

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Sur quelques formules du calcul intégral

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 12 (1847), p. 231-240.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12_231_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR QUELQUES FORMULES DU CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. A. CAYLEY.

Soit $x + y\sqrt{-1}$ ou $x + iy$ une quantité imaginaire quelconque; faisons

$$(1) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctang \frac{y}{x},$$

ρ étant une quantité positive, et θ un arc compris entre les limites $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Cela posé, écrivons

$$(2) \quad \begin{cases} (x + iy)^m = \rho^m e^{im\theta} & (x \text{ positif}), \\ (x + iy)^m = \rho^m e^{im(\theta \pm \pi)} & (x \text{ négatif}); \end{cases}$$

(Dans la seconde de ces formules, il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que y est positif ou négatif.) Au cas de x positif, la valeur du second membre sera ce que M. Cauchy a appelé *valeur principale* de $(x + iy)^m$. Au cas de x négatif, on peut aussi, à ce qu'il me semble, nommer cette valeur *valeur principale*. Cela paraît contraire à la théorie de M. Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, tome 1. page 2); mais la démonstration que l'on y trouve de l'impossibilité d'une valeur principale pour x négatif ne s'applique qu'au cas où l'on suppose que le signe $\pm$ est toujours le même sans avoir égard au signe de y . Seulement, selon nos définitions, il importe de remarquer qu'il n'y a pas de valeur principale pour x négatif, au cas particulier où $y=0$; ou plutôt dans ce cas, et dans ce cas seulement, la valeur principale devient indéterminée.

Soit, en particulier, $x=0$; les deux formules conduisent au même résultat, savoir

$$(3) \quad (iy)^m = (\pm y)^m e^{\pm \frac{m\pi i}{2}},$$

le signe comme auparavant. Car en considérant x comme infiniment petit positif, on obtient

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2},$$

et, en considérant x comme infiniment petit négatif,

$$\theta = \mp \frac{\pi}{2},$$

et de là

$$\theta \pm \pi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi cette formule est toujours vraie, sans qu'il soit nécessaire de considérer iy comme limite de $x + iy$, x positif ou x négatif.

Remarquons encore que cette fonction $(iy)^m$ reste continue quand y passe par zéro, ce qui a lieu aussi pour $(x + iy)^m$, x positif, mais non pas pour $(x + iy)^m$, x négatif.

Les mêmes remarques s'appliquent aux valeurs principales des logarithmes, lesquelles doivent se définir d'une manière analogue par les équations

$$(4) \quad \begin{cases} \log(x + iy) = \log \rho + i\theta & (x \text{ positif}), \\ \log(x + iy) = \log \rho + i(\theta \pm \pi) & (x \text{ négatif}), \end{cases}$$

le signe ambigu, comme auparavant.

On démontre sans difficulté que ces valeurs principales satisfont en tout cas aux équations

$$(5) \quad \begin{cases} (x + iy)^m (x' + iy')^m = [(x + iy)(x' + iy')]^m, \\ \log(x + iy) \log(x' + iy') = \log [(x + iy)(x' + iy')]. \end{cases}$$

Seulement ces équations deviennent indéterminées au cas où l'une des quantités x , x' , $xx' - yy'$ étant négative, la quantité correspondante y , y' , $xy' + x'y$ s'évanouit.

Au moyen de cette définition de la valeur principale d'un logarithme, on obtient

$$(6) \quad \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dx}{A + Bx} = \log \left(\frac{A + B\alpha}{A + B\beta} \right),$$

où α , β sont réels, et A , B sont assujettis à la seule condition qu'au

cas où α, β seraient de signes contraires, la partie imaginaire de $\frac{A}{B}$ ne s'évanouisse pas. En effet, dans ce cas, l'intégrale et la valeur principale du logarithme deviennent toutes les deux indéterminées. Sans doute il y a une valeur que l'on peut appeler *principale* de l'intégrale, mais cette valeur n'est égale à *aucun* des logarithmes de $\frac{A+B\alpha}{A+B\beta}$, et les notions des valeurs principales d'une intégrale et d'un logarithme n'ont pas de rapport ensemble. Ce résultat s'accorde avec celui que j'ai trouvé dans mon Mémoire *sur les fonctions doublement périodiques*.

