autre,* l'on assujettit la variable à les prendre toutes successivement, le mode de variation est discontinu. Il est continu lorsque la variable est supposée croissante ou décroissante, *de la même manière* que croît ou décroît la distance comprise entre deux plans parallèles, l'un fixe, l'autre mobile. Une condition facile à saisir caractérise ce mode. Elle consiste en ce que nul changement ne s'accomplit entre deux limites quelconques, sans que la variable ait passé préalablement par tous les degrés de grandeur intermédiaires.

Il est visible que chacun de ces modes a son essence propre. On s'est efforcé néanmoins de ménager entre eux une sorte de transition, qui permît de les résoudre l'un dans l'autre. Des efforts, dirigés vers ce but, ne pouvaient aboutir à rien de rationnel : il a fallu d'ailleurs, pour qu'on les poursuivît, céder à une étrange illusion. Au lieu de la quantité, telle qu'elle est et qu'il faut la concevoir, c'est-à-dire avec les propriétés qui subsistent en elle, *indépendamment de tout degré de grandeur,* on n'a vu que ce qu'elle offre de saisissable aux sens, et là où elle leur échappait, on s'est figuré qu'elle changeait de nature, et que, suspendue entre l'être et le néant, elle participait à la fois de ces deux extrêmes. Il semblerait que de telles aberrations n'ont pas besoin d'être réfutées et qu'il suffit de les signaler pour en faire justice. Remarquons, toutefois, qu'elles ont pour elles l'appui *tacite* de presque tous les géomètres.

Par cela seul qu'elle varie, la variable échappe à toute mesure directe. Elle est, mais croissant toujours ou toujours décroissant. On peut, sans doute, se représenter isolément chacun des degrés de grandeur que comprennent entre elles les limites choisies pour origine et fin de la variation; mais comme entre ces limites la variable ne subsiste que par la loi qui régit ses changements, il serait évidemment absurde et contradictoire de lui attribuer, à titre de détermination effective, l'un quelconque de ces degrés de grandeur. Comment comprendre, en effet, qu'elle pût affecter une pareille détermination si, en même temps, elle ne cessait pas d'être variable?

On observera que dans le cas le plus simple, alors qu'il s'agit d'une grandeur quelconque déterminée, il ne suffit point, *pour qu'elle soit*, ou, ce qui revient au même, *pour qu'on puisse la concevoir*, de lui assigner un certain degré qui la limite; il faut ajouter, en outre, ou au moins sous-entendre que ce degré se conserve en elle. N'est-ce pas là, d'ailleurs, ce que renferme en soi la dénomination de *constantes* affectée aux grandeurs complétement définies? Cette remarque s'applique aux diverses valeurs par lesquelles la variable passe. Nulle ne peut être isolée, et devenir ainsi l'objet d'une conception distincte, sans que la pensée, qui se fixe sur elle, lui imprime forcément le caractère de durée nécessaire à sa détermination. De là l'extrême confusion où l'esprit tombe inévitablement, lorsque, considérant la suite infinie des degrés que la variable franchit entre deux limites déterminées, il transporte, dans chacune des valeurs intermédiaires, l'élément de durée qui n'appartient qu'à l'ensemble formé par leur succession continue. De là ces difficultés insolubles, qu'on ne songerait pas même à soulever, si l'on prenait garde que la grandeur qui reste constante, et celle qui change incessamment, puisent toutes deux leur réalité dans la durée qui leur est commune, et qui, divisible à l'infini, offre toujours, de part et d'autre, un terme commun de comparaison.

La faculté d'abstraire constitue sans contredit une des ressources les plus précieuses dont nous disposions. Mais n'est-ce pas en abuser étrangement que de pousser les abstractions au point d'obscurcir, disons plus, de rendre inintelligibles les premières notions de la science [*]?

Que l'on veuille bien y réfléchir, et l'on sera conduit à admettre avec nous les principes suivants :

Être et durer, c'est-à-dire continuer d'être, sont pour toute grandeur, constante ou variable, deux conditions qui s'impliquent mutuellement.

Quel que soit le mode suivant lequel une grandeur quelconque subsiste pendant une certaine durée, ce mode est toujours réductible à deux types primitifs. L'un de ces types répond aux parties de la durée totale pendant lesquelles la grandeur conserve une même détermination; l'autre, à celles où la variation est incessante.

Tant qu'une grandeur varie de manière à ce que tout changement qu'elle subit exige pour s'accomplir une certaine durée de la variation, on dit de cette grandeur qu'elle varie avec continuité.

Il n'est point de variation incessante qui ne soit tout entière continue, ou qui ne se compose exclusivement d'une suite de variations

---

[*] La considération des quantités infinitésimales crée un obstacle invincible à la notion de continuité. Elle implique, d'ailleurs, deux impossibilités radicales, savoir : 1° l'existence des prétendus infiniment petits; 2° l'existence des prétendus infiniment grands. J'admets qu'en dépit de leur commune absurdité, l'une de ces conceptions puisse, moyennant certaines précautions, servir, en général, de correctif à l'autre. Je ne comprends pas, néanmoins, qu'on affecte de les prendre au sérieux, et que, sans s'inquiéter de propager l'erreur, on les présente comme base d'une science où la certitude des déductions repose essentiellement sur la rigueur absolue des principes fondamentaux. Que dire, par exemple, du sens qui s'attache naturellement à ces lignes extraites du programme des cours donnés, en 1846, à l'École Polytechnique :

« *Du rapport entre l'accroissement d'une fonction et l'accroissement d'une variable.*
» VALEUR QUE PREND CE RAPPORT QUAND LES ACCROISSEMENTS DEVIENNENT INFINIMENT
» PETITS. »

Dans l'essai que j'ai publié sur les principes de l'analyse transcendante, j'ai montré ce qu'est, en réalité, une différentielle, à savoir, une différence ordinaire prise dans une certaine hypothèse. J'ai, d'ailleurs, créé une méthode qui, sans cesser d'être purement algébrique et toujours rigoureuse, offre au plus haut degré la simplicité désirable. En m'imposant cette tâche, je ne me suis point dissimulé que, si peu rationnels que soient certains procédés fort en vogue, il suffit qu'un long usage les ait rendus familiers pour qu'on trouve plus commode de s'y tenir. Je poursuivrai néanmoins, persuadé que la vérité peut plus que l'erreur, et qu'à elle seule l'avenir appartient.

continues, ayant toutes une certaine durée. L'hypothèse inverse serait un non-sens d'une absurdité en quelque sorte palpable.

Concluons que toute durée d'une grandeur se compose nécessairement d'une suite de parties qui se succèdent sans intervalle, et pendant chacune desquelles la grandeur reste continue, soit qu'elle varie, soit qu'elle persiste dans une même détermination. Lorsqu'à la limite commune à deux de ces parties, la grandeur subit un changement brusque, on dit qu'il y a solution de continuité. Plusieurs solutions de continuité sont possibles entre deux limites aussi rapprochées qu'on voudra. Dans tous les cas, et quel qu'en soit le nombre, comme elles ne constituent jamais que des accidents transitoires, *essentiellement dépourvus de durée*, il reste démontré qu'on peut dire avec une entière rigueur :

Tout mode d'existence d'une grandeur quelconque est constamment régi par une même loi générale, la loi de continuité.

Avant d'aller plus loin, je crois utile de présenter plusieurs observations.

Les grandeurs, soumises au calcul, n'y figurent point comme quantités concrètes. C'est par le nombre abstrait, exprimant pour chacune le rapport existant entre elle et son unité propre, qu'elles y sont introduites. Ce mode de représentation n'entraîne aucune difficulté pour les grandeurs constantes. Quant à la grandeur variable, comme elle n'est définie que par la loi particulière qui régit sa variation, c'est cette loi qu'il faut traduire numériquement. On y parvient en fixant d'une manière générale le changement qui s'accomplit durant une partie quelconque de la variation. Veut-on, d'ailleurs, abstraire l'élément de durée, ainsi qu'on le fait habituellement ; cette abstraction devient possible dès qu'il y a deux grandeurs subsistant et variant ensemble à partir d'une même origine. En effet, à chaque partie de la durée qui leur est commune, répond de part et d'autre un changement déterminé. De là donc, relation nécessaire entre deux quelconques des changements qui s'accomplissent simultanément dans l'une et l'autre grandeur ; de là, possibilité évidente de former deux suites toujours comparables entre elles et susceptibles de s'exprimer directement l'une par l'autre. On atteint le même résultat lorsque, au lieu des changements qui se correspondent pour une même durée quelconque de la variation, l'on fixe les valeurs qui subsisteraient ensemble, si, à l'expiration de cette durée, la variation cessant tout à coup, les grandeurs que l'on considère demeuraient constantes.

