JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 97-103.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__97_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE,

Par M. C.-G.-J. JACOBI [*].

« Berlin, le 6 août 1845.

» . . . Les principes dont vous partez pour parvenir aux formules de la transformation inverse que j'ai publiées sans démonstration dans le Journal de M. Crelle, sont précisément les mêmes qui d'abord m'ont conduit à ces formules. Ensuite, j'avais fait une espèce de tour de force en substituant les expressions composées de radicaux compliqués dans l'équation différentielle à laquelle elles doivent satisfaire. Pour mieux faire saisir l'esprit de cette démonstration en quelque sorte synthétique, j'ai employé la même méthode à la démonstration des formules de la transformation directe, dans un Mémoire publié dans le Journal de M. Crelle, tome VI, pages 397 et suivantes. Plus tard, j'ai ajouté une démonstration très-directe et très-élégante qui repose entièrement sur la décomposition de $\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}$ en fractions simples, pour laquelle j'avais donné les formules dans une de mes Leçons à l'Université de Kœnigsberg.

» Quant aux formules de développement du produit

$$\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x+a_2)\ldots\mathrm{H}(x+a_n),$$

où

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=2jk,$$

et des fonctions homogènes de $\mathrm{H}(x)$ et $\Theta(x)$, je les avais d'abord, comme vous, déduites des propriétés analytiques et caractéristiques

[*] En réponse, comme on peut le voir, à une communication de M. Hermite, relative à la théorie des fonctions elliptiques et à celle des fonctions abéliennes. Nous espérons pouvoir prochainement faire connaître à nos lecteurs la partie du travail de M. Hermite qui concerne les fonctions elliptiques, l'auteur l'ayant développée séparément dans un Mémoire qu'il doit nous donner. (J. L.)

des fonctions $\mathrm{H}x$ et Θx, et j'y ai fait allusion dans le Journal de M. Crelle, tome XXVI, page 103. Depuis, j'ai remarqué que l'on peut parvenir aux mêmes formules par la considération élémentaire et algébrique, qu'étant mis

$$y_1 = x_1 + b, \quad y_2 = x_2 + b, \quad \text{etc.},$$

à chaque solution des deux équations

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = p, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a,$$

répond une solution des deux autres équations

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 &= p - \frac{a^2}{n} + n\left(\frac{a}{n} + b\right)^2, \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n &= a + nb. \end{aligned}$$

On mettra pour a les nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et pour b tous les nombres, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

» Mais ce qui auparavant ne m'est jamais venu dans l'esprit, c'est votre idée ingénieuse et très-originale de faire ressortir des mêmes principes le théorème d'Abel, quant aux fonctions elliptiques. Ne pensez-vous pas consacrer un Mémoire particulier à cette matière qui se détache très-bien des autres questions?

» En cherchant à tirer aussi la transformation directe des propriétés des fonctions Θ, sans faire usage de leur décomposition en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement l'on se doit résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.

» Dans mes Leçons universitaires de Kœnigsberg, j'ai aussi eu coutume de partir des fonctions Θ. Dans ces Leçons, en multipliant quatre séries $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\, e^{-(ax+ib)^2}$ pour différentes valeurs de x, et en transformant les exposants par la formule

$$i^2 + i'^2 + i''^2 + i'''^2 = \left(\frac{i + i' + i'' + i'''}{2}\right)^2 + \left(\frac{i + i' - i'' - i'''}{2}\right)^2 + \text{etc.},$$

j'ai obtenu une formule de laquelle découlent, comme cas particuliers et sans le moindre calcul, les expressions fractionnaires des fonctions elliptiques, les théorèmes sur l'addition des trois espèces, et plusieurs centaines de formules intéressantes auxquelles on ne saurait arriver que par un calcul algébrique fatigant. Dans un des premiers volumes du Journal de M. Crelle, j'ai donné les formules d'addition et de transformation conjointes, ressortantes de la multiplication seulement de deux Θ. Ces formules font voir que l'on peut arriver par deux transformations successives, non-seulement à la multiplication, mais aussi aux formules de l'addition.

» Dans les mêmes Leçons, j'ai examiné l'ensemble des transformations de la fonction Θ. En faisant usage de la méthode employée par Lagrange pour la réduction des formes quadratiques, j'ai trouvé le fait analytique remarquable que, q étant une quantité imaginaire quelconque, on peut toujours, et par la seule multiplication par une quantité de la forme e^{rxx}, transformer la fonction Θ dans une autre où le module de q, dans le sens de M. Cauchy, est $< e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$. C'est une limite précise que l'on ne saurait abaisser davantage.

