

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

**Sur les sommes des puissances semblables des termes
d'une progression arithmétique**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 11 (1846), p. 477-488.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__477_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur les sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique;

PAR M. PUISEUX.

1. Pour abréger, nous désignerons, dans ce qui va suivre, par $(\mu)_p$ le produit

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-p+1),$$

où p désigne un nombre entier et positif, μ étant quelconque; on aura alors

$$(\mu)_1 = \mu.$$

Cela posé, faisons

$$(1) \quad \varphi x = \frac{x^{a+m} - x^a}{x-1} = x^a + x^{a+1} + x^{a+2} + \dots + x^{a+m-1},$$

m étant entier et positif, et soient, de plus,

$$(2) \quad \varphi_1 x = x^{b-a+1} \varphi' x, \quad \varphi_2 x = x^{c-b+1} \varphi'_1 x, \quad \varphi_3 x = x^{d-c+1} \varphi'_2 x, \text{ etc.};$$

nous déduirons de ces équations

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_1 x = ax^b + (a+1)x^{b+1} + (a+2)x^{b+2} + \dots + (a+m-1)x^{b+m-1}, \\ \varphi_2 x = abx^c + (a+1)(b+1)x^{c+1} + (a+2)(b+2)x^{c+2} + \dots \\ \quad + (a+m-1)(b+m-1)x^{c+m-1}, \\ \varphi_3 x = abcx^d + (a+1)(b+1)(c+1)x^{d+1} + \dots \\ \quad + (a+m-1)(b+m-1)(c+m-1)x^{d+m-1}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Appelons

$$\varphi, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \dots, \quad \varphi', \quad \varphi'_1, \dots, \quad \varphi'', \quad \text{etc.}$$

ce que deviennent, pour $x=1$, les fonctions

$$\varphi x, \quad \varphi_1 x, \quad \varphi_2 x, \dots, \quad \varphi' x, \quad \varphi'_1 x, \dots, \quad \varphi'' x, \quad \text{etc.}$$

Faisons maintenant

$$x = 1$$

dans les équations (5) et (6), et nous trouverons

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = (a+m)_1 - (a)_1, \\ 2\varphi' = (a+m)_2 - (a)_2, \\ 3\varphi'' = (a+m)_3 - (a)_3, \\ \dots\dots\dots \\ (p+1)\varphi^{(p)} = (a+m)_{p+1} - (a)_{p+1}, \\ \text{etc.}, \end{array} \right.$$

et

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi', \\ \varphi'_1 = (b-a+1)_1 \varphi' + \varphi'', \\ \varphi''_1 = (b-a+1)_2 \varphi' + 2(b-a+1)_1 \varphi'' + \varphi''', \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^{(p)}_1 = (b-a+1)_p \varphi' + \frac{p}{1} (b-a+1)_{p-1} \varphi'' \\ \quad + \frac{p(p-1)}{1.2} (b-a+1)_{p-2} \varphi''' + \dots + \varphi^{(p+1)}, \\ \text{etc.}; \\ \varphi_2 = \varphi'_1, \\ \varphi'_2 = (c-b+1)_1 \varphi'_1 + \varphi''_1, \\ \varphi''_2 = (c-b+1)_2 \varphi'_1 + (c-b+1)_1 \varphi''_1 + \varphi'''_1, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^{(p)}_2 = (c-b+1)_p \varphi'_1 + \frac{p}{1} (c-b+1)_{p-1} \varphi''_1 + \dots + \varphi^{(p+1)}_1, \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

En substituant, dans les équations (8), les valeurs de φ' , φ'' , φ''' , etc., tirées des équations (7), nous en déduirons aisément les valeurs de φ_1 , φ_2 , φ_3 , etc., et, en portant ces dernières dans les équations (4), nous obtiendrons les formules suivantes :

$$(9) \left\{ \begin{aligned} a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+m-1) &= \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2}, \\ ab + (a+1)(b+1) + \dots + (a+m-1)(b+m-1) \\ &= (b-a+1) \cdot \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2} + \frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3}, \\ abc + (a+1)(b+1)(c+1) + \dots + (a+m-1)(b+m-1)(c+m-1) \\ &= (b-a+1)(c-a+1) \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2} \\ &\quad + (b+c-2a+3) \frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3} + \frac{(a+m)_4 - (a)_4}{4}, \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right.$$

En développant les seconds membres, on trouvera, comme il était aisé de le prévoir, que celui de la première formule est une fonction linéaire de a , celui de la deuxième une fonction linéaire de chacune des quantités a et b , celui de la troisième une fonction linéaire de chacune des quantités a , b , c , et ainsi de suite. De plus, ces fonctions sont symétriques par rapport à ces lettres.