Je passe à quelques autres applications de ces principes, qui ont rapport à la théorie des fonctions Γ . Soit d'abord r un nombre positif plus petit que l'unité, et écrivons

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^{r-1} e^{ix} dx;$$

on obtient

$$U = \int_0^{\infty} (ix)^{r-1} e^{ix} dx + \int_0^{\infty} (-ix)^{r-1} e^{-ix} dx,$$

ou enfin, puisque x est positif dans ces deux intégrales,

$$U = e^{(r-1)\frac{\pi i}{2}} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{ix} dx + e^{-(r-1)\frac{\pi i}{2}} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-ix} dx;$$

au moyen de la formule connue,

$$\int_0^{\infty} x^{r-1} e^{\pm ix} dx = e^{\pm \frac{r\pi i}{2}} \Gamma r,$$

on en conclut

$$U = 2 \cos\left(r - \frac{1}{2}\right) \pi \cdot \Gamma r = 2 \sin r\pi \cdot \Gamma r,$$

savoir

$$\sin r\pi \cdot \Gamma r = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^{r-1} e^{ix} dx.$$

On obtiendrait de même

$$0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^{r-1} e^{ix} dx.$$

Au premier coup d'œil, ces équations pourraient paraître en contradiction l'une avec l'autre: mais cela n'est pas ainsi, parce qu'il n'est pas vrai que $(-ix)^{r-1}$ soit égal à $(-1)^{r-1} (ix)^{r-1}$, $(-1)^{r-1}$ étant facteur invariable; mais au contraire $(-ix)^{r-1} = e^{\mp(r-1)\pi i} (ix)^{r-1}$, selon que x est positif ou négatif.

Dans la première de ces équations, on peut remplacer ix par $c + ix$, et dans la seconde, $-ix$ par $c - ix$, c étant positif; mais cela n'est pas permis pour c négatif, à cause de la discontinuité de valeur de $(c + ix)^{r-1}$ ou $(c - ix)^{r-1}$ dans ce cas, quand x passe par zéro. En multipliant la première équation par e^{-c} , et différenciant un nombre quelconque de fois, en admettant, pour les valeurs négatives de r , l'équation

$$\Gamma(r+1) = r\Gamma r,$$

la formule ne change pas de forme, et l'on obtient

$$(7) \quad \sin r\pi \Gamma r e^{-c} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (c + ix)^{r-1} e^{ix} dx;$$

et de même, au moyen de la seconde équation,

$$(8) \quad 0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (c - ix)^{r-1} e^{ix} dx,$$

dans lesquelles formules c est positif, et r est un nombre quelconque entre 1, $-\infty$, sans exclure la limite supérieure; seulement, pour $r=0$, le facteur $\sin r\pi \Gamma r$ se réduit à π . Au cas où r est plus grand que zéro, on peut, si l'on veut, écrire aussi $c=0$. Dans tous les cas, on peut remplacer $\sin r\pi \Gamma r$ par $\frac{\pi}{\Gamma(1-r)}$. Il importe de remarquer que ces mêmes intégrales sont absolument inexprimables au cas où c est négatif: en effet, en écrivant $-c$ au lieu de c (c positif), on obtiendrait

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (-c + ix)^{r-1} e^{ix} dx \\ &= e^{(r-1)\pi i} \int_0^{\infty} (c - ix)^{r-1} e^{ix} dx + e^{-(r-1)\pi i} \int_{-\infty}^0 (c - ix)^{r-1} e^{ix} dx. \end{aligned}$$