En général, l'élément de durée n'apparaît point explicitement dans les relations où se trouve exprimée la loi qui régit la génération simultanée de plusieurs variables : il convient, en outre, d'observer que presque toujours il s'élimine de lui-même. Que cette abstraction se fasse spontanément, ou bien qu'elle résulte de l'application des procédés que je viens de décrire, elle offre dans tous les cas un avantage précieux, c'est de ne laisser en présence que les grandeurs sur lesquelles on veut opérer, et de faciliter le cours des déductions, rendues ainsi plus directes et plus simples. Toutefois, il ne faut point perdre de vue que dans l'idée de variation est implicitement comprise l'idée de durée, base fondamentale de toute conception intellectuelle.

Cela posé, occupons-nous des fonctions proprement dites, et, les prenant d'une manière absolue, ne voyons en elles que la suite des valeurs qu'elles expriment numériquement.

Considérons d'abord la variable indépendante.

Déterminée par elle seule, c'est-à-dire toujours une et non complexe, la variable indépendante est conçue le plus simplement possible, lorsqu'on admet qu'elle croît ou décroît proportionnellement à la durée pendant laquelle elle varie, ou, ce qui revient au même, qu'elle ne subit aucun changement qui n'exige, pour s'accomplir, une durée proportionnelle de la variation. Elle est, dès lors, essentiellement continue.

Considérons ensuite la variable dépendante, ou, en d'autres termes, la fonction.

On entend par fonction une expression complexe qui, variant et cessant de varier en même temps que la variable dont elle dépend, est généralement déterminée pour toute valeur attribuée à cette variable. Lorsque, pour une même suite de valeurs affectées par la variable, la fonction comporte plusieurs systèmes de valeurs distinctes, on isole par la pensée ces différents systèmes, et l'on considère chacun d'eux comme constituant par lui seul une fonction particulière. D'un système à l'autre, la continuité et la discontinuité sont possibles de la même manière que pour la suite des valeurs appartenant à l'un d'eux pris séparément.

La fonction ne pouvant demeurer constante pour toutes valeurs de la variable comprises entre deux limites aussi rapprochées qu'on voudra, la variation qu'elle subit, lorsque cette variable croît ou décroît avec continuité, est nécessairement incessante. Doit-on en inférer qu'elle est constamment continue, ou bien composée de parties qui se suivent immédiatement et durant chacune desquelles la continuité subsiste sans interruption? Nul doute pour une fonction quelconque puisant sa réalité dans l'existence effective ou idéale d'une grandeur dont elle est l'expression numérique. Pour tout autre fonction, la question plus complexe veut être traitée directement. J'essayerai tout à l'heure de résoudre cette difficulté.

Tant qu'il y a continuité, tout changement de la fonction exige, pour s'accomplir, une certaine durée de la variation, et, par conséquent, un certain accroissement de la variable indépendante. Une condition inhérente à ce mode, tel qu'il vient d'être défini, suffit, d'ailleurs, pour le caractériser. Elle consiste en ce que le passage d'une valeur à une autre ne peut jamais avoir lieu sans que la fonction ait franchi successivement toutes les valeurs intermédiaires.

Lorsque la discontinuité survient, c'est par un changement brusque qui s'opère instantanément. Voyons en quoi consistent, pour une fonction, les changements brusques dont elle est susceptible.

Les opérations à effectuer sur la variable indépendante pour construire la fonction sont réductibles à deux classes principales : je range dans la première, l'addition, la multiplication, l'élévation aux puissances; dans la seconde, la soustraction, la division, l'extraction des racines.

Tant qu'on procède par voie d'addition, de multiplication, ou d'élévation aux puissances, chaque valeur de la variable fournit pour la fonction une valeur unique, toujours réelle et déterminée. La soustraction donne, pour résultat accidentel, zéro, et plus généralement des quantités tantôt positives, tantôt négatives. En s'introduisant comme diviseur, le zéro répond à une impossibilité fortuite. Lorsqu'une quantité, soumise à un radical de degré pair, passe du positif au négatif, les valeurs fournies par ce radical perdent leur réalité.

Que les valeurs de la fonction, supposées numériquement exprimables, cessent tout à coup de l'être, c'est là, sans aucun doute, un changement brusque. On voit ainsi que les fonctions admettent, comme solution de continuité, le passage du réel à l'imaginaire, et, pour me servir des termes usités, le passage du fini à l'infini.

La discontinuité peut encore provenir d'un accident fortuit, qui, par une cause quelconque, dépendante ou non de l'impossibilité qu'exprime le symbole $\frac{1}{0}$, exclurait transitoirement toute détermination particulière de la fonction. Hors de là, elle n'est possible que par un changement brusque qui ferait succéder, l'une à l'autre, deux valeurs numériques tout à coup différentes; ce qui exige que ce changement ait lieu dans le mode indiqué pour construire la fonction, ou, si ce mode reste le même, dans le résultat des opérations par lesquelles il se réalise.

Supposons d'abord un intervalle où le mode indiqué pour construire la fonction ne change point, et cherchons si, la fonction n'affectant jamais qu'une seule détermination transitoire, deux quelconques de ces déterminations successives peuvent être toujours brusquement différentes. Dans cette hypothèse, c'est la variation continue attribuée à la variable indépendante qui produit les changements brusques incessamment subis par la fonction. Or, lorsque la variable croît ou décroît continûment, les valeurs qu'elle franchit se succèdent en étant tour à tour commensurables et incommensurables. Dans le premier cas, elles affectent, en général, l'une des trois formes fractionnaires $\frac{2p+1}{2q+1}$, $\frac{2p+1}{2q}$, $\frac{2p+2}{2q+1}$; dans le second, elles n'ont point de représentation numérique: on peut, toutefois, en empruntant à volonté l'une ou l'autre de ces formes, les exprimer avec tel degré d'approximation qu'on désire. Cela posé, et eu égard à la nature des opérations fondamentales par lesquelles une fonction se construit, je remarque que c'est uniquement à raison de leur forme et non point de leur degré de grandeur, que les valeurs successives de la variable peuvent introduire dans la fonction une série non interrompue de déterminations brusquement différentes. Il suit de là qu'admettre des changements brusques incessants, c'est faire dépendre ces changements de la diversité des formes affectées par les valeurs fractionnaires, et, par conséquent, attribuer à chacune de ces formes une influence qui rend forcément impossible toute détermination répondant aux valeurs incommensurables. C'est donc aussi admettre implicitement que, si peu différentes que soient entre elles deux valeurs de la variable, elles comprennent, néanmoins, une valeur intermédiaire pour laquelle la fonction n'est pas déterminée. Mais si pareille valeur existe nécessairement entre deux limites aussi rapprochées qu'on voudra, il faut qu'entre ces mêmes limites il y en ait une infinité. Dès lors, ce qui domine, en général, c'est le défaut de détermination, et, privée de son caractère essentiel, la fonction prétendue n'est plus une fonction.

Après avoir reconnu que là où le mode de construction demeure invariable, toute fonction proprement dite subit la loi de continuité, il est aisé de voir que, si des changements brusques surviennent dans ce mode, et, par suite, dans la fonction, ils sont toujours en nombre limité. En effet, pour qu'il y ait fonction, il faut d'abord que le mode de construction soit généralement déterminé. Veut-on, d'ailleurs, que ce mode ne cesse pas de changer brusquement; il faut, pour l'exprimer, une fonction particulière qui remplisse elle-même cette condition : or c'est là précisément ce qui vient d'être démontré impossible.

