

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINNE

Sur l'interpolation

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 11 (1846), p. 177-183.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__177_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR L'INTERPOLATION;

PAR M. E. BRASSINNE,

Professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse.

1°. Les principales formules d'interpolation données par les géomètres peuvent se déduire assez simplement d'une formule générale qui les comprend toutes comme cas particuliers.

Supposons qu'une fonction de la variable x , que nous désignerons par u , devienne, pour des valeurs particulières $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ de la variable, successivement égale à $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$. Nous pourrions représenter la fonction u par la formule

$$(1) \quad u = \frac{A_0 u_0 (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m) + A_1 u_1 (x-x_0)\dots(x-x_m) + \dots + A_m u_m (x-x_0)\dots(x-x_{m-1})}{A_0 (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m) + A_1 (x-x_0)\dots(x-x_m) + \dots + A_m (x-x_0)\dots(x-x_{m-1})}.$$

$A_0, A_1, \dots, A_m$ peuvent être des fonctions arbitraires de x , ou des quantités numériques quelconques. Les facteurs binômes qui multiplient, au numérateur ou au dénominateur, une fonction quelconque A_p , sont au nombre de m , et ils sont formés en retranchant de la variable x chacune de ses valeurs particulières, à l'exception de x_p . De cette forme générale nous allons conclure, en assignant des valeurs particulières aux indéterminées $A_0, A_1, \dots, A_m$, les formules les plus connues.

2°. Si nous voulons que la formule d'interpolation soit un polynôme entier en x du degré m , il suffira de déterminer $A_0, A_1, \dots, A_m$, regardés comme des quantités numériques, de telle sorte que la variable disparaisse au dénominateur de la formule générale; or, ce dénominateur est un polynôme du degré m ; s'il prend une valeur déterminée pour les $(m+1)$ valeurs particulières de x , il faudra qu'il soit nécessairement constant, sans quoi, retranchant du dénominateur cette valeur déterminée, on obtiendrait une équation algébrique du degré m qui aurait $m+1$ racines différentes, ce qui est absurde. Or, en désignant par

$D_0, D_1, D_2, \dots, D_m$ ce que deviennent au dénominateur les produits binômes qui multiplient $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ quand on fait successivement

$$x = x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_m,$$

et représentant par C la valeur déterminée du dénominateur pour ces diverses hypothèses, on devra avoir

$$C = A_0 D_0, \quad C = A_1 D_1, \quad C = A_2 D_2, \dots, \quad C = A_m D_m,$$

égalités auxquelles on peut satisfaire en posant

$$A_0 = D_1 D_2 \dots D_m, \quad A_1 = D_0 D_2 \dots D_m, \dots$$

Le dénominateur de la formule (1) devient alors égal à la quantité constante $D_0 D_1 D_2 \dots D_m$, et, si l'on remplace, au numérateur, $A_0, A_1, \dots, A_m$ par leurs valeurs, on obtiendra la formule d'interpolation de Lagrange :

$$(2) \quad u = \frac{u_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{D_0} + \frac{u_1 (x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{D_1} + \dots$$

Si, dans cette formule, on suppose

$$u_0 = u_1 = u_2 = \dots = u_m,$$

u_0 sera facteur commun au second membre, et il multipliera une expression de la forme

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_m)} + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_m)} + \dots;$$

les numérateurs sont les produits m à m des $m + 1$ binômes; chaque numérateur est divisé par la quantité numérique qui exprime ce que devient ce numérateur lorsque la variable x est changée en cette lettre affectée de l'indice qui manque aux secondes lettres des binômes: or, il est visible que cette expression algébrique du degré m se réduit à l'unité pour les $m + 1$ valeurs de x égales à $x_0, x_1, \dots, x_m$; elle est donc constante et égale à l'unité. Cette remarque, qui était bien connue, nous sera utile dans ce qui suit.