Remplaçons, dans les équations précédentes, a , b , c , etc., par $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{l}$, et multiplions-les, la première par h , la deuxième par hk , la troisième par hkl , etc., il viendra

$$(10) \left\{ \begin{aligned} a + (a+h) + (a+2h) + \dots + [a + (m-1)h] &= a \cdot \frac{\left(\frac{a}{h} + m\right)_2 - \left(\frac{a}{h}\right)_2}{2}, \\ ab + (a+h)(b+k) + \dots + [a + (m-1)h][b + (m-1)k] \\ &= (bh - ak + hk) \frac{\left(\frac{a}{h} + m\right)_2 - \left(\frac{a}{h}\right)_2}{2} + hk \cdot \frac{\left(\frac{a}{h} + m\right)_3 - \left(\frac{a}{h}\right)_3}{3}, \\ abc + (a+h)(b+k)(c+l) + \dots \\ &\quad + [a + (m-1)h][b + (m-1)k][c + (m-1)l] \\ &= \frac{(bh - ak + hk)(ch - al + hl)}{h} \cdot \frac{\left(\frac{a}{h} + m\right)_2 - \left(\frac{a}{h}\right)_2}{2} \\ &\quad + (bhl + chk - 2akl + 3hkl) \cdot \frac{\left(\frac{a}{h} + m\right)_3 - \left(\frac{a}{h}\right)_3}{3} + hkl \cdot \frac{\left(\frac{a}{h} + m\right)_4 - \left(\frac{a}{h}\right)_4}{4}, \\ &\text{etc.,} \end{aligned} \right.$$

formules plus générales que les équations (9).

3. Les formules (9) se simplifient dans le cas particulier où l'on a

$$b = a - 1, \quad c = b - 1, \quad d = c - 1, \quad \text{etc.};$$

en effet, les équations (8) nous donnent, dans cette hypothèse,

$$\varphi_1 = \varphi', \quad \varphi_2 = \varphi'', \quad \varphi_3 = \varphi'''. \quad \text{etc.},$$

et, par conséquent,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+m-1) = \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2}, \\ a(a-1) + (a+1)a + (a+2)(a+1) + \dots \\ \quad + (a+m-1)(a+m-2) = \frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3}, \\ a(a-1)(a-2) + (a+1)a(a-1) + (a+2)(a+1)a + \dots \\ \quad + (a+m-1)(a+m-2)(a+m-3) = \frac{(a+m)_4 - (a)_4}{4}, \\ \text{etc.}, \end{array} \right.$$

formules que l'on changera en d'autres plus générales en y remplaçant a par $\frac{a}{h}$ et multipliant la première par h , la deuxième par h^2 , la troisième par h^3 , etc.

4. Considérons maintenant un autre cas qui fait l'objet spécial de cet article, savoir celui où, dans les formules (9), on suppose

$$a = b = c = d = \dots;$$

les équations (8) deviennent alors

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1 = \varphi', & \varphi_2 = \varphi'_1, \\ \varphi'_1 = \varphi' + \varphi'', & \varphi'_2 = \varphi'_1 + \varphi''_1, \\ \varphi''_1 = 2\varphi'' + \varphi''', & \varphi''_2 = 2\varphi''_1 + \varphi'''_1, \\ \varphi'''_1 = 3\varphi''' + \varphi^{(iv)}, & \varphi'''_2 = 3\varphi'''_1 + \varphi^{(iv)}_1, \\ \dots & \dots \\ \varphi^{(p)}_1 = p\varphi^{(p)} + \varphi^{(p+1)}, & \varphi^{(p)}_2 = p\varphi^{(p)}_1 + \varphi^{(p+1)}_1, \\ \text{etc.}; & \text{etc.} \end{array} \right.$$

A l'aide de ces équations, il est aisé d'exprimer $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, etc., en $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, etc.; et l'on voit que, r étant un nombre entier quelconque, l'expression de φ_r sera de la forme

$$\varphi_r = \varphi' + A_r \varphi'' + B_r \varphi''' + C_r \varphi^{(iv)} + \dots + L_r \varphi^{(r)}.$$