» L'addition des paramètres dans la troisième espèce des intégrales abéliennes et l'échange des paramètres avec les amplitudes me sont bien connues. Il y a douze années environ que je les ai communiquées à deux de mes élèves, M. Richelot, de Kœnigsberg, et M. Senff, à présent professeur de mathématiques près l'Université de Dorpat, et qui étudiait à Kœnigsberg lorsque je fis ces découvertes. J'avais d'abord trouvé, indépendamment, l'addition des paramètres par la seule différentiation de $\log \frac{\sqrt{R}+U\sqrt{x}}{\sqrt{R}-U\sqrt{x}}$, U et R étant deux fonctions de l'ordre m et $2m$. Puis je l'ai déduite de l'échange mutuel des paramètres et amplitudes, qui se trouve aisément en remplaçant la somme des deux intégrales simples

$$\int_0^x \frac{\sqrt{\alpha R(\alpha)}.dx}{(x-\alpha)\sqrt{xR(x)}} + \int_0^\alpha \frac{\sqrt{xR(x)}.d\alpha}{(x-\alpha)\sqrt{\alpha R(\alpha)}},$$

par la double intégrale

$$\iint \frac{dx\,d\alpha}{\sqrt{\alpha R(\alpha)}\sqrt{xR(x)}}\left[\frac{1}{2(x-\alpha)}\left(\frac{d.xR(x)}{dx}+\frac{d.\alpha R(\alpha)}{d\alpha}\right)+\frac{\alpha R(\alpha)-xR(x)}{(x-\alpha)^2}\right],$$

où l'on prouve sans peine que la fonction de x et de α, placée entre les grands crochets, est entière.

» Feuilletant mes anciens papiers, j'ai trouvé entre autres la démonstration du théorème suivant, qui complète l'analogie avec la troisième espèce des fonctions elliptiques :

« Nommant $F(x)$ l'intégrale $\int \frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{x\mathrm{R}(x)}}$, où $\psi(x)$ est une fonction en-
» tière du $(m-1)^{ième}$ degré, si l'on détermine les trois systèmes de
» quantités w_1, w_2, etc., y_1, y_2, etc., z_1, z_2, etc., par les $m+2$ quan-
» tités données $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}, \alpha$, au moyen des équations

$$\begin{aligned}
F(w_1)+F(w_2)+\ldots+F(w_m) &= F(x_1)+F(x_2)+\ldots+F(x_{m+1}),\\
F(y_1)+F(y_2)+\ldots+F(y_m) &= F(x_1)+F(x_2)+\ldots+F(x_{m+1})+F(\alpha),\\
F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m) &= F(x_1)+F(x_2)+\ldots+F(x_{m+1})-F(\alpha),
\end{aligned}$$

» et que l'on mette

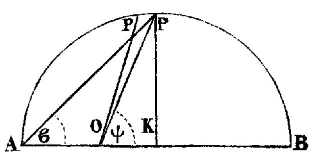
$$\Pi(x) = \sqrt{\alpha\mathrm{R}(\alpha)} \int \frac{dx}{(\alpha - x)\sqrt{x\mathrm{R}(x)}},$$

» on aura

$$\Pi(x_1)+\Pi(x_2)+\ldots+\Pi(x_{m+1}) = \Pi(w_1)+\Pi(w_2)+\ldots+\Pi(w_m) + \log \frac{1+(-1)^m.\dfrac{\sqrt{x_1x_2\ldots x_{m+1}}}{\sqrt{\alpha y_1 y_2\ldots y_m}}}{1+(-1)^m.\dfrac{\sqrt{x_1x_2\ldots x_{m+1}}}{\sqrt{\alpha z_1 z_2\ldots z_m}}}. \text{ »}$$

Nota. La formule pour l'intégrale la plus simple de la seconde espèce est encore parfaitement analogue à celle qui se rapporte à l'addition de la seconde espèce des fonctions elliptiques; c'est ce qu'on voit sans calcul.

Permettez-moi d'ajouter la bagatelle suivante : Soit AB le diamètre



d'un cercle : si l'on mène d'un point P du cercle la droite PK au centre K, l'angle PKB est double de PAB; mais si l'on mène la droite à un autre point fixe O du diamètre, on obtient la transformation de

Landen. Soit R le rayon du cercle, $KO = a$, $PAB = \beta$, $POB = \psi$; variant P, on aura dans le triangle infiniment petit POP,

$$PP \sin PPO = OP.\sin POP;$$

donc

$$2 R\, d\beta.\cos KPO = OP.d\psi, \quad \frac{2\, d\beta}{OP} = \frac{d\psi}{R \cos KPO};$$

or

$$OP^2 = R^2 + a^2 + 2Ra\cos 2\beta = (R+a)^2\cos^2\beta + (R-a)^2\sin^2\beta,$$

$$R^2\cos^2 KPO = R^2 - R^2\sin^2 KPO = R^2 - a^2\sin^2\psi;$$

donc

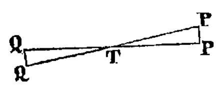
$$\frac{2\, d\beta}{\sqrt{[(R+a)^2\cos^2\beta + (R-a)^2\sin^2\beta]}} = \frac{d\psi}{\sqrt{[(R^2\cos^2\psi + (R^2 - a^2)\sin^2\psi]}}.$$

On a, en même temps,

$$\sin\psi = \frac{AP.\sin\beta}{OP} = \frac{2 R \sin\beta\cos\beta}{\sqrt{[(R+a)^2\cos^2\beta + (R-a)^2\sin^2\beta]}},$$

ce qui est la substitution de Landen.

