

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la décomposition des fractions rationnelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 11 (1846), p. 462-463.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__462_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES ;

PAR J. LIOUVILLE.

Soit $x^n + Px^{n-1} + \dots$ ou $F(x)$ un polynôme de degré n , et $Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots$ ou $f(x)$ un polynôme de degré $(n-1)$ au plus. Considérons l'équation de degré n ,

$$F(x) + \alpha f(x) = 0,$$

α désignant un paramètre indéterminé qui n'entre ni dans $F(x)$, ni dans $f(x)$. La somme des racines x s'exprimera par une fonction linéaire de ce paramètre, et, en la représentant par $\sum x$, on aura

$$\sum x = -P - \alpha A,$$

d'où

$$\sum \frac{dx}{d\alpha} = -A.$$

Mais l'équation

$$F(x) + \alpha f(x) = 0$$

donne

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{f(x)}{F'(x) + \alpha f'(x)},$$

donc

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x) + \alpha f'(x)} = A.$$

En faisant $\alpha = 0$, cette formule prend une forme plus simple, et l'on a

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x)} = A,$$

le signe $\sum$ se rapportant actuellement aux racines de

$$F(x) = 0,$$

racines que nous supposerons toutes inégales entre elles, ce qui est le cas général.

Si $f(x)$ n'est que de degré $(n - 2)$ au plus, alors A est nul, et il vient

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x)} = 0.$$

Or on sait que cette formule contient implicitement toute la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Et, en effet, si on l'applique au cas de

$$F(x) = (x - t) \varphi(x),$$

on en déduira de suite la formule fondamentale

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \sum \frac{f(x)}{(t - x) \varphi'(x)},$$

où le signe $\sum$ se rapporte aux racines de

$$\varphi(x) = 0,$$

et dans le premier membre de laquelle le degré du numérateur est inférieur au moins d'une unité à celui du dénominateur.