3°. Si u doit être exprimé par une fraction dont le numérateur soit constant, et le dénominateur une fonction de x du degré m , nous déterminerons $A_0, A_1, \dots, A_m$ par la condition que le numérateur ait tou-

jours la même valeur déterminée C pour $x = x_0 = x_1 = \dots = x_m$. Il faudra pour cela satisfaire aux égalités

$$A_0 u_0 D_0 = C, \quad A_1 u_1 D_1 = C, \dots, \quad A_m u_m D_m = C,$$

ce qui reviendra à faire

$$A_0 = u_1 D_1 u_2 D_2 \dots u_m D_m, \quad A_1 = u_0 D_0 u_2 D_2 \dots u_m D_m;$$

par suite, la formule générale (1) deviendra

$$(3) \quad u = \frac{1}{\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{D_0} \cdot \frac{1}{u_0} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{D_1} \cdot \frac{1}{u_1} + \dots}.$$

4°. Supposons que u doive être exprimé par une fraction dont le numérateur soit du degré n , et le dénominateur du degré $(p-1)$, en supposant

$$m = n + p - 1.$$

Pour arriver à cette forme, posons, dans la formule générale (1),

$$A_0 = \frac{B_0}{D_0}, \quad A_1 = \frac{B_1}{D_1}, \dots;$$

$B_0, B_1, B_2, \dots$ étant de nouvelles indéterminées; la formule (1) deviendra

$$(4) \quad u = \frac{B_0 u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{D_0} + B_1 u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{D_1} + \dots}{B_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{D_0} + B_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{D_1} + \dots}.$$

Dans cette formule (4) supposons B_0 égal à la somme des produits $(p-1)$ à $(p-1)$ qu'on peut faire avec les m lettres $u_1, u_2, \dots, u_m$, chacun de ces produits étant multiplié par un nombre indéterminé; que B_1 soit de même égal à la somme des produits $(p-1)$ à $(p-1)$ de $u_0, u_2, \dots, u_m$, etc. Cherchons dans le numérateur de la formule (4) ce qui multipliera un produit quelconque de p lettres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$. Ce produit ne se trouvera que dans les p premiers termes du numérateur de la formule (4), et il sera multiplié par une expression de la forme

$$\alpha \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{D_0} + \beta \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{D_1} + \dots$$

Il est clair que, dans cette somme de p termes, le produit

$$(x - x_p)(x - x_{p+1}) \dots (x - x_m)$$

sera facteur commun. Mais ce produit est divisé, dans le premier terme, par les facteurs binômes de D_0 , $(x_0 - x_p)(x_0 - x_{p+1}) \dots (x_0 - x_m)$, dont nous nommerons le produit d_0 ; dans le second terme, par des facteurs de D_1 , $(x_1 - x_p) \dots (x_1 - x_m)$, dont nous appellerons le produit d_1 , etc. Cela posé, nous ferons

$$\alpha = \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_{p-1}}, \quad \beta = \frac{1}{d_0 d_2 \dots d_{p-1}}, \dots$$

Nous aurons alors, en isolant le facteur commun dans la somme précédente, et observant que ce facteur est multiplié, d'après la remarque du 2^o, par une somme égale à l'unité, le terme général du numérateur ainsi exprimé

$$\frac{u_0}{d_0} \cdot \frac{u_1}{d_1} \cdot \frac{u_2}{d_2} \dots \frac{u_{p-1}}{d_{p-1}} (x - x_p)(x - x_{p+1}) \dots (x - x_m),$$

dont la loi est très-aisée : un produit de p lettres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$, est multiplié par un produit de n facteurs binômes, dont le premier terme est x , et le second, ce même x affecté des indices qui ne se trouvent pas dans le produit $u_0 u_1 \dots u_{p-1}$. Si l'on change successivement la variable x en $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$, on aura les produits désignés par $d_0, d_1, \dots, d_{p-1}$, et le terme général sera divisé par $d_0 d_1 \dots d_{p-1}$.