Pour obtenir plus promptement les coefficients A_r , B_r , etc., remarquons que, si dans une quelconque des équations (12), on vient à augmenter d'une unité les indices placés au bas de la lettre φ , on retombera sur une autre équation du même groupe; il est donc permis de faire ce changement dans toute équation déduite de celles-là, et, en particulier, dans l'équation

$$\varphi_r = \varphi' + A_r \varphi'' + B_r \varphi''' + C_r \varphi^{iv} + \dots,$$

ce qui donne

$$\varphi_{r+1} = \varphi' + A_r \varphi''_1 + B_r \varphi'''_1 + C_r \varphi^{iv}_1 + \dots,$$

ou bien, en remplaçant φ'_1 , φ''_1 , φ'''_1 , etc., par leurs valeurs,

$$\varphi_{r+1} = \varphi' + 1 \left| \begin{array}{c} \varphi'' + A_r \\ + 2A_r \end{array} \right| \varphi''' + B_r \left| \begin{array}{c} \varphi''' + B_r \\ + 3B_r \end{array} \right| \varphi^{iv} + \dots$$

On voit par là que, connaissant les coefficients 1 , A_r , B_r , etc., de φ' , φ'' , φ''' , etc., dans l'expression de φ_r , si l'on écrit ces coefficients sur une même ligne horizontale, et au-dessous les mêmes coefficients multipliés respectivement par 1 , 2 , 3 , etc., en ayant soin d'avancer chaque terme d'un rang, de manière à former le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & A_r, & B_r, & C_r, & \dots, \\ 1, & 2A_r, & 3B_r, & 4C_r, & 5D_r, & \dots; \end{array}$$

si, enfin, on ajoute les termes contenus dans une même ligne verticale, les sommes ainsi obtenues seront les coefficients de φ' , φ'' , φ''' , etc., dans φ_{r+1} . En appliquant cette règle, on peut former le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} \varphi_1 = \dots\dots\dots 1 \varphi', \\ \varphi_2 = \dots\dots\dots \frac{1}{1 \varphi' + 1 \varphi''}, \\ \varphi_3 = \dots\dots\dots \frac{1}{1 \varphi' + 3 \varphi'' + 1 \varphi'''} \frac{2}{6}, \\ \varphi_4 = \dots\dots\dots \frac{1}{1 \varphi' + 7 \varphi'' + 6 \varphi''' + 1 \varphi^{iv}} \frac{3}{14} \frac{18}{4}, \\ \varphi_5 = \dots\dots\dots \frac{1}{1 \varphi' + 15 \varphi'' + 25 \varphi''' + 10 \varphi^{iv} + 1 \varphi^v} \frac{4}{30} \frac{75}{40} \frac{5}{5}, \\ \varphi_6 = \dots\dots\dots \frac{1}{1 \varphi' + 31 \varphi'' + 90 \varphi''' + 65 \varphi^{iv} + 15 \varphi^v + 1 \varphi^{v1}} \frac{5}{5} \\ \text{etc.} \end{array}$$

5. Cherchons maintenant l'expression générale de φ_r ; or, à cause de $A_1 = 0$ et de l'équation

$$A_{r+1} = 2A_r + 1,$$

nous aurons

$$A_2 = 1,$$

$$A_3 = 2A_2 + 1,$$

$$A_4 = 2A_3 + 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_{r-1} = 2A_{r-2} + 1,$$

$$A_r = 2A_{r-1} + 1.$$

Ajoutons ces équations, après avoir multiplié la première par 2^{r-2} , la deuxième par 2^{r-3} , la troisième par 2^{r-4} , ..., l'avant-dernière par 2 : nous trouverons

$$A_r = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{r-3} + 2^{r-2} = \frac{2^{r-1} - 1}{1}.$$

De même, à cause de $B_2 = 0$ et de l'équation

$$B_{r+1} = 3B_r + A_r = 3B_r + 2^{r-1} - 1,$$

nous aurons

$$B_3 = 2^1 - 1,$$

$$B_4 = 3B_3 + 2^2 - 1,$$

$$B_5 = 3B_4 + 2^3 - 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$B_{r-1} = 3B_{r-2} + 2^{r-3} - 1,$$

$$B_r = 3B_{r-1} + 2^{r-2} - 1.$$

Ajoutons à ces équations, après avoir multiplié la première par 3^{r-3} , la deuxième par 3^{r-4} , ..., l'avant-dernière par 3, il viendra

$$\begin{aligned} B_r &= 2^1 3^{r-3} + 2^2 3^{r-4} + \dots + 2^{r-3} 3^1 + 2^{r-2} - (1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{r-3}), \\ &= 2^{r-2} \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{r-3} \right] - (1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{r-3}), \end{aligned}$$

61..

