

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. CAQUÉ

Note sur la formule de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 10 (1845), p. 379-382.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10_379_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR;

PAR M. J. CAQUÉ.

1. Soit $y = f(x)$ une fonction donnée de x , et désignons par $y_1, y_2, \dots$ les valeurs qu'elle prend quand x augmente successivement de la constante Δx , en sorte que $y_k = f(x + k\Delta x)$. En représentant par $\Delta^n y_k$ la différence $n^{ième}$ de y_k , on a, quels que soient n et k ,

$$(A) \quad \Delta^n y_k = \Delta^n y + (\Delta^{n+1} y + \Delta^{n+1} y_1 + \dots + \Delta^{n+1} y_{k-1}),$$

équation qui n'est, en effet, que la différence $n^{ième}$ de l'équation évidente

$$y_k = y + \Delta y + \Delta y_1 + \dots + \Delta y_{k-1}.$$

Cette dernière, en remplaçant k par m et posant $m\Delta x = h$, donne aussi

$$(1) \quad f(x + h) = f(x) + (\Delta y + \Delta y_1 + \dots + \Delta y_{m-2} + \Delta y_{m-1}).$$

Mais, si dans l'équation (A) on fait $n = 1$, puis successivement $k = 1, k = 2, \dots, k = m - 1$, on aura des valeurs de $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_{m-1}$, qui, portées dans l'équation (1), nous donneront, réduction faite,

$$(2) \quad f(x + h) = f(x) + m\Delta y + [(m-1)\Delta^2 y + (m-2)\Delta^2 y_1 + \dots + 2\Delta^2 y_{m-3} + \Delta^2 y_{m-2}].$$

On pourrait reprendre de nouveau l'équation (A), y poser $n = 2$, puis successivement $k = 1, k = 2, \dots, k = m - 2$, et reporter dans l'équation (2) les valeurs de $\Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \dots, \Delta^2 y_{m-2}$ ainsi obtenues; en réduisant, on aurait

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x + h) = f(x) + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 y \\ + \left[\frac{(m-1)(m-2)}{1.2} \Delta^3 y + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} \Delta^3 y_1 + \dots + 3\Delta^3 y_{m-4} + \Delta^3 y_{m-3} \right]. \end{aligned} \right.$$

Et l'on pourrait continuer ce mode d'élimination, qui conduirait finalement à la formule

$$(4) \quad f(x+h) = f(x) + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 y + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} \Delta^n y + R_n,$$

R_n remplaçant la quantité suivante, dans laquelle, en général, C_n^{m-g} représente le nombre des combinaisons de $m-g$ lettres n à n :

$$R_n = C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y + C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y_1 + C_n^{m-3} \Delta^{n+1} y_2 + \dots + C_n^{n+1} \Delta^{n+1} y_{m-n-2} + C_n^n \Delta^{n+1} y_{m-n-1}.$$

Mais, sans avoir même besoin de passer par l'équation (3), nous allons prouver directement que l'équation (4) a toujours lieu.

D'abord elle est vérifiée pour $n=1$, puisqu'elle coïncide alors avec l'équation (2). Pour démontrer généralement l'équation (4), il suffit donc de faire voir que, si elle est exacte pour une valeur de n , elle l'est encore pour la valeur suivante.

Dans l'équation (A), remplaçons n par $n+1$, puis posons successivement $k=1$, $k=2, \dots$, $k=m-n-1$; les divers résultats, multipliés par des facteurs convenables, forment le tableau suivant :

$$\begin{aligned} C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y &= C_n^{m-1} \Delta^{n+1} y, \\ C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y_1 &= C_n^{m-2} \Delta^{n+1} y + C_n^{m-2} \Delta^{n+2} y, \\ C_n^{m-3} \Delta^{n+1} y_2 &= C_n^{m-3} \Delta^{n+1} y + C_n^{m-3} \Delta^{n+2} y + C_n^{m-3} \Delta^{n+2} y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ C_n^{n+1} \Delta^{n+1} y_{m-n-2} &= C_n^{n+1} \Delta^{n+1} y + C_n^{n+1} \Delta^{n+2} y + C_n^{n+1} \Delta^{n+2} y_1 + \dots + C_n^{n+1} \Delta^{n+2} y_{m-n-3}, \\ C_n^n \Delta^{n+1} y_{m-n-1} &= C_n^n \Delta^{n+1} y + C_n^n \Delta^{n+2} y + C_n^n \Delta^{n+2} y_1 + \dots + C_n^n \Delta^{n+2} y_{m-n-3} + C_n^n \Delta^{n+1} y_{m-n-1}. \end{aligned}$$