Le dénominateur n'offre pas plus de difficulté, ses termes ne contiendront que $p - 1$ facteurs en u . Cherchons l'expression de celui qui contient le produit $u_0 u_1 u_2 \dots u_{p-2}$. Ce terme monôme provient des valeurs de $B_{p-1}, B_p, \dots, B_m$ développées. Or, le monôme qui se trouve dans B_{p-1} est multiplié par u_{p-1} ; il donne au dénominateur, d'après la loi établie pour le numérateur, un terme

$$\frac{u_0 u_1 u_2 \dots u_{p-2}}{(x_0 - x_p) \dots (x_0 - x_m) \times (x_1 - x_p) \dots (x_1 - x_m) \times \dots \times (x_{p-2} - x_p) \dots (x_{p-2} - x_m)} \\ \times \left[\frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)}{(x_{p-1} - x_0) \dots (x_{p-1} - x_m)} \right].$$

Le coefficient B_p donnera un terme pareil; seulement, aux dénominateurs en dehors de la parenthèse, les x_p seront remplacés par x_{p-1} ,

et, entre parenthèses, les x_{p-1} seront remplacés par x_p . Le terme provenant de B_{p+1} dérivera du précédent; seulement l'indice $p+1$, en dehors de la parenthèse, sera remplacé par p , et l'indice p par $p+1$ en dedans, etc. Cela posé, si l'on isole dans les termes provenant de B_{p-1} , B_p , B_m les facteurs communs en x , dont on changera les signes ainsi que ceux des binômes qui leur correspondent aux dénominateurs, on aura, pour le terme général du dénominateur,

$$\frac{u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \dots u_{p-2} (x_0 - x) (x_1 - x) \dots (x_{p-2} - x)}{(x_0 - x_{p-1}) \dots (x_0 - x_m) \times (x_1 - x_{p-1}) \dots (x_1 - x_m) \dots \times (x_{p-2} - x_{p-1}) (x_{p-2} - x_p) \dots (x_{p-2} - x_m)},$$

qui multiplie une expression égale à l'unité. La loi de ce terme est aisée. Le groupe $u_0 u_1 \dots u_{p-2}$ est multiplié par $p - 1$ facteurs binômes, dont les premières lettres sont x affecté successivement des indices de u , et les seconds termes la variable x . Ce produit total est divisé par $p - 1$ groupes, dans chacun desquels la première lettre est x affecté de l'un des indices de u , et la seconde lettre, x , affecté successivement des indices qui n'entrent pas dans le produit $u_0 u_1 u_2 \dots u_{p-2}$.

La méthode précédente fournit une démonstration de la formule d'interpolation que M. Cauchy a donnée dans son *Cours d'Analyse*, page 528.

5°. On peut enfin déduire, de la formule d'interpolation de Lagrange, deux formules très-souvent employées. Reprenons la formule (2) de Lagrange, que nous écrirons de cette manière

$$u = u_0 \cdot \frac{N_0}{D_0} + u_1 \frac{N_1}{D_1} + u_2 \frac{N_2}{D_2} + \dots$$

Posons

$$u_1 = u_0 + A, \quad u_2 = u_0 + B, \quad u_3 = u_0 + C, \quad u_4 = u_0 + D, \dots,$$

nous aurons, en isolant le facteur commun u_0 , et d'après la remarque du 2°,

$$u = u_0 + \frac{AN_1}{D_1} + \frac{BN_2}{D_2} + \frac{CN_3}{D_3} + \frac{DN_4}{D_4} + \dots$$

Or, tous les termes après u_0 ont pour facteur commun $x - x_0$, et ce binôme est divisé, dans le second terme, par $x_1 - x_0$, dans le troisième par $x_2 - x_0$, dans le quatrième par $x_3 - x_0$, etc. Isolant ce facteur commun, et posant

$$A = \partial u_0 (x_1 - x_0), \quad B = \partial u_0 (x_2 - x_0) + B', \quad C = \partial u_0 (x_3 - x_0) + C', \dots,$$

il résultera, en isolant $\partial u_0(x - x_0)$, une nouvelle expression de u de cette forme

$$u = u_0 + (x - x_0) \partial u_0 + \frac{B' N_2}{D_2} + \frac{C' N_3}{D_3} + \frac{D' N_4}{D_4} + \dots$$

