

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Remarques sur l'équation $y'' + \frac{m}{x}y' + ny = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 11 (1846), p. 338-340.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11_338_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

REMARQUES SUR L'ÉQUATION

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0;$$

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

1. Si $y = v$ satisfait à l'équation

$$(1) \quad y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0,$$

$y = x^m \cdot v'$ satisfera à l'équation

$$(2) \quad y'' - \frac{m}{x} y' + ny = 0.$$

Plus généralement, si $y = v$ satisfait à l'équation

$$y'' + Py' + ny = 0,$$

$y = v' \cdot e^{\int P dx}$ satisfera à l'équation

$$y'' - Py' + ny = 0.$$

La substitution donne, en effet,

$$y'' - Py' + ny = e^{\int P dx} (v'' + Pv' + nv)' = 0.$$

Par ce théorème, l'intégration de l'équation (2) est ramenée à celle de l'équation (1), où m est supposé positif.

2. Si $y = v$ satisfait à l'équation (1), $y = \frac{1}{x} v'$ satisfera à l'équation

$$(3) \quad y'' + \frac{m+2}{x} y' + ny = 0.$$

On trouve, en effet,

$$y'' + \frac{m+2}{x} y' + ny = \frac{1}{x} \left(v'' + \frac{m}{x} v' + nv \right)' = 0.$$

Ce théorème ramène le cas général de m positif à celui de $m < 2$.

3. Si dans l'équation (1) on pose $y = x^{1-m}u$, on aura

$$(4) \quad u'' + \frac{2-m}{x} u' + nu = 0.$$

On ramène ainsi le cas de m compris entre 1 et 2 à celui de m compris entre 0 et 1.

Le cas de m entier pair est ramené à celui $m = 0$, et celui de m entier impair à celui de $m = 1$.

4. Si v satisfait à l'équation (1), on satisfera aux équations

$$(5) \quad y'' + \left(\frac{2i+m}{x}\right) y' + ny = 0,$$

$$(6) \quad y'' - \left(\frac{2i+m}{x}\right) y' + ny = 0,$$

où l'on suppose i entier positif, par les formules

$$(7) \quad y = \frac{1}{x} \left\{ \left[\frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} \dots \left(\frac{1}{x} v' \right)' \right] \dots \right]' \right\},$$

$$(8) \quad y = x^{2i+m} \left\{ \left[\frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} \dots \left(\frac{1}{x} v' \right)' \right] \dots \right]' \right\},$$

la première renfermant i dérivations, et la seconde $i + 1$.

C'est la conséquence immédiate des nos 1 et 2.

5. Si dans les formules (7) et (8) on fait

$$\begin{aligned} v &= c \sin x \sqrt{n} + c_1 \cos x \sqrt{n} && \text{pour } n \text{ positif,} \\ v &= c e^{x\sqrt{-n}} + c_1 e^{-x\sqrt{-n}} && \text{pour } n \text{ négatif,} \end{aligned}$$

on aura, sous forme finie, les intégrales complètes des équations (1) et (2) pour le cas de $m = 2i$ entier positif pair.

C'est le cas de $m = 0$ dans les équations (5) et (6). Alors l'équation $v'' + nv = 0$ est satisfaite par les valeurs de v données plus haut.

Les formules (7) et (8) pourront, quand m n'est pas un entier pair, servir à faciliter l'emploi de la formule qui donne y au moyen d'intégrales définies, cette formule étant en défaut quand m n'est pas compris entre 0 et 2.

Dans un Mémoire intitulé : *Nouvelles remarques sur l'équation de Riccati* (tome VI de ce Journal, page 13), M. Liouville s'exprime

ainsi : « Pour que l'équation

$$y'' = y \left(A + \frac{B}{x^2} \right),$$

» où la constante A est supposée essentiellement différente de zéro,
 » puisse être satisfaite en prenant pour y une fonction de x expri-
 » mable par un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et
 » logarithmiques, et de signes f indiquant des intégrales indéfinies re-
 » latives à la variable x , il est nécessaire et suffisant que B soit de
 » forme $\beta(\beta + 1)$, β étant un entier nul ou positif. Cette condition
 » étant remplie, on pourra exprimer, à l'aide des signes indiqués et
 » même à l'aide des seuls signes algébriques et exponentiels, l'inté-
 » grale complète de l'équation

$$y'' = y \left(A + \frac{B}{x^2} \right). \text{ »}$$

Or, si l'on fait $y = x^{-\frac{m}{2}} z$, l'équation

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0$$

se réduit à

$$z'' = z \left(-n + \frac{\frac{m^2 - 2m}{4}}{x^2} \right),$$

et si l'on pose $\frac{m^2 - 2m}{4} = \beta(\beta + 1)$, il en résulte

$$(m - 1)^2 = (2\beta + 1)^2;$$

d'où, pour m positif,

$$m = 2(\beta + 1),$$

et, pour m négatif,

$$-m = 2\beta.$$

On ne peut donc intégrer l'équation

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0,$$

sous forme finie, que pour m pair positif ou négatif.