Ces considérations permettent d'étendre aux fonctions proprement dites la loi de continuité précédemment établie pour tout mode d'existence d'une grandeur quelconque.

Nous n'avons point entrevu jusqu'ici comment il est possible de réaliser une fonction qui subisse instantanément un changement brusque de détermination numérique. Le rôle que les radicaux, les fonctions circulaires et les valeurs limites sont appelés à remplir en certains cas, est très-propre à jeter quelque jour sur cette question délicate.

En ce qui concerne les radicaux, je ferai d'abord observer que, si l'on convenait, avec M. Cauchy, de désigner toujours par la notation $\sqrt{a^2}$ la racine positive, c'est-à-dire $+a$ ou $-a$, suivant que a est positif ou négatif, l'expression $\frac{\sqrt{(x-b)^2}}{x-b}$ deviendrait égale à -1 ou $+1$, selon que x serait moindre ou plus grand que b. Il suffirait donc que cette expression, ou toute autre analogue, entrât dans une fonction pour qu'elle y produisît, en général, un changement brusque de détermination numérique.

L'exemple que je viens de choisir soulève une difficulté. La quantité soumise au radical est variable, et à chacune des valeurs qu'elle reçoit répondent deux racines numériquement égales, mais affectées de signes contraires. De là résultent deux systèmes distincts, susceptibles d'être pris isolément et comprenant, en général, l'un les racines positives, l'autre les racines négatives. Toutefois, comme zéro est une des valeurs affectées par le radical, il y a lieu de se demander si le passage par cette valeur ne doit pas être considéré comme accompagné d'un changement de signe, l'une des suites se substituant à l'autre, et réciproquement.

Quelques détails éclairciront ce point.

Je prends pour accordé qu'on n'est point maître d'établir arbitrairement toute espèce de convention. Celles-là seules me paraissent admissibles, qui sont conformes aux principes fondamentaux du calcul, et je regarde comme un de ces principes celui qui permet de substituer l'une à l'autre deux expressions numériques ayant identiquement même valeur.

Cela posé, je remarque, relativement à la notation exponentielle :

1°. Que, dans le cas où l'exposant est une fraction, deux opérations sont indiquées, l'une par le numérateur, l'autre par le dénominateur;

2°. Que, sans altérer la valeur de l'exposant entier ou fractionnaire, on peut introduire haut et bas, comme facteur, un même nombre quelconque;

3°. Que le résultat à obtenir doit rester indépendant de l'introduction de ce facteur;

4°. Que, pour remplir cette condition, il faut observer la règle suivante :

Dans les deux opérations à faire, commencer toujours par celle qui dépend du dénominateur.

En appliquant cette règle, on trouve

$$\sqrt{(x-b)^2} = (x-b)^{\frac{2}{2}} = \left[\pm\sqrt{(x-b)}\right]^2 = x-b;$$

il y a donc changement de signe à partir de $x=b$, et l'on a constamment

$$\frac{\sqrt{(x-b)^2}}{x-b} = 1.$$

Cette expression cessant, ainsi qu'on le voit, de présenter un changement brusque de détermination numérique, prenons la fonction α liée à la variable indépendante θ par les deux équations simultanées

$$\rho \cos \alpha = 1 + r \cos \theta,$$
$$\rho \sin \alpha = r \sin \theta,$$

et posons en même temps

$$\rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos \theta} = \sqrt{(1-r)^2 + 2r(1 + \cos \theta)},$$

r affectant une valeur quelconque positive et θ variant de zéro à 2π

Tant que la valeur attribuée à r est différente de l'unité, θ varie sans jamais annuler la quantité soumise au radical. Si donc on distingue, ainsi qu'il convient, les deux systèmes de valeurs fournies par le radical, on peut prendre l'un ou l'autre à volonté et s'y tenir exclusivement. Or, en adoptant le système des racines positives, il est aisé de voir que, pour toute valeur de r moindre que l'unité, la fonction α s'annule aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, tandis que, pour toute valeur de r supérieure à l'unité, elle passe en même temps que θ par les mêmes multiples de la circonférence. On ne peut donc franchir la limite $r = 1$ sans que la valeur de α, qui répond à $\theta = 2\pi$, toujours égale à zéro, pour $r < 1$, et à 2π pour $r > 1$, ne change brusquement de grandeur.

Dans la Note que renferme ce Journal (tome XI, page 140), j'ai dit que pour $r=1$ et $\theta=\pi$, il y avait changement brusque, α passant tout à coup de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$. C'est une erreur que je dois rectifier. Lorsque $r = 1$, on a

$$\rho = \sqrt{2(1 + \cos \theta)} = \sqrt{4 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\theta + \pi)} = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\theta + \pi).$$

Il faut donc admettre, en même temps, que les valeurs de ρ, constamment positives pour toutes valeurs de θ moindres que π, sont constamment négatives pour toutes valeurs de θ supérieures à π.

Il suit de là que, tant qu'il s'agit uniquement de la valeur $r = 1$, α reste fonction continue de θ, et que pour $\theta = 2\pi$ l'on n'a point, ainsi que je l'ai supposé, $\alpha = 0$, mais bien $\alpha = \pi$.

Quant aux fonctions que je considérais alors, si l'on observe que, dans l'hypothèse $r = 1$, elles dviennent

$$\varphi(r, \theta) = [2 \sin \tfrac{1}{2}(\theta + \pi)]^m \cos m\alpha,$$
$$\psi(r, \theta) = [2 \sin \tfrac{1}{2}(\theta + \pi)]^m \sin m\alpha,$$

on voit aisément que, pour toute valeur de m entière et positive, elles ne cessent pas d'être continues et de prendre respectivement mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$.

Cette erreur rectifiée, je passe à la considération des valeurs limites. Un exemple suffira.

Soit l'intégrale définie

$$\int_0^h \frac{\sin pz}{z}\, dz.$$

Si l'on suppose que l'indice h croisse indéfiniment, cette intégrale converge vers une limite fixe exprimée par $+\frac{\pi}{2}$ ou par $-\frac{\pi}{2}$, suivant que p est positif ou négatif. Il vient donc, dans cette hypothèse,

$$\lim \int_0^h \frac{\sin (b - x) z}{z}\, dz = \int_0^\infty \frac{\sin (b - x) z}{z}\, dz = \pm \frac{\pi}{2}:$$

le signe $+$ subsistant pour toute valeur de x moindre que b, le signe $-$ pour toute valeur plus grande.

Pour $x = b$, il y a changement brusque du mode de construction. En effet, quelle que soit alors la valeur affectée par h, on n'a plus de limite à considérer, et il vient constamment zéro pour résultat.

On voit, par cet exemple, comment, en introduisant dans une fonction une expression symbolique de la forme $\int_0^\infty \frac{\sin (b - x) z}{z}\, dz$, il est possible d'y réaliser un changement brusque de détermination numérique.

Dans ce qui précède, j'ai eu pour objet principal l'étude des fonctions réelles, et de leur variation considérée dans ses rapports directs avec celle de la variable indépendante. La question que je me suis proposé de résoudre était là tout entière : il ne me reste plus qu'à montrer comment les principes établis ci-dessus s'appliquent d'eux-mêmes et immédiatement au cas général des valeurs imaginaires.

On sait que toute expression imaginaire est réductible au type fondamental

$$P + Q\sqrt{-1},$$

les quantités que P et Q représentent, étant toujours réelles.

On sait également que, pour opérer sur une expression imaginaire, il faut d'abord la réduire à ce type, ou, du moins, l'y supposer réduite.

Soit, par exemple, la fonction $l\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$. Elle n'est que par l'identité

$$l\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = l\,r + \theta\sqrt{-1}.$$

Si donc on fait varier θ, c'est dans le second membre et non dans le premier qu'il faut étudier les modifications subies par la fonction. Il est visible, en effet, que si l'on opérait directement sur le premier membre, il y aurait absurdité et contradiction lorsque, donnant à θ les deux valeurs o et 2π, l'on obtiendrait pour résultat unique,

$$l\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = l\,(r).$$

Considérons une fonction imaginaire ramenée à la forme

$$P + Q.\sqrt{-1};$$

P et Q seront des fonctions réelles de la variable indépendante, subsistant chacune isolément et non réductibles entre elles.

