

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

WILLIAM ROBERTS

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 11 (1846), p. 343-344.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1846\\_1\\_11\\_\\_343\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__343_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

« 6 juillet 1876.

» ..... Aux intégrales contenues dans l'article que vous avez bien voulu insérer dans votre Journal (cahier de mai, page 157), on peut ajouter les suivantes, qui valent la peine d'être mentionnées.

» En conservant les notations qui se trouvent dans ce Mémoire, on a l'équation (22)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \left( \frac{1}{\Delta} \right) \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\Delta^3} \\ = \frac{1}{2k^2 k'^2} \left\{ \left[ 1 + k'^2 - k'^2 \log \left( \frac{1}{k'} \right) \right] F(k) - \left[ 2 - \log \left( \frac{1}{k'} \right) \right] E(k) \right\}.$$

D'ailleurs, il est évident que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \left( \frac{1}{\Delta} \right) \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \left( \frac{1}{\Delta} \right) \frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \left( \frac{1}{\Delta} \right) \frac{d\varphi}{\Delta},$$

ce qui donne, en substituant pour  $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \left( \frac{1}{\Delta} \right) \frac{d\varphi}{\Delta}$  sa propre valeur, tirée de l'équation (18),

$$(a) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \left( \frac{1}{\Delta} \right) \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2k'^2} \left\{ (1 + k'^2) F(k) + \left[ \log \left( \frac{1}{k'} \right) - 2 \right] E(k) \right\}.$$

» Maintenant faisons, dans l'équation (17),

$$f(\Delta) = \frac{1}{\Delta^3} \log \left( \frac{1}{\Delta} \right),$$

et nous en concluons, à l'aide de l'équation (a),

$$(b) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \left( \frac{1}{\Delta} \right) \Delta d\varphi = \frac{1}{2} \left\{ \left[ 2 + \log \left( \frac{1}{k'} \right) \right] E(k) - (1 + k'^2) F(k) \right\}.$$

» On peut encore déduire de l'équation (b), par l'intégration par parties, l'intégrale suivante

$$(c) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{E(k, \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2k^2} \left\{ (1 + k'^2) F(k) + \left[ \log \left( \frac{1}{k'} \right) - 2 \right] E(k) \right\}.$$

» Il serait assez facile de trouver beaucoup d'autres intégrales qui appartiennent à cette classe. J'ai mentionné les formules (a), (b), (c), parce qu'elles paraissent être, en quelque sorte, fondamentales. »

