JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Sur l'intégrale définie $\int^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log\left(1+n\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 471-476.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__471_0>

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1+n\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. En cherchant la valeur de cette intégrale, nous considérerons séparément les trois formes admissibles de n : savoir, celles du paramètre d'une fonction elliptique de la troisième espèce, au module k. On verra que son évaluation dépend des fonctions elliptiques et de la transcendante Υ, qui figure d'une manière si importante dans les recherches de M. Jacobi, relatives à la réduction des fonctions à paramètre logarithmique.

1°. Soit $n = -k^2\sin^2\theta$. On aura donc, en désignant par u l'intégrale dont on cherche la valeur, et en la différentiant par rapport à θ,

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= -2k^2\sin\theta\cos\theta\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\\ &= 2\,\mathrm{cotang}\,\theta\,[\mathrm{F}(k)-\Pi(-k^2\sin^2\theta,\,k)].\end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$\Pi(-k^2\sin^2\theta,k) = \mathrm{F}(k) + \frac{\mathrm{tang}\,\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}[\mathrm{F}(k)\mathrm{E}(k,\theta) - \mathrm{E}(k)\mathrm{F}(k,\theta)]$$

(*Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 141); ce qui donne

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}[\mathrm{E}(k)\mathrm{F}(k,\theta) - \mathrm{F}(k)\mathrm{E}(k,\theta)],$$

d'où l'on déduit, en mettant, suivant l'usage,

$$\int\frac{\mathrm{E}(k,\theta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta = \Upsilon(k,\theta),$$

$$(1)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log(1-k^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k,\theta)]^2 - 2\mathrm{F}(k)\Upsilon(k,\theta).$$

Si l'on y fait $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on trouvera, en se rappelant que

$$\Upsilon(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}(k)\mathrm{E}(k) - \tfrac{1}{2}\log k',$$

k' étant le complément de k (*Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, page 156),

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \log(k')\,\mathrm{F}(k),$$

formule que j'ai démontrée déjà dans un Mémoire inséré dans le cahier de mai.

2°. Soit $n = \operatorname{cotang}^2\theta$, et nous verrons aisément que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sin\theta\cos\theta}\left[\Pi(\operatorname{cotang}^2\theta, k) - \mathrm{F}(k)\right].$$

Or on a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}}{\sin\theta\cos\theta}\,\Pi(\operatorname{cotang}^2\theta, k) = \tfrac{1}{2}\pi + \mathrm{F}(k)\left[\operatorname{tang}\theta\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta} - \mathrm{E}(k', \theta)\right]\\ - \left[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right]\mathrm{F}(k', \theta)\end{aligned}$$

(Legendre, tome I, page 144), en sorte que

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= \frac{2}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}}\\ &\times \left\{\tfrac{1}{2}\pi + \mathrm{F}(k)\left[\operatorname{tang}\theta\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta} - \mathrm{E}(k', \theta)\right] - \left[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right]\mathrm{F}(k', \theta)\right\}\\ &- \frac{2\mathrm{F}(k, \theta)}{\sin\theta\cos\theta},\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}u = \pi\mathrm{F}(k', \theta) - 2\mathrm{F}(k)\Upsilon(k', \theta) - \left[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right]\left[\mathrm{F}(k', \theta)\right]^2\\ - 2\mathrm{F}(k)\log\sin\theta + \mathfrak{C}.\end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur de la constante $\mathfrak{C}$, faisons $\theta = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne $u = 0$, et l'on aura

$$\pi\mathrm{F}(k') - \mathrm{F}(k)\left[\mathrm{F}(k')\mathrm{E}(k') - \log k\right] - \left[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right]\left[\mathrm{F}(k')\right]^2 + \mathfrak{C} = 0.$$

Si l'on y substitue, pour π, sa valeur connue

$$2\left[\mathrm{F}(k)\mathrm{E}(k') + \mathrm{F}(k')\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\mathrm{F}(k')\right],$$

on obtiendra

$$\left[\mathrm{F}(k)\mathrm{E}(k') + \mathrm{F}(k')\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\mathrm{F}(k')\right]\mathrm{F}(k') + \mathrm{F}(k)\log k + \mathfrak{C} = 0,$$

ou bien encore

$$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(k') + \mathrm{F}(k)\log(k) + \mathfrak{C} = 0.$$

On trouve donc finalement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1+\operatorname{cotang}^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \\ &= \pi\,\mathrm{F}(k',\theta) - 2\mathrm{F}(k)\,\Upsilon(k',\theta) - [\mathrm{E}(k)-\mathrm{F}(k)]\,[\mathrm{F}(k',\theta)]^2 \\ &- 2\mathrm{F}(k)\log\sin\theta - \tfrac{1}{2}\pi\mathrm{F}(k') - \mathrm{F}(k)\log k. \end{aligned}\right.$$

3°. Soit $n = -1 + k'^2\sin^2\theta$, et l'on aura

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2k'^2\sin\theta\cos\theta}{1-k'^2\sin^2\theta}\,[\Pi(-1+k'^2\sin^2\theta, k) - \mathrm{F}(k)].$$