La fonction donnée étant représentée par y, il vient identiquement

$$y = P + Q\sqrt{-1};$$

et ce qu'il faut voir dans y, ce sont deux grandeurs, l'une égale à P, l'autre à Q, toutes deux réunies symboliquement, mais toujours distinctes et toujours séparables.

Il suit évidemment de là que la variation de l'imaginaire y doit être considérée comme s'identifiant avec celle des fonctions P et Q, prises à part et simultanément.

Pour éviter toute méprise, je ferai remarquer que l'on peut avoir, entre certaines limites,

$$y = f(x) + \sqrt{-1}.F(x);$$

puis, entre d'autres limites,

$$y = \varphi(x) + \sqrt{-1}.\psi(x),$$

les fonctions exprimées par P et Q changeant en même temps qu'on passe du premier intervalle au second, et, par conséquent, restant toujours réelles.

J'observerai aussi que l'on doit distinguer le cas où la quantité Q s'évanouit par suite d'une valeur particulière attribuée à la variable indépendante, et celui où elle disparaît d'elle-même pour toute l'étendue d'un certain intervalle. Dans le premier cas, la valeur affectée par y, quoique réelle en apparence [*], ne cesse point d'appartenir au système général des valeurs imaginaires. Dans le second, il y a transition d'un système à l'autre, et, par suite, solution *relative* de continuité.

Une fonction peut être tantôt réelle, tantôt imaginaire, la variable dont elle dépend restant toujours réelle. Néanmoins elle n'affecte ainsi qu'une partie des déterminations compatibles avec son mode de construction. Si donc on veut l'étudier dans toutes les modifications qu'elle comporte, il faut substituer aux valeurs réelles de la variable un système qui, sans exclure aucune de ces valeurs, comprenne en

---

[*] J'appelle l'attention du lecteur sur la fonction $(-a)^x$. La variable x demeurant réelle, on a

$$(-a)^x = a^x.\left[\cos(2k+1)\Pi x + \sqrt{-1}.\sin(2k+1)\Pi x\right],$$

ce qui montre que, contrairement à l'idée qu'on s'en forme, en général, la fonction $(-a)^x$ est essentiellement imaginaire et continue. A chaque valeur du nombre entier k répond un système distinct de déterminations particulières. Il n'y a solution de continuité que lorsqu'on passe d'un système à l'autre.

même temps toutes les valeurs imaginaires possibles [*]. Pour satisfaire à cette condition, x étant la variable, on doit poser

$$x = p + q\sqrt{-1}.$$

Il faut admettre, en outre, que les quantités p et q sont susceptibles d'acquérir directement, et indépendamment l'une de l'autre, toutes les valeurs réelles. Dès lors x devient fonction de ces deux variables, et celles-ci seules peuvent être dites *indépendantes*.

En assujettissant la variable x à franchir successivement, et avec continuité, toutes les valeurs imaginables, on ne détermine aucun des modes particuliers suivant lesquels la variation peut s'accomplir effectivement. Il est permis de rester à ce point de vue général, comme aussi de considérer spécialement l'un ou l'autre de ces modes, le choix à faire dépendant de la nature des questions à résoudre et offrant ainsi le moyen d'établir, entre la variable et la fonction données, l'ordre de relation le plus propre à remplir l'objet qu'on se propose. Dans tous les cas, la continuité n'est possible pour x, qu'autant qu'elle subsiste pour chacune des quantités réelles p et q, prises à part et simultanément. Nous admettrons désormais que cette condition nécessaire est constamment satisfaite.

Si nous reprenons la fonction

$$\mathrm{l}(x) = \mathrm{l}(p + q\sqrt{-1}) = \mathrm{l}\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right),$$

il viendra, sans rien statuer sur le mode de variation des quantités p et q,

$$\mathrm{l}(p + q\sqrt{-1}) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(p^2 + q^2) + \sqrt{-1}.\text{arc tang}\,\frac{q}{p}.$$

Cette identité démontre la continuité absolue de la fonction $\mathrm{l}(x)$, pour tout mode de variation qui exclut la simultanéité des valeurs particulières $p = 0$, $q = 0$.

---

[*] Le système des valeurs imaginaires comprend, comme cas particuliers, toutes les valeurs réelles. Dès qu'on entre dans ce système, il n'y a plus lieu d'établir entre les unes et les autres aucune distinction. Cette remarque est très-importante au point de vue de la continuité.

Cela bien compris, et sans qu'il soit besoin d'insister davantage sur la distinction qu'il importe d'établir entre le système général de tous les modes possibles de variation continue et l'un quelconque d'entre eux, je vais passer à l'examen de celui de ces modes qu'on choisit habituellement pour l'attribuer à la variable imaginaire.

Il semblerait naturel d'opérer directement sur les quantités p et q, en faisant correspondre successivement l'une quelconque des valeurs de p à toutes les valeurs de q, ou réciproquement. Dans l'un et l'autre de ces modes, p et q seraient les variables indépendantes. Il est d'ailleurs visible qu'on y réaliserait pour x toutes les valeurs imaginables. Tel n'est point le procédé généralement suivi. Moins simple en apparence, il offre, en réalité, certains avantages qui le font préférer. Voici en quoi il consiste :

Faisant

$$r\cos\theta = p, \tag{1}$$

$$r\sin\theta = q, \tag{2}$$

on en déduit

$$r = \sqrt{p^2 + q^2},$$

$$\theta = \text{arc tang}\,\frac{q}{p}.$$

Cela posé, l'on remarque que, quelles que soient les valeurs respectives attribuées séparément aux quantités p et q, on peut toujours satisfaire aux équations (1) et (2) en attribuant à r la valeur positive $\sqrt{p^2 + q^2}$, et à l'arc θ, soit la valeur unique qui, dans l'intervalle de 0 à 2π, remplit les conditions voulues, soit cette même valeur, augmentée d'un multiple quelconque de la circonférence.

Au lieu de l'équation

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

il est donc permis d'écrire

$$x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta),$$

et, changeant le mode de variation, de prendre r et θ pour variables indépendantes.

Veut-on n'attribuer à r que des valeurs positives, et restreindre entre les limites 0 et 2π la variation de θ; cela suffit pour réaliser un mode de variation continue où la variable x passe successivement par toutes les valeurs imaginables. Cela ne suffit point, en général, si l'on veut que la fonction acquière elle-même toutes les déterminations qu'elle comporte.

En principe, et par cela seul qu'elles sont indépendantes, les variables r et θ doivent être considérées comme susceptibles de prendre ensemble et séparément toutes les valeurs réelles. On remplit cette condition le plus simplement possible, et sans que la discontinuité puisse jamais survenir dans le mode de variation attribuée à la variable x, lorsque, partant de zéro, l'on fait correspondre successivement l'une quelconque des valeurs de r à toutes les valeurs de θ, ou réciproquement.

Qu'on le remarque bien, il s'agit de deux variations simultanées, subies, l'une par la variable x, l'autre par une fonction de cette variable. On peut, sans doute, étendre ou restreindre à volonté ces variations. Toutefois, il ne faut jamais perdre de vue qu'elles ne restent comparables qu'entre les limites où toutes deux s'accomplissent à la fois.

Dira-t-on que, la variable x étant périodique, il est superflu d'attribuer à θ aucune des valeurs où entre un multiple quelconque de la circonférence; je répète qu'on est parfaitement libre d'admettre telle ou telle limitation du mode suivant lequel r et θ varient. Il faut seulement en tenir compte et se garder de prétendre que les valeurs de la fonction sont toujours épuisées en même temps que celles de la variable imaginaire.

Soit, par exemple, la fonction

$$y = x^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}} (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}} \left(\cos\frac{\theta}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{q}\right),$$

n'est-il pas manifeste que, pour n'exclure aucune des déterminations qu'elle comporte, et, en particulier, pour lui faire exprimer les diverses racines de l'unité, il est indispensable d'assigner, comme limites à la variation de θ, des valeurs prises de plus en plus grandes à mesure que q augmente?

