

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Démonstration d'un théorème de M. Chasles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 10 (1845), p. 383-384.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__383_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. CHASLES;

PAR M. A. CAYLEY.

« Soient P, P' des points correspondants de deux figures homographiques; si la droite PP' passe toujours par un point fixe O, les points P sont situés sur une courbe du troisième degré, qui passe par ce même point. »

Soient $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$ les coordonnées de P; $\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'}, \frac{z'}{w'}$ celles de P'. En supposant que x', y', z', w' sont des fonctions linéaires (sans terme constant) de x, y, z, w , les deux figures seront homographiques.

Soient, de même, $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ les coordonnées de O; $\frac{\lambda}{\varpi}, \frac{\mu}{\varpi}, \frac{\nu}{\varpi}$ les coordonnées d'un point quelconque T.

Puisque P, P', O sont sur la même droite, on peut faire passer un plan par les quatre points P, P', O, T. Cela donne tout de suite l'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu & \varpi \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ x & y & z & w \\ x' & y' & z' & w' \end{vmatrix} = 0,$$

(en représentant de cette manière le déterminant formé avec les quantités λ, μ, ν , etc.), équation qui doit être satisfaite quels que soient $\lambda, \mu, \nu, \varpi$, et qui équivaut ainsi aux deux conditions

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ x & y & w \\ x' & y' & w' \end{vmatrix} = 0.$$

Ces deux dernières équations sont du second degré par rapport aux quantités $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$. Le point P est donc situé à l'intersection de deux surfaces du second ordre. Mais ces surfaces ont en commun la droite représentée par les équations

$$\alpha y - \xi x = 0, \quad \alpha x' - \xi y' = 0.$$

Donc elles se coupent de plus suivant une courbe du troisième degré qui passe évidemment par le point O, parce qu'on satisfait aux équations en écrivant

$$x : \alpha = y : \xi = z : \gamma = w : \delta.$$