Mais, par la seconde des équations dont il s'agit,

$$0 = \int_0^{\infty} (c - ix)^{r-1} e^{ix} dx + \int_{-\infty}^0 (c - ix)^{r-1} e^{ix} dx;$$

donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-c + ix)^{r-1} e^{ix} dx = -2i \sin r\pi \int_0^{\infty} (c - ix)^{r-1} e^{ix} dx.$$

Or l'intégrale au second membre ne peut pas s'exprimer par les transcendentes connues, à moins que r ne soit entier. Écrivons encore, c étant toujours positif,

$$(9) \quad \begin{cases} I = \int_0^{\infty} (c + ix)^{r-1} e^{ix} dx, \\ I_1 = \int_0^{\infty} (c - ix)^{r-1} e^{ix} dx, \\ I_2 = \int_0^{\infty} (c + ix)^{r-1} e^{-ix} dx, \\ I_3 = \int_0^{\infty} (c - ix)^{r-1} e^{-ix} dx. \end{cases}$$

Toutes les fonctions

$$f(\pm c \pm ix)^{r-1} e^{\pm ix} dx,$$

entre les limites $0, \infty$, ou $-\infty, 0$, ou $-\infty, \infty$, s'expriment facilement au moyen de I, I_1, I_2, I_3 . Mais ces quatre fonctions ne sont pas connues; seulement, au moyen des équations qui viennent d'être trouvées, on obtient

$$(10) \quad \begin{cases} 2 \sin r\pi \Gamma r e^{-c} = I + I_3, \\ 0 = I_1 + I_2. \end{cases}$$

On déduit encore de ces mêmes formules :

$$(11) \quad \begin{cases} \sin r\pi \Gamma r e^{-c} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (c + ix)^{r-1} \cos x dx = i \int_{-\infty}^{\infty} (c + ix)^{r-1} \sin x dx, \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (c - ix)^{r-1} \cos x dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} (c - ix)^{r-1} \sin x dx. \end{cases}$$

En supposant que $r - 1$ est entier négatif, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} (c^2 + x^2)^{r-1} \cos x dx$$

se décompose facilement dans une suite d'intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c \pm ix)^{p-1} \cos x dx;$$

et, en prenant la somme de celles-ci, on obtient la formule

$$(12) \quad \int_0^{\infty} (c^2 + x^2)^{r-1} \cos x dx = \frac{\pi e^{-c} (2c)^{2r-1}}{\Gamma^2(1-r)} \int_0^{\infty} \theta^{-r} (\theta + 2c)^{-r} e^{-\theta} d\theta,$$

laquelle est due à M. Catalan. Cependant, ni cette démonstration ni celle de M. Catalan ne s'appliquent au cas où r n'est pas entier; la formule subsiste encore dans ce cas, comme M. Serret l'a démontré rigoureusement. En essayant de la vérifier, je suis tombé sur cette autre formule :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\infty} (c^2 + x^2)^{r-1} \cos x dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-c} (2c)^{2r-1}}{2\Gamma(1-r)} \int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{\theta + 2c} + \sqrt{\theta})^{1-2r} + (\sqrt{\theta + 2c} - \sqrt{\theta})^{1-2r}}{\sqrt{\theta} \sqrt{\theta + 2c}} e^{-\theta} d\theta, \end{aligned} \right.$$

ce qui suppose, comme auparavant, que $r-1$ soit négatif; en comparant les deux valeurs, on est conduit au résultat singulier (en écrivant α au lieu de $2c$, et $\frac{1-p}{2}$ pour r) :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{\theta + \alpha} + \sqrt{\theta})^p + (\sqrt{\theta + \alpha} - \sqrt{\theta})^p}{\sqrt{\theta} \sqrt{\theta + \alpha}} e^{-\theta} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}(p+1))} \int_0^{\infty} \theta^{\frac{1}{2}(p-1)} (\theta + \alpha)^{\frac{1}{2}(p-1)} e^{-\theta} d\theta, \end{aligned} \right.$$

lequel peut se démontrer sans difficulté, quand p est entier positif impair, en développant les deux membres suivant les puissances de α ; cela se fait au moyen de