Lorsqu'on entre dans le système des valeurs imaginaires, il est à observer que, sauf les cas d'impossibilité fortuite, il n'est, pour la fonction de même que pour la variable, aucune détermination particulière que toutes deux n'admettent nécessairement. La seule chose qui change d'une fonction à une autre, c'est l'ordre dans lequel ces déterminations se succèdent, ou bien encore le degré de périodicité. Supposons, en effet, que la variable soit prise pour fonction, et réciproquement. La fonction, prise pour variable, reçoit immédiatement toutes les valeurs possibles. D'un autre côté, à chacune de ces valeurs il en correspond une que la variable, devenue fonction, acquiert forcément. Si donc, agissant directement sur la variable, on lui fait prendre successivement toutes les valeurs possibles, il faut que la fonction remplisse elle-même cette condition générale.

De là résulte un principe que j'énoncerai comme il suit :

Toute variation limitée des quantités r et θ, qui ne permet pas de réaliser dans la fonction le système entier des valeurs imaginaires, est, par cela seul, nécessairement incomplète.

Appliquant ce principe à la fonction particulière

$$\mathrm{l}(x) = \mathrm{l}\, r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \mathrm{l}\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \mathrm{l}(r) + \theta\sqrt{-1},$$

on reconnaît immédiatement que la variation de θ ne peut être complète par rapport à la fonction qu'autant qu'elle est illimitée.

L'exemple que je viens de choisir est très-propre à montrer comment, en certains cas, le série des valeurs imaginaires est à peine entamée par la variation continue de la fonction, tandis qu'elle est déjà complétement épuisée par celle de la variable. L'explication de ce fait est toute simple. Il dépend de la multiplicité des valeurs qui dans la fonction répondent à une seule et même détermination de la variable imaginaire. L'inverse est également possible; je citerai, pour exemple, la fonction

$$x^m = r^m(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^m = r^m(\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta).$$

Essentiellement continue pour toute valeur entière et positive de l'exposant m, cette fonction est en même temps périodique, et, par elle, la série des valeurs imaginaires est m fois épuisée lorsqu'elle ne l'est qu'une fois par la variable x.

Je crois en avoir dit assez pour établir nettement en quoi la continuité consiste, *indépendamment de toute convention*, et pour montrer avec évidence que rien en elle n'implique ni n'exclut, par rapport à la fonction, la condition d'une certaine périodicité. Lorsque, conformément aux principes, on opère directement sur les quantités r et θ, en leur conservant le caractère de variables indépendantes, il n'y a pas même l'apparence d'une difficulté. qu'importe, en effet, à la continuité relative de la fonction qu'il y ait ou non périodicité dans la suite des valeurs que la variation continue de θ fait prendre à la variable ainsi qu'à la fonction? qu'importe que cette variation soit plus ou moins limitée, pourvu que, de part et d'autre, on ne considère jamais que l'intervalle où elle s'accomplit?

La variable x demeurant continue, imaginons que, pour toutes valeurs de r comprises entre deux limites déterminées, la fonction varie périodiquement suivant un certain mode, et qu'au delà de ces limites, le mode change brusquement. Il est clair que ces limites ne pourront être franchies sans qu'il y ait, en général, changement brusque de détermination, et, par conséquent, solution de continuité. Si donc une fonction a d'abord un certain degré de périodicité, puis qu'elle le perde brusquement, ou que, ne l'ayant pas, elle l'acquière tout à coup, la discontinuité surgit en même temps. Cette remarque explique peut-être l'erreur où l'on est tombé en faisant dépendre la continuité de la périodicité, et confondant ainsi deux caractères essentiellement distincts.

Avant de terminer ce sujet, je crois utile d'ajouter quelques mots sur la construction géométrique des valeurs imaginaires et sur les avantages spéciaux que ce mode de représentation peut offrir dans la question qui nous occupe.

Soient t et u deux coordonnées rectangulaires. Si l'on pose, en général,

$$P + Q\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1},$$

toute valeur de l'imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$ fixe la position d'un point; et réciproquement, tout point du plan des coordonnées répond à l'une des valeurs de cette imaginaire.

On voit ainsi que toute expression imaginaire, considérée dans l'ensemble des déterminations qu'elle comporte, et abstraction faite des solutions de continuité qu'elle peut offrir accidentellement, dans les cas d'impossibilité fortuite, est exactement représentée par la suite infinie des points que comprend une surface plane.

Cherchons quel est, par rapport à la génération de cette surface, le sens exprimé par les divers modes de variation continue, sur lesquels notre attention s'est portée plus particulièrement.

Soit d'abord

$$x = p + q\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1};$$

si l'on fait correspondre à chaque valeur de p toutes les valeurs de q, on a pour chaque valeur de p une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses, et c'est par le déplacement de cette droite, transportée parallèlement à elle-même, que la génération du plan s'effectue. Lorsqu'on procède inversement, c'est-à-dire en faisant correspondre à une valeur de q toutes les valeurs de p, puis en donnant successivement à q toutes les valeurs possibles, la génération a lieu par le déplacement d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Soit ensuite

$$x = r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta = t + u\sqrt{-1}.$$

De là résulte

$$t = r\cos\theta, \quad u = r\sin\theta,$$

et, suivant qu'on élimine r ou θ,

$$u = t.\text{tang}\,\theta,$$

ou bien

$$u^2 + t^2 = r^2.$$

Dans le premier cas, chaque valeur de θ, se combinant avec toutes les valeurs de r, fournit une droite qui passe par l'origine et fait avec l'axe des abscisses un angle égal à θ. Lorsque θ varie, cette droite tourne, et c'est par sa rotation autour de l'origine que le plan se trouve engendré.

Dans le second cas, il y a combinaison directe de chaque valeur de r avec toutes les valeurs de θ. Chacune de ces combinaisons donne une circonférence de cercle ayant son centre à l'origine, et la quantité r pour rayon. r variant à son tour, la circonférence se développe progressivement, et la génération du plan s'effectue.

Considérons maintenant quelques fonctions particulières, et, pour abréger, adoptons exclusivement, en ce qui concerne la variable x, le mode de variation continue qui se traduit par la rotation d'une droite tournant autour de l'origine.

Soit, en premier lieu, la fonction x^m; on a

$$x^m = (r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta)^m = r^m(\cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta).$$

C'est donc aussi par la rotation d'une droite tournant autour de l'origine que se traduit la variation relative de la fonction x^m; dans ce mouvement, la vitesse change avec l'exposant m. Soit encore la fonction $1x$; il vient

$$1x = 1(r) + \theta\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1}.$$

Ici c'est par le déplacement d'une droite parallèle à l'axe des abscisses que se réalise dans la génération du plan le système complet des valeurs imaginaires. Lorsqu'on restreint la variation de θ entre les limites 0 et 2π, les positions extrêmes de la génératrice sont données par les équations

$$u = 0, \quad u = 2\pi,$$

et la surface engendrée se réduit à la bande que comprennent entre elles ces positions extrêmes.

Ces exemples suffisent; par eux on saisit clairement ce qu'exprime tout mode de variation continue susceptible d'être attribué à la variable imaginaire. Ils mettent, d'ailleurs, en évidence la relation qui s'établit entre l'un quelconque de ces modes et celui qui lui correspond dans la variation simultanée de la fonction. De part et d'autre il y a d'abord à considérer le mouvement d'un point, et, par suite, la génération de deux lignes, répondant l'une à la variable, l'autre à la fonction; puis vient, avec ou sans changement de forme, le déplacement de ces lignes : de là résultent deux aires planes, qui s'engendrent simultanément et se correspondent de la même manière que leurs génératrices respectives. Par hypothèse, l'un de ces deux systèmes est essentiellement continu, c'est-à-dire que dans le mouvement du point décrivant une position quelconque de la génératrice, comme dans celui de la génératrice décrivant une portion d'aire quelconque, il n'y a jamais ni lacune ni saut brusque. Tant que l'autre système remplit les mêmes conditions, il y a continuité relative.