Tous les termes après les deux premiers contiennent, en facteur commun, $(x - x_0)(x - x_1)$, et ce produit est divisé, dans le troisième terme, par deux facteurs de D_2 , savoir $(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$, dans le suivant par $(x_3 - x_0)(x_3 - x_1), \dots$. Posant donc

$$\begin{aligned} B' &= \partial^2 u_0 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \\ C' &= \partial^2 u_0 (x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + C'', \\ D' &= \partial^2 u_0 (x_4 - x_0)(x_4 - x_1) + D'', \dots, \end{aligned}$$

nous trouverons, en isolant $\partial^2 u_0$, une nouvelle expression de la forme

$$(5) \quad u = u_0 + (x - x_0) \partial u_0 + (x - x_0)(x - x_1) \partial^2 u_0 + \frac{C'' N_3}{D_3} + \dots,$$

dont la loi est évidente, et qui revient à la formule de la *Mécanique céleste* (tome I^{er}, page 200). Il est clair que, si l'on avait classé les indices dans un autre ordre, par exemple dans l'ordre 1, 2, 3, ..., m , 0, on aurait obtenu une formule pareille à la formule (5), savoir,

$$(6) \quad u = u_1 + (x - x_1) \partial u_1 + (x - x_1)(x - x_2) \partial^2 u_1 + \dots$$

La formule (5), n'étant qu'une nouvelle forme de la formule de Lagrange, donnera les valeurs de $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$ en y posant

$$x = x_0 = x_1 = \dots = x_m.$$

Cette observation nous donnera une loi de formation aisée pour les $\partial u_0, \partial^2 u_0, \partial^3 u_0, \dots$. Posons, en effet, $x = x_1$ dans la formule (5), nous trouverons

$$u_1 = u_0 + (x_1 - x_0) \partial u_0,$$

d'où

$$\partial u_0 = \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0};$$

par suite, et d'après l'ordre successif arbitraire des indices,

$$\partial u_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \quad \partial u_2 = \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2}, \dots$$

Pour déterminer $\partial^2 u_0, \partial^2 u_1, \dots$, posons, comme conséquences des formules (5), (6),

$$\begin{aligned} u_2 &= u_0 + (x_1 - x_0) \partial u_0 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \partial^2 u_0, \\ u_2 &= u_1 + (x_2 - x_1) \partial u_1; \end{aligned}$$

soustrayant ces deux dernières et remplaçant $u_1 - u_0$ par $\partial u_0(x_1 - x_0)$, on trouvera

$$\partial^2 u_0 = \frac{\partial u_1 - \partial u_0}{x_2 - x_0},$$

et, par suite,

$$\partial^2 u_1 = \frac{\partial u_2 - \partial u_1}{x_3 - x_1}, \quad \partial^2 u_2 = \frac{\partial u_3 - \partial u_2}{x_4 - x_2}.$$

Pour trouver $\partial^3 u_0$, on poserait $x = x_3$ dans les formules (5), (6), on soustrairait les deux valeurs de u_3 , et l'on éliminerait $u_1, \partial u_1$ en fonction de $u_0, \partial u_0$, ce qui donnerait

$$\partial^3 u_0 = \frac{\partial^2 u_1 - \partial^2 u_0}{x_3 - x_0}, \dots$$

Si, dans la formule (5), on suppose

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h, \dots,$$

on aura, en employant les différences finies dont la caractéristique est Δ ,

$$\partial u_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} = \frac{\Delta u_0}{h}, \quad \partial^2 u_0 = \frac{\Delta^2 u_0}{2 \cdot h^2}, \quad \partial^3 u_0 = \frac{\Delta^3 u_0}{2 \cdot 3 \cdot h^3}, \dots$$

ces valeurs, substituées dans la formule (5), donneront

$$u = u_0 + \frac{x}{h} \Delta u_0 + \frac{x(x-h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2} \Delta^2 u_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot h^3} \Delta^3 u_0 + \dots,$$

formule ordinairement employée pour l'interpolation.