$$(15) \quad \frac{(\sqrt{1+x} + 1)^p + (\sqrt{1+x} - 1)^p}{\sqrt{1+x}} = S_r \cdot \left[x^r \cdot \frac{\Gamma(p-r) \cdot 2^{p-2r}}{\Gamma(p-2r) \Gamma(r+1)} \right],$$

où r s'étend depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{2}(p-1)$. J'ai déduit de cette formule (14) des formules assez remarquables qui se rapportent aux attractions, lesquelles paraîtront dans un numéro prochain du *Cambridge and*

Dublin mathematical Journal. On peut encore démontrer cette formule singulière :

$$(16) \quad \Gamma(r+a-1) = \frac{1}{2\sin r\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^{r-1} (-ix)^{a-1} e^{ix} dx;$$

en effet, pour la vérifier, il suffit de réduire l'intégrale, d'abord à

$$\int_0^{\infty} (ix)^{r-1} (-ix)^{a-1} e^{ix} dx + \int_0^{\infty} (-ix)^{r-1} (ix)^{a-1} e^{-ix} dx,$$

puis à

$$e^{(r-a)\frac{\pi i}{2}} \int_0^{\infty} x^{r+a-2} e^{ix} dx + e^{(a-r)\frac{\pi i}{2}} \int_0^{\infty} x^{r+a-2} e^{-ix} dx,$$

dont les deux parties s'obtiennent au moyen d'une formule donnée ci-dessus. Si, au lieu de $(-ix)^{a-1}$, l'on avait $(ix)^{a-1}$, l'intégrale se réduirait à zéro; mais cela rentre dans une formule plus simple.

J'ajouterai encore ces deux formules-ci.

$$(17) \quad \begin{cases} 2\pi e^a e^{-c} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-ix)^a}{c+ix} e^{ix} dx, \\ 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ix)^a}{c+ix} e^{-ix} dx, \end{cases}$$

dont je supprime la démonstration. En écrivant dans la dernière $-x$ au lieu de x , puis ajoutant, on a

$$(18) \quad \pi e^{a-1} e^{-c} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-ix)^a}{c^2+x^2} e^{ix} dx;$$

d'où l'on déduit tout de suite cette formule de M. Cauchy

$$(19) \quad \pi e^{a-1} e^{-c} = \int_0^{\infty} \frac{x^a}{c^2+x^2} \cos\left(\frac{a\pi}{2} - x\right) dx.$$

La formule (7) peut être considérée comme une définition de la fonction Γr au cas de r négatif; et, à ce point de vue, elle a, ce me semble, quelques avantages sur celle que M. Cauchy a donnée au moyen des intégrales extraordinaires. Je passe à la définition, au moyen d'une intégrale définie, de la seconde intégrale eulérienne,

$$(20) \quad \tilde{\Gamma}(m, n) = \frac{\Gamma m \Gamma n}{\Gamma(m+n)},$$

quand m ou n , ou tous les deux, sont négatifs. Soit d'abord m et n tous les deux positifs, mais n plus petit que l'unité; on obtient au moyen de la formule (7) et de la définition ordinaire des fonctions Γ ,

$$\Gamma m \Gamma n = \frac{1}{2 \sin n \pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy x^{m-1} (iy)^{n-1} e^{-x+iy},$$

et de là, en mettant

$$y = \alpha x, \quad dy = x d\alpha,$$

et intégrant, par rapport à x ,

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{1}{2 \sin n \pi} \int_{-\infty}^\infty d\alpha \cdot \frac{(i\alpha)^{n-1}}{(1-i\alpha)^{m+n}},$$

ou en écrivant $k + \alpha i$ au lieu de αi , k étant positif,

$$(21) \quad \mathfrak{F}(m, n) = \frac{1}{2 \sin n \pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{(k + \alpha i)^{n-1} d\alpha}{(1 - k - \alpha i)^{m+n}}.$$

