

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une transformation de l'équation $\sin \theta \frac{d \cdot \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + n(n+1) \sin^2 \theta \cdot \Phi = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 11 (1846), p. 458-461.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__458_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR UNE TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION

$$\sin \theta \frac{d \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2 \Phi}{d\varpi^2} + n(n+1) \sin^2 \theta \cdot \Phi = 0;$$

PAR J. LIOUVILLE.

Cette équation

$$(1) \quad \sin \theta \frac{d \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2 \Phi}{d\varpi^2} + n(n+1) \sin^2 \theta \cdot \Phi = 0$$

est celle qui définit les fonctions Y_n de la *Mécanique céleste*. En substituant aux variables θ et ϖ deux autres variables μ et ν , liées aux premières par les équations

$$\frac{\mu\nu}{bc} = \cos \theta, \quad \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - \nu^2}}{b \sqrt{c^2 - b^2}} = \sin \theta \cos \varpi, \quad \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}}{c \sqrt{c^2 - b^2}} = \sin \theta \sin \varpi,$$

dont l'une quelconque rentre dans les deux autres, c'est-à-dire en prenant

$$\cos \theta = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \text{tang } \varpi = \frac{b \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}}{c \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - \nu^2}},$$

on la transforme dans la suivante :

$$(2) \quad \frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2 \Phi}{d\kappa^2} + n(n+1)(\mu^2 - \nu^2) \Phi = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} = d\eta, \quad \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} = d\kappa.$$

Et réciproquement on peut passer de l'équation (2) à l'équation (1) par une transformation inverse. La liaison intime qu'on reconnaît ainsi exister entre ces deux équations entraîne d'importantes conséquences,

comme on a pu le voir, par exemple, dans ma seconde Lettre à M. Blanchet (page 279 du présent volume). Je vais ici entrer dans tous les détails du calcul. On a besoin, en effet, de quelque artifice pour éviter de tomber dans des opérations d'une longueur rebutante.

D'abord, en faisant

$$\log \tanh \frac{1}{2} \theta = t, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{\sin \theta} = dt, \quad \cos \theta = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}},$$

le premier membre de l'équation (1) devient

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{d^2 \Phi}{d\varpi^2} + n(n+1) \sin^2 \theta \cdot \Phi = 0.$$

C'est cette dernière expression qu'il s'agit de transformer en partant de

$$\frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \tanh \varpi = \frac{b \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}}{c \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - \nu^2}},$$

et comme on a de suite

$$n(n+1) \sin^2 \theta \cdot \Phi = n(n+1) \frac{b^2 c^2 - \mu^2 \nu^2}{b^2 c^2} \cdot \Phi,$$

on n'a besoin de s'occuper que des deux premiers termes

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{d^2 \Phi}{d\varpi^2}.$$

Pour cela, je me servirai du lemme suivant qui est bien connu et dont la démonstration s'offre d'ailleurs d'elle-même: « Si, en exprimant deux » variables t et ϖ , dont Φ dépend, par deux autres η , κ , on trouve

$$dt^2 + d\varpi^2 = q (d\eta^2 + d\kappa^2),$$

» il faudra en conclure que

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2 \Phi}{d\kappa^2} = q \left(\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{d^2 \Phi}{d\varpi^2} \right). \quad »$$

Montrons que la valeur de $dt^2 + d\varpi^2$ est, en effet, de la forme indiquée.

La relation entre $\mu\nu$ et t donne

$$e^{2t} = \frac{bc - \mu\nu}{bc + \mu\nu}, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{1}{2} \log (bc - \mu\nu) - \frac{1}{2} \log (bc + \mu\nu);$$

donc

$$dt = - \frac{bc(\mu dv + v d\mu)}{b^2 c^2 - \mu^2 v^2}.$$

En posant

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} = d\eta, \quad \frac{dv}{\sqrt{(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}} = d\chi,$$

cette valeur de dt devient

$$dt = - \frac{bc}{b^2 c^2 - \mu^2 v^2} [\mu \sqrt{(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)} \cdot d\chi + v \sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} \cdot d\eta].$$

D'un autre côté, l'équation

$$\text{tang } \varpi = \frac{b \sqrt{c^2 - \mu^2} \sqrt{c^2 - v^2}}{c \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{b^2 - v^2}}$$

donne

$$\cos^2 \varpi = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 \varpi} = \frac{c^2 (\mu^2 - b^2) (b^2 - v^2)}{(c^2 - b^2) (b^2 c^2 - \mu^2 v^2)},$$

et

$$\frac{d\varpi}{\cos^2 \varpi} = \frac{b}{c} \left(\frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} d \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{b^2 - v^2}} + \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{b^2 - v^2}} d \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \right).$$

A cause de

$$\begin{aligned} d \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{b^2 - v^2}} &= \frac{(c^2 - b^2) v dv}{(c^2 - v^2) \sqrt{(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}} = \frac{(c^2 - b^2) v d\chi}{c^2 - v^2}, \\ d \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} &= - \frac{(c^2 - b^2) \mu d\mu}{(\mu^2 - b^2) \sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} = - \frac{(c^2 - b^2) \mu d\eta}{\mu^2 - b^2}, \end{aligned}$$

on en conclut facilement

$$d\varpi = \frac{bc}{b^2 c^2 - \mu^2 v^2} [v \sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} \cdot d\chi - \mu \sqrt{(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)} \cdot d\eta].$$

Enfin, les expressions de dt et $d\varpi$ réunies donnent

$$dt^2 + d\varpi^2 = \frac{b^2 c^2 (\mu^2 - v^2)}{b^2 c^2 - \mu^2 v^2} (d\eta^2 + d\chi^2).$$

Donc, par le lemme invoqué,

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{d^2 \Phi}{d\varpi^2} = \frac{b^2 c^2 - \mu^2 v^2}{b^2 c^2 (\mu^2 - v^2)} \left(\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2 \Phi}{d\chi^2} \right).$$

Ainsi le premier membre de l'équation (1) est identiquement égal à

$$\frac{b^2c^2-\mu^2\nu^2}{b^2c^2(\mu^2-\nu^2)} \left[\frac{d^2\Phi}{dn^2} + \frac{d^2\Phi}{dx^2} + n(n+1)(\mu^2-\nu^2)\Phi \right].$$

Par suite, l'équation (1) elle-même se transforme dans l'équation (2), et réciproquement.

On satisfait, comme on sait, à l'équation (2) par une expression de la forme ΣAMN contenant $2n+1$ constantes arbitraires A et $2n+1$ produits MN d'une fonction entière de $\mu, \sqrt{\mu^2-b^2}, \sqrt{c^2-\mu^2}$ par une fonction semblable de $\nu, \sqrt{b^2-\nu^2}, \sqrt{c^2-\nu^2}$, et l'on est ainsi conduit à exprimer les fonctions Y_n , et par suite des fonctions quelconques où les variables sont prises entre certaines limites, par une somme de produits MN . Voyez sur ce point la Lettre citée.

