

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-F. SVANBERG

Sur les intégrales définies $\int_0^\infty \frac{e^{-3x} \cdot x^{m-1} dx}{1+x^2}, \int_0^\infty \frac{\cos \beta x \cdot x^{m-1} dx}{1+x^2}, \int_0^\infty \frac{\sin \beta x \cdot x^{m-1} dx}{1+x^2}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 11 (1846), p. 197-200.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__197_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos \beta x x^{m-1} dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin \beta x x^{m-1} dx}{1+x^2};$$

PAR M. A.-F. SVANBERG.

On a la formule connue

$$(1) \quad \int_0^\infty e^{-ux} x^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m)}{u^m},$$

qui suppose $m > 0$. En la multipliant par $\sin(u - \beta) du$, et l'intégrant entre les limites $u = \beta$ et $u = \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1+x^2} &= \Gamma(m) \int_\beta^\infty \frac{\sin(u - \beta) du}{u^m} \\ &= \Gamma(m) \int_0^\infty \frac{\sin(u - \beta) du}{u^m} - \Gamma(m) \int_0^\beta \frac{\sin(u - \beta) du}{u^m}, \end{aligned}$$

ou nous prenons $m < 1$; or, dans cette hypothèse, on a

$$\begin{aligned} \int_u^\infty \frac{\sin(u - \beta) du}{u^m} &= \cos \beta \int_0^\infty \frac{\sin u du}{u^m} - \sin \beta \int_0^\infty \frac{\cos u du}{u^m} \\ &= \Gamma(1 - m) \cos \frac{m\pi}{2} \cos \beta - \Gamma(1 - m) \sin \frac{m\pi}{2} \sin \beta \\ &= \Gamma(1 - m) \cos \left(\frac{m\pi}{2} + \beta \right). \end{aligned}$$

et, de plus,

$$\Gamma(m) \Gamma(1 - m) = \frac{\pi}{\sin m\pi};$$

il vient donc

$$(2) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1+x^2} = \frac{\pi \cos \left(\frac{m\pi}{2} + \beta \right)}{\sin m\pi} + \Gamma(m) \sin \beta \int_0^\beta \frac{\cos u du}{u^m} - \Gamma(m) \cos \beta \int_0^\beta \frac{\sin u du}{u^m}.$$

En mettant dans cette formule $\beta\sqrt{-1}$ au lieu de β , on trouve la valeur des deux autres intégrales proposées; mais cette méthode n'étant pas à l'abri de toute objection, il conviendra mieux de les chercher directement. Considérons, pour cela, l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \cos ux \cdot x^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}}{u^m}.$$

En multipliant par $e^{-u} du$, et intégrant entre les limites $u = \beta$ et $u = \infty$, on trouve

$$e^{-\beta} \int_0^\infty \frac{x^{m-1} dx (\cos \beta x - x \sin \beta x)}{1+x^2} = \Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2} \int_\beta^\infty \frac{e^{-u} du}{u^m}.$$

Soit maintenant

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta x \cdot x^{m-1} dx}{1+x^2} = z,$$

nous aurons

$$- \int_0^\infty \frac{\sin \beta x \cdot x^m dx}{1+x^2} = \frac{dz}{d\beta},$$

par où l'équation précédente deviendra

$$\frac{dz}{d\beta} + z = -\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2} e^\beta \int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m}.$$

Cette équation différentielle en β devient intégrable en la multipliant par $e^\beta d\beta$, et l'on obtient

$$ze^\beta = C - \Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2} \int_0^\beta \left(e^{2\beta} d\beta \int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \right).$$

L'intégration *par parties* donne

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \left(e^{2\beta} d\beta \int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \right) &= \frac{e^{2\beta} - 1}{2} \int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2} \int_0^\beta (e^{2\beta} - 1) \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \\ &= -\frac{e^{2\beta} - 1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} + \frac{e^{2\beta} - 1}{2} \int_0^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2} \int_0^\beta (e^\beta - e^{-\beta}) \frac{d\beta}{\beta^m} \\ &= -\frac{e^{2\beta} - 1}{2} \frac{\Gamma(1-m)}{\sin m\pi} + \frac{e^{2\beta}}{2} \int_0^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2} \int_0^\beta \frac{e^\beta d\beta}{\beta^m}; \end{aligned}$$

et, si l'on détermine la constante C par la supposition de $\beta = 0$, ce qui donne

$$C = -\frac{\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{2}},$$

nous aurons enfin, à cause de $\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{2}}$,

$$(3) \left\{ \begin{aligned} z &= \int_0^\infty \frac{\cos \beta x \cdot x^{m-1} dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{4 \sin \frac{m\pi}{2}} (e^\beta + e^{-\beta}) + \frac{\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}}{2} \left(e^{-\beta} \int_0^\beta \frac{e^\beta d\beta}{\beta^m} - e^\beta \int_0^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \right). \end{aligned} \right.$$

On trouve, d'une manière semblable,

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sin \beta x \cdot x^{m-1} dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{4 \cos \frac{m\pi}{2}} (e^\beta - e^{-\beta}) + \frac{\Gamma(m) \sin \frac{m\pi}{2}}{2} \left(e^{-\beta} \int_0^\beta \frac{e^\beta d\beta}{\beta^m} - e^\beta \int_0^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on multiplie la formule (3) par $\sin \frac{m\pi}{2}$, et la formule (4) par $\cos \frac{m\pi}{2}$, et qu'on prenne la différence, il viendra l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \frac{\sin \left(\frac{m\pi}{2} - \beta x \right) \cdot x^{m-1} dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-\beta}.$$

Le premier membre de la formule (2) équivaut à quelques autres intégrales définies bien simples, et qui dépendront, par conséquent, des mêmes transcendentes que celle-là. Pour le faire voir, changeons u en $\beta + \varphi$ dans la formule (1), ce qui donne

$$(5) \quad \int_0^\infty e^{-\beta x} e^{-\varphi x} \cdot x^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m)}{(\beta + \varphi)^m}.$$

En multipliant par $\sin \varphi d\varphi$, intégrant entre les limites 0 et ∞ , et obser-

vant que

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{1+x^2},$$

il viendra

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1+x^2} = \Gamma(m) \int_0^\infty \frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{(\beta + \varphi)^m}.$$

De même si l'on multiplie la formule (5) par $\cos \varphi \cdot d\varphi$, et qu'on y change m en $m-1$, l'intégration entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \infty$ donnera

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1+x^2} = \Gamma(m-1) \int_0^\infty \frac{\cos \varphi \cdot d\varphi}{(\beta + \varphi)^{m-1}}.$$