JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Extrait d'une lettre adressée à M. J. Steiner

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 237-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__237_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. J. STEINER,

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

(Extrait du Journal de M. Crelle, t. XII, p. 137, année 1834. — Traduction de M. ARISTIDE MARRE.)

L'énoncé complet d'une proposition que je t'ai communiquée autrefois, est le suivant :

1. « Deux surfaces du deuxième degré, un ellipsoïde et un hyperboloïde à une nappe, étant confocales; en d'autres termes, leurs sections principales ayant les mêmes foyers, si un point quelconque K de l'hyperboloïde est pris pour le sommet d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde, les deux génératrices de l'hyperboloïde, qui passent par ce même point, sont les lignes focales de ce cône. »

Cette proposition est loin de me paraître sans importance, elle est susceptible encore de plus de généralité, et l'on peut lui joindre une proposition réciproque. Elle conduit à de nombreuses conséquences dans certains cas intéressants. Par exemple, en voici un corollaire :

2. « Les cônes circonscrits à une série de surfaces confocales du deuxième degré, et ayant leurs sommets en un même point quelconque K, ont les mêmes lignes focales et les mêmes axes. »

Un cas que je veux particulièrement mentionner s'énonce ainsi :

3. « Si un point K du plan de l'hyperbole h [qui, d'après ton théorème, est le lieu des sommets de tous les cônes droits que l'on peut circonscrire à un ellipsoïde (*)] est pris pour le sommet d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde E, les tangentes à l'hyperbole h, issues du point K, sont les lignes focales du cône. Si le point K est situé sur l'hyperbole h, alors les tangentes se réunissent en *une seule*, les lignes focales se confondent, et le cône devient *droit;* » c'est là ton théorème.

La proposition inverse ou réciproque s'énonce :

« Étant donnés une surface quelconque du deuxième degré, F, et

(*) Journal de M. Crelle, tome I, page 47.

» un point quelconque, M, il existe, en général, une série de cônes » droits (du second degré), dont les sommets sont en M, et qui » coupent la surface F suivant des courbes planes (sections coniques), » les plans de toutes ces courbes se rencontrent mutuellement en un » point N, et enveloppent une surface conique quelconque du » second degré (N). Si par le point N on mène un plan à vo» lonté, qui coupe la surface F suivant une conique k, et le cône (N) » suivant deux arêtes a, b, alors le cône (Mk) qui passe par k, et dont » le sommet est en M, a pour plans cycliques les plans (Ma), (Mb), » déterminés par le point M et par les arêtes a, b, c'est-à-dire que » tout autre plan parallèle à l'un de ces deux-là coupe le cône (Mk) » suivant un cercle. »

On déduit aisément du théorème d'Ivory sur les surfaces du second degré dont les sections principales sont confocales, le théorème que tu as autrefois trouvé dans tes recherches sur les contacts des sphères, et qui plus tard entra dans le domaine public, grâce aux mathématiciens français, c'est-à-dire la proposition qui suit :

4. « Si deux sections coniques (ellipse et hyperbole), situées dans » deux plans perpendiculaires entre eux, sont telles que chacune » d'elles ait pour sommets les foyers de l'autre, l'une quelconque de » ces courbes sera le lieu des sommets de tous les cônes droits qui » auront l'autre courbe pour base; et tout couple de points appar» tenant à l'une de ces courbes sera un système de foyers (dans l'es» pace) de l'autre; c'est-à-dire que si l'on prend sur l'hyperbole deux » points quelconques, la *somme* ou la *différence* de leurs distances à » chaque point de l'ellipse, selon qu'ils sont situés sur les deux bran» ches ou sur une seule, a une valeur constante, et réciproquement : » deux points de l'ellipse jouissent de cette propriété, que la différence » de leurs distances à chaque point de l'hyperbole est constante, etc. »

Du théorème d'Ivory dérivent encore d'autres propositions sur la génération des surfaces et des lignes du deuxième degré, qui sont respectivement analogues, et qui renferment en elles-mêmes, sous un rapport, comme cas particuliers, les propriétés des foyers; telles sont les propositions suivantes :