ou bien

$$B_r = \frac{3^{r-1} - 2 \cdot 2^{r-1} + 1}{1 \cdot 2}.$$

Nous déduirons de même de l'équation

$$C_{r+1} = 4C_r + B_r,$$

la formule

$$C_r = \frac{4^{r-1} - 3 \cdot 3^{r-1} + 3 \cdot 2^{r-1} - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

puis, de l'équation

$$D_{r+1} = 5D_r + C_r,$$

cette autre formule

$$D_r = \frac{5^{r-1} - 4 \cdot 4^{r-1} + 6 \cdot 3^{r-1} - 4 \cdot 2^{r-1} + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

et ainsi de suite. On aperçoit aisément la loi de ces expressions, et l'on en conclut qu'en posant

$$\varphi_r = \varphi' + A_r \varphi'' + B_r \varphi''' + \dots + G_r \varphi^{(p-1)} + H_r \varphi^{(p)} + \dots,$$

on aura

$$H_r = \frac{p^{r-1} - \frac{p-1}{1}(p-1)^{r-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2}(p-2)^{r-1} - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(p-3)^{r-1} + \dots \pm 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)}.$$

Pour s'assurer de l'exactitude de cette formule, il suffit de vérifier que, si elle a lieu pour une certaine valeur de r , elle aura lieu aussi pour la valeur $r+1$; or cela est facile à l'aide de l'équation

$$H_{r+1} = p H_r + G_r;$$

en effet, si l'on y remplace H_r par la valeur précédente, et G_r par

$$\frac{(p-1)^{r-1} - \frac{p-2}{1}(p-2)^{r-1} + \frac{(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2}(p-3)^{r-1} - \dots \pm 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-2)},$$

on trouve

$$H_{r+1} = \frac{p^r - \frac{p-1}{1}(p-2)^r + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2}(p-2)^r - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(p-3)^r + \dots \pm 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)},$$

ce qui est la valeur écrite plus haut de H_r , où r est remplacé par $r+1$.

On a donc généralement

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & \varphi_r = \varphi' + \frac{2^{r-1}-1}{1} \varphi'' + \frac{3^{r-1}-2 \cdot 2^{r-1}+1}{1 \cdot 2} \varphi''' + \frac{4^{r-1}-3 \cdot 3^{r-1}+3 \cdot 2^{r-1}-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi^{IV} + \dots \\ & + \frac{p^{r-1}-\frac{p-1}{1}(p-1)^{r-1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2}(p-2)^{r-1}-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(p-3)^{r-1}+\dots \pm 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)} \varphi^{(p)} + \dots \\ & + \frac{r^{r-1}-\frac{r-1}{1}(r-1)^{r-1}+\frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2}(r-2)^{r-1}-\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(r-3)^{r-1}+\dots \pm 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1)} \varphi^{(r)}. \end{aligned} \right.$$

6. *Remarque.* On peut obtenir sous une autre forme la valeur de φ_r : d'abord on voit aisément, par les équations (12) ou par la règle pratique donnée plus haut, que le coefficient de $\varphi^{(r)}$, dans cette valeur, est l'unité. Posons donc

$$\varphi_r = \varphi^{(r)} + M_r \varphi^{(r-1)} + N_r \varphi^{(r-2)} + P_r \varphi^{(r-3)} + \dots,$$

de sorte qu'on ait aussi

$$\varphi_{r+1} = \varphi^{(r+1)} + M_{r+1} \varphi^{(r)} + N_{r+1} \varphi^{(r-1)} + P_{r+1} \varphi^{(r-2)} + \dots$$

Nous concluons, de la règle qui vient d'être rappelée,

$$M_{r+1} = M_r + r, \quad N_{r+1} = N_r + (r-1)M_r, \quad P_{r+1} = P_r + (r-2)N_r, \quad \text{etc.}$$

Or l'équation

$$M_{r+1} = M_r + r$$

nous donne, à cause de $M_1 = 0$,

$$M_2 = 1,$$

$$M_3 = M_2 + 2,$$

$$M_4 = M_3 + 3,$$

$$\dots$$

$$M_r = M_{r-1} + r-1,$$

d'où, en ajoutant,

$$M_r = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Il en résulte

$$N_{r+1} = N_r + \frac{r(r-1)^2}{2},$$

et par suite, à cause de $N_1 = 0$,

$$N_2 = \frac{2 \cdot 1^2}{2},$$

$$N_3 = N_2 + \frac{3 \cdot 2^2}{2},$$

$$N_4 = N_3 + \frac{4 \cdot 3^2}{2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$N_r = N_{r-1} + \frac{(r-1)(r-2)^2}{2},$$

d'où, en ajoutant,

$$N_r = \frac{2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \dots + (r-1)(r-2)^2}{2}.$$