Mais Legendre a démontré (tome I, page 138) que

$$\begin{aligned}\frac{k'^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\,[\Pi(-1+k'^2\sin^2\theta, k) - \mathrm{F}(k)] &= \tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{F}(k)\,\mathrm{E}(k',\theta), \\ &- [\mathrm{E}(k)-\mathrm{F}(k)]\,\mathrm{F}(k',\theta),\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\left\{\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{F}(k)\,\mathrm{E}(k',\theta) - [\mathrm{E}(k)-\mathrm{F}(k)]\,\mathrm{F}(k',\theta)\right\},$$

et, en intégrant,

$$u = \pi\mathrm{F}(k',\theta) - 2\,\mathrm{F}(k)\,\Upsilon(k',\theta) - [\mathrm{E}(k)-\mathrm{F}(k)]\,[\mathrm{F}(k',\theta)]^2 + \mathfrak{C}.$$

Pour avoir la valeur de $\mathfrak{C}$, faisons $\theta = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne, comme on sait,

$$u = \log(k')\,\mathrm{F}(k),$$

et nous trouverons

$$\begin{aligned}\log(k')\,\mathrm{F}(k) &= \pi\mathrm{F}(k') - \mathrm{F}(k)\,[\mathrm{F}(k')\,\mathrm{E}(k') - \log k] \\ &- [\mathrm{E}(k)-\mathrm{F}(k)]\,[\mathrm{F}(k')]^2 + \mathfrak{C},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, après quelques réductions,

$$\mathfrak{C} = \log\left(\frac{k'}{k}\right)\mathrm{F}(k) - \tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{F}(k'),$$

et, par conséquent,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1-(1-k'^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi]}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \\ &= \pi F(k',\theta) - 2F(k)\Upsilon(k',\theta) - [E(k)-F(k)][F(k,\theta)]^2 \\ &\qquad + \log\left(\frac{k'}{k}\right)F(k) - \tfrac{1}{2}\pi F(k'). \end{aligned}\right.$$

2. Dans l'équation (1), faisons

$$\sin^2\theta = \frac{1}{1+k'},$$

c'est-à-dire, soit θ l'amplitude qui sert à la bissection de la fonction complète, et nous aurons

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos^2\varphi + k'\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \tfrac{1}{4}F(k)E(k) - 2F(k)\Upsilon(k,\theta).$$

Maintenant, Legendre a démontré [*] que

$$\Upsilon(\psi) = 4\Upsilon(\varphi) + \log(1-k^2\sin^4\varphi),$$

lorsque les deux amplitudes ψ et φ satisfont à la formule de duplication,

$$F(k,\psi) = 2F(k,\varphi).$$

Dans cette relation, mettons $\psi = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera $\varphi = \theta$, et nous aurons

$$4\Upsilon(k,\theta) = \tfrac{1}{2}F(k)E(k) - \log\left(\frac{2k'\sqrt{k'}}{1+k'}\right),$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos^2\varphi + k'\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2k'\sqrt{k'}}{1+k'}\right)F(k),$$

résultat qui coïncide avec la formule (23) de mon Mémoire déjà cité.

3. Si dans l'équation (3), on pose $\theta = 0$, on obtiendra

$$(4)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{k'}{k}\right)F(k) - \tfrac{1}{4}\pi F(k').$$

---

[*] *Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, n° 188.

Maintenant, transformons l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

en prenant un nouvel angle ψ donné par la formule

$$k' \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = 1,$$

ce qui nous fera voir sans difficulté que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{k'\operatorname{tang}\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right)\mathrm{F}(k).$$

Combinant encore les équations (4) et (5) entre elles, on parviendra à la formule suivante:

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k}\right)\mathrm{F}(k) - \tfrac{1}{4}\pi\mathrm{F}(k').$$

En se rappelant que la limite de $\mathrm{F}(k')$ est $\left(\frac{4}{k}\right)$, lorsque k devient très-petit, on déduira facilement, des équations (4) et (6), les résultats bien connus, savoir

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\sin\varphi)\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2}.$$

4. A cause de la liaison de notre intégrale (u) avec la théorie des fonctions elliptiques, il est bon de remarquer qu'elle peut s'écrire de la manière suivante. Soient x une fonction de première espèce au module k, $\mathrm{A}(x)$ son amplitude, et X la fonction complète, et il est évident que

$$u = \int_0^{\mathrm{X}} \log[1 + n\sin^2\mathrm{A}(x)]\,dx.$$

Je finirai en mentionnant qu'il existe une relation très-simple entre les fonctions complètes de troisième espèce,

$$\Pi(k^2 \operatorname{tang}^2 \theta, k) \quad \text{et} \quad \Pi(-k'^2 \sin^2 \theta, k'),$$

dont les modules sont complémentaires, et dont les paramètres ont des caractères opposés; en effet, on a

$$\begin{aligned}\Pi(k^2 \operatorname{tang}^2 \theta, k)\, F(k') - \cos^2\theta\, \Pi(-k'^2 \sin^2 \theta, k')\, F(k) \\ = \tfrac{1}{2}\pi \frac{\sin\theta \cos\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\theta}}\, F(k', \theta),\end{aligned}$$

comme on peut le prouver en substituant, au lieu des fonctions Π, leurs valeurs en F et E; ou bien encore, à priori, par les mêmes considérations de géométrie, dont M. Chasles a fait usage pour démontrer la relation de Legendre entre les fonctions complètes F, E, aux modules complémentaires, c'est-à-dire par l'emploi des coordonnées elliptiques.