5. « Étant pris dans l'espace trois points fixes quelconques a, b, c,

» et trois autres points quelconques A, B, C, qui correspondent aux » premiers, si l'on conçoit, par rapport à ces points fondamentaux, » deux séries de points x, X, tels que leurs distances aux points res- » pectifs de chacun des deux systèmes soient égales, c'est-à-dire tels » que $xa = XA$, $xb = XB$, $xc = XC$, alors on a un système de cor- » rélation, dans lequel le point X décrit une surface quelconque du » deuxième degré, quand le point x se meut sur un plan, et récipro- » quement. »

6. « Étant pris dans deux plans différents (ou bien dans un seul) » deux couples (a et b), (A et B) de points fixes ou principaux, si de » plus les autres points de ces plans sont tels que, pour chaque cou- » ple (x et X) de points correspondants, les distances aux points fixes » soient respectivement égales, ainsi $ax = AX$ et $bx = BX$: alors on » a un système de relation, dans lequel, à toute droite située sur un » plan correspond une section conique dans l'autre; en d'autres » termes, si le point x, par exemple, se meut suivant une droite » quelconque g, le point correspondant X décrit une section co- » nique G. »

Ces théorèmes (**5** et **6**) me paraissent donner lieu à de nombreuses recherches que je n'entreprendrai pourtant point en ce moment. Ainsi, une discussion approfondie du dernier théorème (**6**) donne tout d'abord les résultats suivants :

7. « Si le point x décrit l'axe fondamental ab lui-même, le point X » a pour lieu une section conique qui a pour foyers les points fixes » A et B, et dont le grand axe est égal à la droite ab; ce qui est le » théorème bien connu sur les foyers de la section conique. »

« L'un des deux axes de la section conique G, qui correspond à » une droite g, prise à volonté (**6**), est couché sur l'axe fondamental » AB. »

« Concevons, dans le premier plan, la conique k correspondante à » l'axe principal AB, et qui a, par conséquent, pour foyers les points » fixes a et b. Si la droite AB est plus grande que ab, alors k est une » ellipse, et à la droite g correspond une hyperbole G, dont le *pre-* » *mier* ou le *second* axe est couché sur l'axe fondamental AB, selon » que la droite g *coupe* ou ne *coupe pas* la section conique k; si elle

» la touche, alors la section conique G consiste en deux droites qui » se croisent en un point quelconque de l'axe AB, et lui sont également inclinées; si $2(ab)^2 > (AB)^2$, il existe deux directions déterminées pour la droite g, auquel cas les hyperboles *équilatères* G lui » correspondent; les asymptotes de toutes ces hyperboles équilatères » sont parallèles entre elles, ou ces hyperboles ont deux points communs situés à l'infini. Si l'axe AB est plus petit que ab, alors k est » une hyperbole, et à la droite g correspond une *ellipse* G ou une *hyperbole* G, selon que la droite g', tirée parallèlement à g par le centre de l'hyperbole k, est située dans l'angle *intérieur* ou *extérieur* » des asymptotes de cette hyperbole; si g offre le cas singulier du parallélisme avec une asymptote de l'hyperbole k, alors G est une parabole. Il existe aussi deux directions déterminées de la droite g, pour » lesquelles lui correspond toujours une hyperbole équilatère G; si » g est perpendiculaire à l'axe ab, alors elle a toujours pour correspondante une droite G (ou proprement un système de deux droites » qui coïncident) qui sera à angle droit sur l'axe AB, etc. Si, au lieu » d'être une droite, g est une courbe du degré n, alors il lui correspond une courbe G du degré $2n$, etc. »

De semblables résultats se déduisent du premier théorème (5). Il existe une proposition analogue à la précédente (6), pour un faisceau de rayons dans l'espace, ou sur la sphère, et même, d'après le principe de la réciprocité, elle a lieu en une double forme. Au reste, on peut encore produire de cette manière d'autres systèmes de relation si, au lieu des conditions simples ci-dessus mentionnées (5 et 6), on en admet de différentes.

Le théorème d'Ivory fait voir, en outre, que la courbe à double courbure, suivant laquelle se coupent deux surfaces du deuxième degré, peut aussi avoir des foyers (dans l'espace), et qu'ainsi il existe, pour chaque courbe à double courbure de l'ellipsoïde, deux points fixes déterminés, et faciles à construire d'après cette propriété, que la somme de leurs distances à chaque point de la courbe est constante. C'est sur ce principe que se fonde une génération organique facile de la courbe à double courbure, etc.