En faisant la somme des premiers membres, on reproduit la valeur de R_n ; on peut donc écrire que cette quantité est égale à la somme des seconds membres; celle-ci se présentera sous une forme plus simple, en faisant usage de ce théorème d'algèbre :

« La somme des nombres des combinaisons n à n , de $m - g$,
 » $m - g - 1, \dots, n + 1$, n lettres, est égale au nombre des combi-
 » naisons $n + 1$ à $n + 1$ de $m - g + 1$ lettres. »

Conséquemment on aura

$$R_n = C_{n+1}^m \Delta^{n+1} y + R_{n+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{1.2\dots n.(n+1)} \Delta^{n+1} y + R_{n+1},$$

en posant, pour abrégér,

$$R_{n+1} = C_{n+1}^{m-1} \Delta^{n+2} y + C_{n+1}^{m-2} \Delta^{n+2} y_1 + \dots + C_{n+1}^{n+2} \Delta^{n+2} y_{m-n-3} + C_{n+1}^{n+1} \Delta^{n+2} y_{m-n-2}.$$

Or cette valeur de R_n , mise dans l'équation (4), donne le même résultat que la substitution de $n + 1$ à n dans la même équation; donc l'équation (4) a lieu généralement.

2. Si, dans l'équation (4), on remplace m par sa valeur tirée de $m\Delta x = h$, on trouve aisément

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \dots + \frac{h(h-\Delta x)\dots[h-(n-1)\Delta x]}{1.2\dots n} \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + R_n.$$

Le terme complémentaire R_n peut évidemment se mettre sous cette forme

$$\Delta x^{n+1} \left(C_n^{m-1} \frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}} + C_n^{m-2} \frac{\Delta^{n+1} y_1}{\Delta x^{n+1}} + \dots + C_n^n \frac{\Delta^{n+1} y_{m-n-1}}{\Delta x^{n+1}} \right).$$

de sorte qu'en représentant par M la somme des termes entre parenthèses, divisée par la somme $C_n^{m-1} + \dots$ de leurs coefficients, il vient

$$R_n = \Delta x^{n+1} (C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \dots + C_n^n) M,$$

c'est-à-dire, en vertu d'un théorème déjà invoqué,

$$R_n = \Delta x^{n+1} C_{n+1}^m M;$$

en mettant donc pour C_{n+1}^m son expression connue, et remplaçant dans cette dernière m par $\frac{h}{\Delta x}$, nous aurons enfin

$$R_n = \frac{h(h-\Delta x)\dots(h-n\Delta x)}{1.2\dots(n+1)} M,$$

d'où

$$(5) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \dots + \frac{h(h-\Delta x) \dots [h-(n-1)\Delta x]}{1.2 \dots n} \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + \frac{h(h-\Delta x) \dots (h-n\Delta x)}{1.2 \dots (n+1)} M.$$

Revenons sur l'expression de M, savoir,

$$M = \frac{C_n^{m-1} \frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}} + C_n^{m-2} \frac{\Delta^{n+1} y_1}{\Delta x^{n+1}} + \dots + C_n^n \frac{\Delta^{n+1} y_{m-n-1}}{\Delta x^{n+1}}}{C_n^{m-1} + C_n^{m-2} + \dots + C_n^n}.$$

Nous voyons que cette quantité est une moyenne entre les quotients

$$\frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}}, \quad \frac{\Delta^{n+1} y_1}{\Delta x^{n+1}}, \dots, \quad \frac{\Delta^{n+1} y_{m-n-1}}{\Delta x^{n+1}},$$

de manière qu'elle est toujours comprise entre le plus grand et le plus petit d'entre eux; il suffit donc, pour que M soit finie, que tous le soient, et alors la remarque que nous venons de faire fournit des limites simples de R_n ou du terme complémentaire de la formule (5).

3. Quand on prend la valeur de Δx infiniment petite, les quotients $\frac{\Delta^k y}{\Delta x^k}$ deviennent les dérivées $f^k(x)$, et les numérateurs des coefficients de l'équation (5) deviennent les puissances entières et croissantes de h . La quantité y_{m-n-1} devient $f(x+h)$. Les quotients dont la quantité M dépend se réduisent donc aux valeurs de $f^{n+1}(z)$, en faisant varier z de x à $x+h$. Donc, si dans cet intervalle $f^{n+1}(z)$ reste finie, M le sera aussi, puisqu'elle est toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de cette dérivée.

De plus, si $f^{n+1}(z)$ est continue, elle atteindra au moins une fois la valeur de M, et l'on pourra poser

$$M = f^{n+1}(x + \Theta h),$$

en désignant par Θ une quantité positive plus petite que l'unité. Ainsi on retrouve par cette méthode la formule connue

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots n(n+1)} f^{n+1}(x + \Theta h).$$