En résumé, soit une fonction quelconque réelle ou imaginaire, la variable peut être assujettie à varier continûment entre certaines limites. Quelle que soit, en ce cas, la détermination particulière du mode de variation, il reste caractérisé par l'absence de tout changement brusque, et la fonction varie, en général, de la même manière. Aussi longtemps que cette condition, supposée remplie par la variable, l'est également par la fonction, on dit de celle-ci qu'elle est et demeure fonction continue de la variable que l'on considère.

D'après tout ce qui précède, je crois être en droit de poser la conclusion suivante :

Dans le théorème de M. Cauchy, relatif au développement des fonctions en série, la condition de continuité n'est pas la seule qu'on doive mentionner. Elle est insuffisante, vu qu'elle n'implique, en aucune manière, une certaine périodicité de la fonction, condition essentiellement distincte de la première et non moins nécessaire.

§ II.

Application de la théorie qui précède à la solution de plusieurs difficultés.

L'énoncé que j'ai reproduit dans la première partie de cette Note (*voir* page 306), se termine par ces mots : *hors de là, la série devient divergente.*

M. Cauchy n'admet pas que la discontinuité de la fonction entraîne toujours la divergence du développement. Loin de là, il fait la remarque suivante :

« J'ai précisément émis l'opinion contraire à celle qu'énonce ici
» M. Lamarle, dans un précédent Mémoire où je me suis spécialement
» occupé *des fonctions dont les développements restent convergents,*
» *tandis qu'elles deviennent discontinues.* M. Lamarle lui-même ne

» pourra révoquer en doute l'existence de fonctions qui présentent ce
» double caractère. Il me suffira de prendre pour exemple la fonc-
» tion même qu'il a choisie comme propre à montrer une application
» du théorème général, savoir :

$$(1+x)^m,$$

» et de considérer spécialement le cas où, le module r de x étant
» inférieur à l'unité, l'exposant m devient fractionnaire, et de la
» forme $\frac{p}{q}$, p, q étant des nombres entiers. »

Observons d'abord que je n'ai point entendu parler des fonctions dans lesquelles il surviendrait tout à coup un changement brusque du mode de construction. Si l'on avait, par exemple,

$$y = (1+x)^m \int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{4} - x\right)z + \sin\left(\frac{1}{3} - x\right)z}{z}\, dz,$$

il est clair que la série resterait convergente pour toute valeur de x inférieure à l'unité; et cependant il y aurait changement brusque pour les valeurs particulières $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{3}$.

La restriction que je viens d'indiquer résulte de la nature même de la question. On est naturellement conduit à la faire, et elle peut rester sous-entendue sans crainte d'aucune méprise. Aussi n'est-ce pas sur ce point que porte l'objection qui m'est opposée.

Avant d'aborder la discussion de chacun des exemples produits par M. Cauchy à l'appui de son opinion, il convient que je rappelle en quelques mots la marche que j'ai suivie pour fixer d'une manière précise le sens des opérations à effectuer dans les diverses applications du théorème qui nous occupe.

Soit $f(x)$ une fonction quelconque, supposée réelle; si l'on y remplace x par $re^{\theta\sqrt{-1}}$, il vient

$$(1)\qquad f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \psi(r, \theta)\sqrt{-1},$$

φ et ψ étant deux fonctions réelles.

Imaginons maintenant que, pour toute valeur de x inférieure au nombre R, $f(x)$ soit développable en série convergente d'après la formule de Maclaurin. On aura

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots, \tag{2}$$

et, par suite,

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \left\{ \begin{array}{c} a + br\cos\theta + cr^2\cos 2\theta + \ldots \\ + \sqrt{-1}\,(br\sin\theta + cr^2\sin 2\theta + \ldots) \end{array} \right\}.$$

De là résulte

$$\varphi(r, \theta) = a + br\cos\theta + cr^2\cos 2\theta + \ldots, \tag{3}$$

$$\psi(r, \theta) = br\sin\theta + cr^2\sin 2\theta + \ldots. \tag{4}$$

Tant que ces équations subsistent, c'est-à-dire tant que le module r reste compris entre $+$ R et $-$ R, les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ se trouvent assujetties à remplir plusieurs conditions importantes :

1°. Pour toute valeur de r, elles varient continûment avec θ;

2°. Pour toute valeur de θ, elles varient continûment avec r;

3°. Elles affectent une certaine périodicité, en vertu de laquelle on a constamment

$$\varphi(r, \theta) = \varphi(r, \theta + 2k\pi), \qquad \psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + 2k\pi),$$

et, en outre,

$$\varphi(r, \theta) = \varphi[-r, \theta + (2k+1)\pi], \quad \psi(r, \theta) = \psi[-r, \theta + (2k+1)\pi],$$

$2k\pi$ représentant un multiple quelconque de la circonférence.

Bien que ces conditions, prises avec toute l'extension qu'elles comportent, doivent être considérées comme une conséquence nécessaire de la possibilité du développement, on peut néanmoins les restreindre sans qu'elles cessent pour cela d'être suffisantes. C'est ainsi qu'en les réduisant au plus petit nombre possible, on est conduit à faire abstraction des valeurs négatives du module, à limiter la variation de l'argument θ par les valeurs extrêmes o et 2π, enfin à exprimer la condition de périodicité par les équations particulières

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi), \quad \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi). \tag{5}$$

Tel est le sens que j'ai attaché à l'énoncé suivant :

Pour qu'une fonction soit développable en série convergente, d'après la formule de Maclaurin, il faut deux conditions distinctes, à la fois nécessaires et suffisantes.

La première, c'est que la continuité subsiste à partir de $r = 0$, pour toute valeur du module égale ou inférieure à celle que l'on considère;

La seconde, c'est que, dans cet intervalle, chacune des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ reprenne, pour $\theta = 2\pi$, la valeur qu'elle prend pour $\theta = 0$.

Quant à la marche à suivre dans les diverses applications, elle est toute tracée par les considérations qui précèdent. On commence par effectuer la séparation indiquée par l'équation (1); puis, prenant à part les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$, on examine si, pour toute valeur de r, moindre qu'un certain nombre R, elles satisfont à la condition des limites exprimée par les équations (5). En supposant cette condition remplie, il faut s'assurer, en outre, que la continuité subsiste à partir de $r = 0$, c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ ne subissent aucun changement brusque :

1°. Lorsque, le module r affectant une valeur quelconque moindre que R, l'argument θ varie avec continuité entre les limites 0 et 2π;

2°. Lorsque, θ demeurant quelconque et constant, r varie continûment à partir de 0 jusqu'à la limite R.

Cela posé, cherchons si les fonctions choisies pour exemple par M. Cauchy présentent effectivement le double caractère qui leur est attribué, c'est-à-dire s'il est vrai qu'elles deviennent discontinues, tandis que leurs développements demeurent convergents.

Soit d'abord la fonction

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}} = (1 + r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta)^{\frac{p}{q}} = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\, \psi(r, \theta).$$

Pour déterminer chacune des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$, je fais

$$1 + r\cos\theta = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\theta = \rho\sin\alpha.$$

De là résulte

$$\varphi(r, \theta) = \rho^{\frac{p}{q}}\cos\frac{p}{q}\alpha, \quad \psi(r, \theta) = \rho^{\frac{p}{q}}\sin\frac{p}{q}\alpha.$$

Il vient, d'ailleurs, en adoptant pour ρ la racine positive fournie par le radical,

$$\rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\theta}.$$

Par hypothèse, r est plus petit que l'unité. On a donc constamment

$$\cos\alpha > 0.$$

Quant à $\sin\alpha$, il change de signe et s'annule avec $\sin\theta$.