formule qui est vraie, même pour les valeurs négatives de n . En effet, si cette formule est vraie pour une valeur quelconque particulière de n , elle sera aussi vraie pour la valeur $n + p$, p étant entier positif quelconque; ce qui se démontre au moyen des formules de réduction: donc il ne s'agit que de la démontrer au cas où n est positif et plus petit que l'unité, et dans ce cas, puisque la fonction à intégrer est toujours finie, on peut écrire sans crainte $k + \alpha i$ au lieu de αi , ce qui la réduit à la formule qui vient d'être démontrée; donc cette formule (21) est la définition cherchée, au cas où n est négatif, ou positif et plus petit que l'unité.

Si, de plus, m est négatif, ou positif et plus petit que l'unité, $l - m$ sera positif, et l'on déduira

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{\Gamma m \Gamma n}{\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(1-m-n) \Gamma n \sin(m+n)\pi}{\Gamma(1-m) \sin m\pi},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{\sin(m+n)\pi}{\sin m\pi} \mathfrak{F}(1-m-n, n);$$

ou enfin, par l'équation (21),

$$\mathfrak{F}(m, n) = \frac{\sin(m+n)\pi}{2\sin m\pi \sin n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (k+iz)^{n-1} (1-h-iz)^{m-1} dz,$$

laquelle suppose seulement que $m+n$ soit négatif, ou positif et plus petit que l'unité. Elle présente une analogie assez frappante avec l'équation ordinaire

$$\mathfrak{F}(m, n) = \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx,$$

qui correspond aux valeurs positives de m, n ; de même que l'équation (23) est analogue à cette autre forme

$$\mathfrak{F}(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{(1+x)^{m+n}},$$

qui correspond aussi aux valeurs positives de m et n .

On peut se proposer de vérifier l'équation (m et n positifs et plus petits que l'unité)

$$\Gamma m \Gamma n = \frac{1}{4 \sin m\pi \sin n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy (ix)^{m-1} (iy)^{n-1} e^{i(x+y)},$$

en transformant le second membre au moyen de $x=zy$. Pour cela, on distinguera quatre cas, selon que x et y sont tous les deux positifs ou négatifs, ou l'un positif et l'autre négatif. En mettant dans les deux premiers

$$x = zy, \quad dx = y dz,$$

et en intégrant par rapport à y , on trouvera que les deux portions correspondantes de l'intégrale double se réuniront en

$$= \Gamma(m+n) \cdot 2 \cos(m+n)\pi \cdot \int_0^{\infty} \frac{z^{m-1} dz}{(1+z)^{m+n}},$$

c'est-à-dire à

$$= 2 \cos(m+n)\pi \cdot \Gamma m \Gamma n.$$

Pour les deux autres portions de l'intégrale double, en écrivant

$$x = -zy,$$

on verra qu'il faut encore distinguer les deux cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$. Les quatre intégrales ainsi obtenues se réuniront cependant dans les deux

$$2 \cos n\pi \cdot \Gamma(m+n) \cdot \int_0^1 \frac{\alpha^{m-1} d\alpha}{(1-\alpha)^{m+n}}, \quad 2 \cos m\pi \int_1^\infty \frac{\alpha^{m-1} d\alpha}{(\alpha-1)^{m+n}};$$

savoir, après quelques réductions faciles, dans celles-ci,

$$\frac{2 \cos n\pi \sin m\pi}{\sin(m+n)\pi} \Gamma m \Gamma n, \quad \frac{2 \cos m\pi \sin m\pi}{\sin(m+n)\pi} \Gamma m \Gamma n,$$

lesquelles se réuniront en

$$\cos(m-n)\pi \cdot \Gamma m \Gamma n.$$

On obtient donc enfin l'équation identique

$$4 \sin m\pi \sin n\pi = 2 \cos(m-n)\pi - 2 \cos(m+n)\pi;$$

ce qui suffit pour la vérification dont il s'agit.