

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Addition au mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 10 (1845), p. 286-290.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10_286_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Addition au Mémoire précédent ;***PAR M. J.-A. SERRET.**

Je me propose, dans cette Note, de former l'équation de la première des courbes de la seconde classe dont il a été question au § XI.

Ainsi qu'on l'a vu dans mon Mémoire, la courbe dont il s'agit pourra être définie par l'équation

$$(1) \quad (x - \xi) + i(y - \nu) = Ce^{\omega i} \frac{(z - b)(z + a)^3}{(z - \alpha)^2(z + \alpha)^2},$$

où $\xi + i\nu$ désigne une constante arbitraire, que nous supposons ici égale à $-Ce^{\omega i}$; on a d'ailleurs, pour déterminer a , α et b ,

$$(a^2 + \alpha^2)^2 = \frac{4}{3}, \quad a\alpha = 1,$$

d'où

$$a^2 = \frac{1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \alpha^2 = \frac{1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

et

$$b = a \frac{3a^2 + 5\alpha^2}{3\alpha^2 + 5a^2};$$

$\bar{\varepsilon}$ désignant la quantité imaginaire conjuguée de b , on aura

$$\bar{\varepsilon} = \alpha \frac{3\alpha^2 + 5a^2}{3a^2 + 5\alpha^2},$$

et l'on trouve aisément

$$b^2 = \frac{43 - 13i\sqrt{2}}{27\sqrt{3}},$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{43 + 13i\sqrt{2}}{27\sqrt{3}},$$

avec

$$b\bar{\varepsilon} = 1.$$

De l'équation (1) on tire

$$(2) \quad x + iy = Ce^{ai} \frac{(z-b)(z+a)^2 - (z-\alpha)^2 z + \alpha^2}{(z-\alpha)^2 (z+\alpha)^2}.$$

Il est facile de s'assurer que le numérateur du second membre ne renferme que des termes en z^3 et en z , et par conséquent, que $x + iy$ est une fonction *impaire* de z ; l'équation (1) ne changera donc pas en changeant les signes des trois variables x , y et z , et l'on aura

$$(3) \quad (x + \xi) + i(y + v) = -Ce^{ai} \frac{(z+b)(z-a)^2}{(z-\alpha)^2 (z+\alpha)^2}.$$

Comme les équations (1) et (3) ne cessent pas d'avoir lieu en changeant i en $-i$, on aura finalement les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} (x - \xi) + i(y - v) &= Ce^{ai} \frac{(z-b)(z+a)^2}{(z-\alpha)^2 (z+\alpha)^2}, \\ (x - \xi) - i(y - v) &= Ce^{-ai} \frac{(z-b)(z+a)^2}{(z-\alpha)^2 (z+\alpha)^2}, \\ (x + \xi) + i(y + v) &= -Ce^{ai} \frac{(z+b)(z-a)^2}{(z-\alpha)^2 (z+\alpha)^2}, \\ (x + \xi) - i(y + v) &= -Ce^{-ai} \frac{(z+b)(z-a)^2}{(z-\alpha)^2 (z+\alpha)^2}. \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par la multiplication,

$$\begin{aligned} (x - \xi)^2 + (y - v)^2 &= C^2 \frac{(z-b)(z-b)(z+a)(z+\alpha)}{(z-\alpha)^2 (z-\alpha)^2}, \\ (x + \xi)^2 + (y + v)^2 &= C^2 \frac{(z+b)(z+b)(z-a)(z-\alpha)}{(z+\alpha)^2 (z+\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Les premiers membres des deux équations précédentes représentent les carrés des distances d'un point de la courbe aux deux points fixes (ξ, v) et $(-\xi, -v)$, dont la distance est égale à $2C$; en désignant par ρ et ρ' ces deux distances, on aura

$$(4) \quad \begin{cases} \rho^2 = C^2 \frac{(z-b)(z-b)(z+a)(z+\alpha)}{(z-\alpha)^2 (z-\alpha)^2}, \\ \rho'^2 = C^2 \frac{(z+b)(z+b)(z-a)(z-\alpha)}{(z+\alpha)^2 (z+\alpha)^2}. \end{cases}$$

et l'on obtiendra l'équation de la courbe en ρ et ρ' , par l'élimination de z entre ces deux équations; cette élimination, qui au premier abord semble devoir être fort pénible, s'exécute très-simplement en opérant de la manière suivante.