Il suit de là que, tandis que θ varie entre 0 et π, l'angle α part de 0, croît continûment jusqu'à une certaine limite moindre que $\frac{\pi}{2}$, puis décroît de manière à redevenir nul pour $\theta = \pi$. Au delà, c'est-à-dire lorsque θ passe de la valeur π à la valeur 2π, la variation de α se reproduit symétriquement, avec cette seule différence que, de positif qu'il était d'abord, l'angle α devient négatif. En d'autres termes, si l'on désigne par β et β' deux valeurs de α correspondantes, l'une à θ, l'autre à $2\pi - \theta$, il est visible qu'on a généralement

$$\beta' = -\beta.$$

Les valeurs de α qui répondent à $\theta = 0$ et à $\theta = 2\pi$, se réduisant à une seule et même valeur, zéro, la condition des limites est évidemment satisfaite. Il en est de même de la condition de continuité, les variables ρ, $\cos\frac{p}{q}\alpha$, $\sin\frac{p}{q}\alpha$ ne subissant aucun changement brusque. On voit donc que si, pour toute valeur du module moindre que l'unité, la fonction

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}}$$

est développable en série convergente d'après la formule de Maclaurin, elle est en même temps continue pour tout cet intervalle.

D'accord avec moi sur les principales données de cette question, M. Cauchy y introduit une convention arbitraire, et, par elle, il crée une discontinuité factice. La convention dont je parle consiste à n'admettre pour l'angle α *que des valeurs positives, comprises entre les limites* 0 *et* 2π. Dans ce système, l'angle α prend tout à coup deux valeurs, lorsqu'on fait $\theta = \pi$: l'une est 0, l'autre 2π. La première subsiste comme limite de la suite qui commence à $\theta = 0$ et finit à $\theta = \pi$; la seconde, comme origine des valeurs qui se succèdent à partir de $\theta = \pi$ jusqu'à $\theta = 2\pi$. De là vient la discontinuité. Elle dépend, ainsi qu'on le voit, d'une condition particulière, arbitrairement introduite dans un mode de variation qui déjà se trouve complétement déterminé. L'angle α n'est point une variable dont on dispose, c'est une fonction de la variable indépendante θ. Dira-t-on que, θ variant entre les limites 0 et 2π, la fonction α doit être assujettie à varier entre ces mêmes limites? Une pareille prétention serait insoutenable. Comment, d'ailleurs, justifier la bizarre anomalie que présenterait la fonction α, si, n'affectant jamais qu'une valeur unique, elle en acquérait deux pour $\theta = \pi$?

Ce premier point étant éclairci, passons aux exemples cités par M. Cauchy, dans le Mémoire qu'il a publié sur les fonctions dont les développements restent convergents, tandis qu'elles deviennent discontinues (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XIX, page 142).

Ces exemples sont au nombre de deux; je les examinerai successivement.

Considérons d'abord la fonction

$$y = \left[1 - x^2 + x(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[1 - x^2 - x(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

M. Cauchy fait observer que, *pour des valeurs réelles* de la variable x, la fonction y cesse d'être continue à partir de $x = 1$. Il démontre, d'ailleurs, que le développement de cette fonction, ordonné suivant les puissances ascendantes de x, ne cesse pas d'être convergent, tant que l'on a

$$x^2 < 2.$$

Posons

$$1 - x^2 = \cos\alpha, \quad x\sqrt{2 - x^2} = \sin\alpha.$$

Nous aurons, en substituant,

$$y = 2\cos\frac{\alpha}{3} = 2\cos\frac{\operatorname{arc}\cos(1 - x^2)}{3}.$$

La forme sous laquelle je viens d'écrire la fonction y montre évidemment que, *pour des valeurs réelles* de la variable x, cette fonction ne cesse pas d'être continue, à partir de $x = 1$, comme le suppose

M. Cauchy, mais seulement à partir de $x^2 = 2$. Il n'y a donc rien d'extraordinaire à ce que son développement demeure convergent jusqu'à cette dernière limite. Ici encore la discontinuité prétendue n'existe que comme résultat d'une convention purement arbitraire. Cette convention, reproduite dans l'ouvrage déjà cité de M. l'abbé Moigno, consiste en ce que le changement de signe de la partie réelle $1 - x^2$ est regardé comme impliquant une solution de continuité.

Prenant, en second lieu, la fonction

$$y = \sqrt{2 - 3x + x^2} = \sqrt{(1 - x)(2 - x)},$$

et posant

$$x = re^{\theta\sqrt{-1}},$$

d'où résulte

$$y = \sqrt{2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta - (3r\sin\theta - r^2\sin 2\theta)\sqrt{-1}},$$

M. Cauchy remarque que la partie réelle de l'expression placée sous le radical, savoir,

$$2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta = 2\left(\frac{3}{4} - r\cos\theta\right)^2 + \frac{7}{8} - r^2,$$

s'évanouit quand on pose

$$r = \sqrt{\frac{7}{8}}, \quad \cos\theta = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{r},$$

et, par conséquent, devient négative pour certaines valeurs de θ, alors que r est compris entre $\sqrt{\frac{7}{8}}$ et 1. Il conclut de là que la fonction y, qui reste continue par rapport à r et θ pour toute valeur du module inférieure à $\sqrt{\frac{7}{8}}$, devient discontinue à partir de cette limite.

D'un autre côté, M. Cauchy constate que si l'on développe la fonction $y = \sqrt{1 - x}\sqrt{2 - x}$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, la série ainsi obtenue ne cesse pas d'être convergente pour des valeurs de x supérieures à $\sqrt{\frac{7}{8}}$, mais inférieures à l'unité. Après avoir produit ce dernier exemple d'une fonction dont le développement reste convergent, tandis qu'elle devient discontinue, M. Cauchy ajoute :

« Au reste, il est important d'observer que les deux expressions

$$(2 - 3x + x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1 - x)^{\frac{1}{2}}(2 - x)^{\frac{1}{2}},$$

» sont deux formes différentes d'une seule et même fonction, *tant* » *que le module de x reste inférieur à la limite* $\sqrt{\frac{7}{8}}$. Mais quand le » module de x devient supérieur à cette limite, les deux expressions » dont il s'agit *représentent deux fonctions distinctes*, qui ne sont » plus identiquement égales entre elles pour toutes les valeurs réelles » de l'angle θ. De ces deux fonctions, la seconde seule reste continue » pour un module de x supérieur à $\sqrt{\frac{7}{8}}$, mais inférieur à l'unité, et » représente constamment dans cet intervalle la somme de la série » qu'on avait obtenue en développant la première fonction. »

En reproduisant ce passage, où les règles fondamentales du calcul semblent être en défaut, j'ai voulu montrer le danger des conventions sur lesquelles repose le paradoxe énoncé par M. Cauchy. Comment concevoir, en effet, qu'il ne soit pas permis d'écrire *identiquement*

$$\sqrt{2 - 3x + x^2} = \sqrt{1 - x}\sqrt{2 - x}.$$

La difficulté, qui se présente ici, disparaît d'elle-même, lorsque, laissant de côté toute convention arbitraire, on procède suivant la marche que nous avons tracée.

L'expression à transformer étant

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta - (3r\sin\theta - r^2\sin 2\theta)\sqrt{-1}} \\ &= \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}.\psi(r, \theta), \end{aligned}$$

je pose

$$2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta = \rho\cos\alpha, \quad 3r\sin\theta - r^2\sin 2\theta = \rho\sin\alpha.$$

De là résulte

$$\varphi(r, \theta) = \rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \psi(r, \theta) = -\rho^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

On a, d'ailleurs, en adoptant la valeur positive fournie par le radical,

$$\rho = \sqrt{(1 - 2r\cos\theta + r^2)(4 - 4r\cos\theta + r^2)}.$$

Si l'on remarque que la valeur de $\rho \sin\alpha$ peut se mettre sous la forme

$$\rho \sin\alpha = r\sin\theta\,(3 - 2r\cos\theta),$$

et que ρ n'est jamais nul, si ce n'est pour les valeurs particulières $r = 1$, $r = 2$, combinées avec $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$, on voit immédiatement que, pour toute valeur de r moindre que $\frac{3}{2}$ et autre que l'unité, $\sin\alpha$ change de signe et s'annule avec $\sin\theta$.

Cela posé, soit d'abord

$$r < \sqrt{\frac{7}{8}}:$$

comme on a

$$\rho\cos\alpha = 2\left(\frac{3}{4} - r\cos\theta\right)^2 + \frac{7}{8} - r^2,$$

il est visible que $\cos\alpha$ reste constamment positif.