» J'ai aussi cherché à étendre au théorème d'Abel ma construction de l'addition des fonctions elliptiques. Dans cette dernière, la corde PQ d'un cercle touche constamment un autre cercle. Soit T le point d'in-



tersection de deux positions consécutives de la droite; les deux angles QQT et PPT étant égaux d'après une propriété du cercle, on aura

$$\frac{PP}{PT} = \frac{QQ}{QT},$$

ce qui est l'équation différentielle, dont la construction donne l'intégrale complète et algébrique trouvée par Euler. A présent, je suppose qu'une corde C d'une courbe I du $n^{ième}$ degré touche constamment une autre courbe II. Soient P un point d'intersection de la corde mobile avec la courbe I, et $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ l'élément de la courbe I dans ce point, T le point de contact de la corde C avec la courbe II; si

$f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe I, je démontre, par des considérations mixtes de géométrie et d'algèbre, la formule générale

$$\sum \frac{\psi(x, y)\, ds}{\mathrm{PT}.\sqrt{\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]}} = 0,$$

$\psi(x, y)$ étant une fonction entière de l'ordre $n - 2$, et la somme s'étendant aux n points d'intersection, le signe du radical étant $+$ ou $-$, selon que P est de l'un ou de l'autre côté de T. Supposons que la courbe I rentre dans ces courbes particulières pour les points desquelles on peut exprimer x et y par des fonctions rationnelles d'une troisième variable t, $x = \frac{\tau_1}{\tau}$, $y = \frac{\tau_2}{\tau}$, τ, τ_1, τ_2 étant du $n^{ième}$ degré, ce qui même est le cas général pour les courbes des deux premiers degrés. Faisant usage de divers théorèmes établis dans mon Mémoire sur l'élimination (Journal de M. Crelle, tome XV), je trouve le théorème remarquable que, $\theta(t)$ étant du $(n-2)^{ième}$ degré, on aura

$$\frac{\theta(t)}{\tau}\, dt = \frac{\psi(x, y)\, ds}{\sqrt{\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]}},$$

$\psi(x, y)$ étant, comme ci-dessus, du $(n-2)^{ième}$ degré. On aura donc

$$\sum \frac{\theta(t)\, dt}{\tau.\mathrm{PT}} = 0.$$

Soit la courbe II un cercle ayant pour équation $x^2 + y^2 = 1$; on aura

$$\tau.\mathrm{PT} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau^2},$$

donc

$$\sum \frac{\theta(t)\, dt}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau^2}} = 0, \quad \text{d'où} \quad \sum \int \frac{\theta(t)\, dt}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau^2}} = 0,$$

les n intégrales étant prises entre les limites correspondantes à deux positions quelconques de la corde mobile C. Soit $\mathrm{f}(t)$ une fonction donnée du $(n-2m)^{ième}$ degré, U du $m^{ième}$ degré, $\theta(t) = \Psi(t).\mathrm{U}$, $\Psi(t)$ étant du $(n - 2m - 2)^{ième}$ degré, on aura

$$\sum \int \frac{dt\, \Psi(t)}{\sqrt{\mathrm{f}(t)}} = 0, \quad \tau_1^2 - \mathrm{U}^2\mathrm{f}(t) = \tau^2 - \tau_2^2,$$

ce qui est la forme donnée par Abel à son théorème; mais la forme sous laquelle le théorème se présente, d'après la construction que je viens de vous communiquer, ne semble pas dépourvue d'intérêt. Comme je n'ai étudié jusqu'ici que les intégrales qui ont sous le signe une racine carrée, je ne saurais dire si la formule générale dont je suis parti en prenant deux courbes quelconques I et II, comporte la même généralité que le théorème général d'Abel. Par vos travaux sur ce théorème, vous serez à même d'en juger.

» Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous commencez là où je finis, il doit y avoir une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre.

» Je ne sais pas si dans les semaines prochaines je trouverai le loisir d'écrire à M. Liouville, pour lui communiquer quelques petites choses qu'il pourrait insérer dans son excellent Journal. Si vous trouvez bon d'y faire entrer quelque extrait de cette Lettre, faites comme vous voudrez... »