Le numérateur du second membre s'évaluera à l'aide de la troisième des formules (9), en y supposant

$$a = 2, \quad b = c = 1, \quad m = r = 2,$$

et l'on trouvera

$$N_r = \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24};$$

on obtiendra de même la formule

$$P_r = \frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48},$$

et ainsi de suite. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \varphi_r = \varphi^{(r)} + \frac{r(r-1)}{2} \varphi^{(r-1)} + \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24} \varphi^{(r-2)} \\ + \frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48} \varphi^{(r-3)} + \dots \end{aligned}$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (13) conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 r^{r-1} &= \frac{r-1}{1} (r-1)^{r-1} + \frac{(r-1)(r-2)}{1.2} (r-2)^{r-1} - \dots \pm 1 = 1.2 \dots (r-1), \\
 (r-1)^{r-1} &= \frac{r-2}{1} (r-2)^{r-1} + \frac{(r-2)(r-3)}{1.2} (r-3)^{r-1} - \dots \\
 &\quad \mp 1 = 1.2 \dots (r-2) \times \frac{r(r-1)}{2}, \\
 (r-2)^{r-1} &= \frac{r-3}{1} (r-3)^{r-1} + \frac{(r-3)(r-4)}{1.2} (r-4)^{r-1} - \dots \\
 &\quad \pm 1 = 1.2 \dots (r-3) \times \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24}, \\
 (r-3)^{r-1} &= \frac{r-4}{1} (r-4)^{r-1} + \frac{(r-4)(r-5)}{1.2} (r-5)^{r-1} - \dots \\
 &\quad \mp 1 = 1.2 \dots (r-4) \times \frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48}, \\
 &\text{etc.,}
 \end{aligned}$$

qui ont lieu pour les valeurs entières et positives de r .

7. Si maintenant, dans les équations (4), nous introduisons l'hypothèse

$$a = b = c = \dots,$$

nous en concluons, en ayant égard aux équations (13) et (7),

$$\begin{aligned}
 a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+m-1) &= \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2}, \\
 a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + \dots + (a+m-1)^2 &= \frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3} + \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2}, \\
 a^3 + (a+1)^3 + \dots + (a+m-1)^3 &= \frac{(a+m)_4 - (a)_4}{4} + \frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3} + \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2}, \\
 &\text{etc.,}
 \end{aligned}$$

et, généralement,

$$(14) \left\{ \begin{aligned}
 &a^r + (a+1)^r + (a+2)^r + \dots + (a+m-1)^r = \frac{(a+m)_2 - (a)_2}{2} + \frac{2^{r-1}-1}{1} \cdot \frac{(a+m)_3 - (a)_3}{3} \\
 &+ \frac{3^{r-1}-2 \cdot 2^{r-1}+1}{1.2} \cdot \frac{(a+m)_4 - (a)_4}{4} + \frac{4^{r-1}-3 \cdot 3^{r-1}+3 \cdot 2^{r-1}-1}{1.2.3} \cdot \frac{(a+m)_5 - (a)_5}{5} + \dots \\
 &+ \frac{p^{r-1} - \frac{p-1}{1} (p-1)^{r-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} (p-2)^{r-1} - \dots \pm 1}{1.2.3 \dots (p-1)} \cdot \frac{(a+m)_{p+1} - (a)_{p+1}}{p+1} + \dots \\
 &+ \frac{(a+m)_{r+1} - (a)_{r+1}}{r+1}.
 \end{aligned} \right.$$

Cette dernière équation est comprise elle-même dans une autre plus générale, qu'on obtiendra en remplaçant a par $\frac{a}{h}$, et multipliant les deux membres par h^r ; on trouve ainsi

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & a^r + (a+h)^r + (a+2h)^r + \dots + [a+(m-1)h]^r \\ & = h \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{a}{h} + m \right)_2 - \left(\frac{a}{h} \right)_2 + \frac{(2h)^{r-1} - h^{r-1}}{1} \cdot \frac{\left(\frac{a}{h} + m \right)_3 - \left(\frac{a}{h} \right)_3}{2} + \dots \\ & + \frac{(ph)^{r-1} - \frac{p-1}{1} (ph-h)^{r-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} (ph-2h)^{r-1} - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (ph-3h)^{r-1} + \dots \pm h^{r-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)} \\ & \times \frac{\left(\frac{a}{h} + m \right)_{p+1} - \left(\frac{a}{h} \right)_{p+1}}{p+1} + \dots + h^{r-1} \frac{\left(\frac{a}{h} + m \right)_{r+1} - \left(\frac{a}{h} \right)_{r+1}}{r+1} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

Telle est la formule qui fait connaître la somme des puissances de degré r des termes d'une progression arithmétique.