Il suit de là que, tandis que θ varie entre 0 et π, l'angle α part de zéro, croît continûment jusqu'à une certaine limite moindre que $\frac{\pi}{2}$, puis décroît de manière à redevenir nul pour $\theta = \pi$. Au delà, c'est-à-dire lorsque θ passe de la valeur π à la valeur 2π, la variation de α se reproduit symétriquement, avec cette seule différence que, de positif qu'il était d'abord, l'angle α devient négatif.

La condition des limites est évidemment satisfaite. On voit également que la continuité n'est pas interrompue.

Soit ensuite

$$r = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

Rien ne change, si ce n'est que la variation de α s'étend, sans la dépasser, jusqu'à la limite $\frac{\pi}{2}$.

Soit maintenant

$$r > \sqrt{\frac{7}{8}} < 1.$$

En écrivant la valeur de $\rho \cos\alpha$, sous la forme suivante :

$$\rho \cos\alpha = 2\left(r\cos\theta - \frac{3+\sqrt{8r^2-7}}{4}\right)\left(r\cos\theta - \frac{3-\sqrt{8r^2-7}}{4}\right),$$

il est aisé de voir que rien ne change encore, si ce n'est que la valeur $\frac{\pi}{2}$ est dépassée et qu'elle répond à une valeur de θ qui se rapproche indéfiniment de zéro, à mesure que le module r converge vers l'unité.

En ce cas, α part de zéro, croît jusqu'à une certaine limite moindre que π, puis décroît et redevient nul. Cette variation, toujours continue, s'accomplit en même temps que θ croît de 0 à π. Au delà, c'est-à-dire quand θ croît à partir de π jusqu'à 2π, la variation de α se reproduit symétriquement, avec cette seule différence que, de positif qu'il était d'abord, l'angle α devient négatif.

Cette discussion montre que la condition des limites ne cesse pas d'être satisfaite et qu'il y a toujours continuité.

Soit encore

$$r = 1;$$

il vient alors

$$\cos\alpha = \frac{1-2\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{3-2\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\cos\frac{\theta}{2}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\rho = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{5-4\cos\theta}.$$

Le seul changement qui s'introduise, relativement au mode de variation qui précède, consiste en ce que l'angle α ne part plus de zéro, mais bien de $\frac{\pi}{2}$. Cette circonstance empêcherait que la condition des limites fût remplie, si ρ ne s'annulait point aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Quant à la continuité, il est visible qu'elle subsiste sans interruption. Il est vrai que, pour toute valeur de r moindre que l'unité, l'angle α part de zéro, tandis que pour $r = 1$, sa valeur initiale est $\frac{\pi}{2}$. Toutefois, il n'y a pas de changement brusque dans les fonctions $\varphi(r, \theta)$,

$\psi(r, \theta)$. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, tandis que le module converge vers l'unité, les valeurs de ρ et de α, qui répondent à des valeurs de θ très-voisines des limites o et 2π, se rapprochent indéfiniment de celles qui, dans l'hypothèse $r = 1$, répondent à ces limites.

Supposons, en dernier lieu, que la valeur du module soit comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$.

En ce cas, les valeurs extrêmes de l'angle α sont respectivement $+\pi$ et $-\pi$. D'un autre côté, ρ ne s'annule point. La condition des limites n'est donc plus satisfaite pour la fonction $\psi(r, \theta)$, et, par conséquent, la série cesse d'être convergente. Néanmoins, et c'est là une circonstance qu'il importe de signaler, il suffit que la valeur attribuée à ρ reste constamment positive, pour que la continuité ne soit pas interrompue.

On voit, par ce qui précède, que, contrairement à l'opinion de M. Cauchy, et eu égard à ce qu'il n'est pas permis de considérer le changement de signe de la partie réelle

$$2 - 3r\cos\theta + r^2\cos 2\theta,$$

comme impliquant, par lui seul, une solution de continuité, la fonction

$$y = \sqrt{2 - 3x + x^2}$$

est constamment continue, non-seulement pour des valeurs du module inférieures à l'unité, mais, en outre, pour des valeurs plus grandes, les quantités r et ρ conservant, par hypothèse, un seul et même signe.

On observera qu'en détruisant l'objection qui m'était opposée, j'ai fait aussi disparaître le paradoxe énoncé dans le passage reproduit ci-dessus (page 337).

Dans la Note à laquelle je réponds, M. Cauchy exprime l'opinion suivante :

« La nature des conventions a une influence marquée sur le carac-
» tère des fonctions considérées comme continues ; de sorte qu'en
» passant d'un système de convention à un autre, on peut rendre
» discontinues des fonctions qui étaient continues, et réciproquement.

» D'après cette remarque, il n'y pas lieu de s'étonner que les dévelop-
» pements de certaines fonctions restent convergents, dans le cas où
» ces fonctions deviennent discontinues, puisqu'en modifiant les con-
» ventions admises, on peut quelquefois enlever à une fonction dont
» le développement était convergent le caractère de continuité. Pour
» rendre plus souvent applicable le théorème sur la convergence des
» développements, il est évidemment utile d'adopter les conventions
» qui conservent ce caractère le plus longtemps possible aux fonctions
» employées dans le calcul. »

Selon moi, le caractère d'où dépend la continuité est un caractère absolu qu'on n'est point maître de modifier, et qui se conserve intact dans tout système de convention susceptible d'être introduit dans le calcul, sans porter atteinte aux principes fondamentaux. Quoi qu'il en soit, M. Cauchy reconnaîtra, sans doute, qu'en adoptant ma maniere de voir, l'on restitue aux fonctions qu'il a choisies pour exemple la continuité dont elles se trouvent dépouillées dans le système de conventions qui lui appartient. Sous ce rapport, et alors même qu'on serait libre d'opérer autrement, il y aurait donc avantage à se conformer aux principes que j'ai développés ci-dessus. Ce n'est point en appliquant ces principes, mais pour s'en être écarté, que M. Cauchy a introduit la discontinuité là où, en réalité, elle n'existe point.

Avant de terminer cet article, j'ajouterai quelques mots sur la condition de continuité considérée par rapport aux fonctions dérivées.

Lorsque j'ai dit de cette condition qu'elle pouvait être omise, j'ai entendu exprimer qu'elle devait l'être nécessairement. M. Cauchy fait observer *qu'on pourrait à la rigueur se passer de la considération des fonctions dérivées,* mais qu'il vaut mieux ne pas l'abandonner entièrement, attendu qu'elle sert, en certains cas, à déterminer le module des séries.

On sait que les limites entre lesquelles la série de Maclaurin est convergente sont les mêmes pour la fonction que pour l'une quelconque de ses dérivées, et réciproquement. En faisant cette remarque dans mon premier travail sur le théorème de M. Cauchy, j'ai été conduit à observer que, bien que la considération de la dérivée fût superflue et indirecte, il pouvait être quelquefois plus simple d'y recourir. Dans ce cas, la dérivée se substitue à la fonction, et celle-ci cesse d'exiger aucune vérification directe. En général, le contraire a lieu, c'est-à-dire qu'on opère sur la fonction, sans avoir à s'inquiéter de la dérivée. Les calculs à faire n'étant pas toujours aussi simples qu'il serait désirable, il est bon que l'énoncé du théorème ne laisse aucun doute sur l'inutilité d'une double opération où la fonction et sa dérivée devraient toutes deux intervenir. Il convient, d'ailleurs, au point de vue de la rigueur mathématique, qu'une condition, démontrée surabondante, ne figure point au nombre de celles qui sont réputées nécessaires.

Une observation du même genre m'a été suggérée par la lecture d'un Mémoire [*] cité dans la Note à laquelle je réponds. Après avoir posé l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

M. Cauchy ajoute :

« Cette équation suppose que la fonction $f(x)$ reste finie et continue » par rapport à la variable x, depuis la limite $x = x_0$ jusqu'à la » limite $x = X$. »

Je ferai remarquer, comme je l'ai dit ailleurs, que l'équation dont il s'agit suppose, en général, non pas que la dérivée $f(x)$, mais bien que la fonction $F(x)$, demeure continue dans l'intervalle que l'on considère.

---

[*] Voir *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, tome XVIII, page 1073.