En multipliant entre elles les équations (4), on trouve

$$\rho^2 \rho'^2 = C^4 \frac{(z^2 - b^2)(z^2 - \epsilon^2)}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)} = C^4 \frac{z^4 - (b^2 + \epsilon^2)z^2 + b^2 \epsilon^2}{z^4 - (a^2 + \alpha^2)z^2 + a^2 \alpha^2},$$

et, en remplaçant a^2 , α^2 , b^2 , ϵ^2 par les valeurs écrites plus haut,

$$(5) \quad \rho^2 \rho'^2 = C^4 \frac{z^4 - \frac{86}{27\sqrt{3}}z^2 + 1}{z^4 - \frac{2}{\sqrt{3}}z^2 + 1}.$$

Cela posé, l'équation (2) peut s'écrire de la manière suivante :

$$x + iy = Ce^{i\omega i} \frac{(3a - b)z^3 + (a^3 - 3a^2b)z}{(z^2 - a^2)^2},$$

et, en changeant partout i en $-i$,

$$x - iy = Ce^{-i\omega i} \frac{(3\alpha - \epsilon)z^3 + (\alpha^3 - 3\alpha^2\epsilon)z}{(z^2 - \alpha^2)^2}.$$

Des deux équations précédentes, on déduit par la multiplication, et en observant que $ax = 1$, $b\epsilon = 1$,

$$x^2 + y^2 = C^2 z^2 \frac{[10 - 3(a\epsilon + ab)]z^4 + [6(a^2 + \alpha^2) - 9(ab + a\epsilon) - (b\alpha^3 + \epsilon a^3)]z^2 + [10 - 3(a\epsilon + ab)]}{[z^4 - (a^2 + \alpha^2)z^2 + 1]^2},$$

on trouve d'ailleurs aisément

$$a^2 + \alpha^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad a\epsilon + ab = \frac{14}{9},$$

$$ab + a\epsilon = \frac{10}{3\sqrt{3}}, \quad b\alpha^3 + \epsilon a^3 = \frac{-2}{9\sqrt{3}};$$

on aura donc, en désignant par r le rayon vecteur $\sqrt{x^2 + y^2}$,

$$r^2 = \frac{16}{3} C^2 \frac{z^4 \left(z^4 - \frac{10}{3\sqrt{3}} z^2 + 1 \right)}{\left(z^4 - \frac{2}{\sqrt{3}} z^2 + 1 \right)^2}.$$

D'ailleurs, le rayon r est une médiane du triangle dont ρ , ρ' et $2C$ sont les côtés; on aura donc

$$\rho^2 + \rho'^2 = 2r^2 + 2C^2,$$

et, par conséquent,

$$(6) \quad \rho^2 + \rho'^2 - 2C^2 = \frac{32C^2}{3} \frac{z^2 \left(z^4 - \frac{10}{3\sqrt{3}} z^2 + 1 \right)}{\left(z^4 - \frac{2}{\sqrt{3}} z^2 + 1 \right)^2}.$$

C'est entre les équations (5) et (6) que nous allons maintenant éliminer z .

Si dans ces équations on pose

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = u,$$

elles deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 \rho'^2 = C^4 \frac{u - \frac{86}{27\sqrt{3}}}{u - \frac{2}{\sqrt{3}}}, \\ 2r^2 \quad \text{ou} \quad \rho^2 + \rho'^2 - 2C^2 = \frac{32C^2}{3} \frac{u - \frac{10}{3\sqrt{3}}}{\left(u - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2}. \end{array} \right.$$

La quantité u entre au premier degré dans la première de ces équations, l'élimination de cette quantité s'effectue immédiatement, et l'on trouve

$$C^6 r^2 = \frac{9\sqrt{3}}{16} (C^4 - \rho^2 \rho'^2) (9\rho^2 \rho'^2 - C^4),$$

ou

$$(7) \quad C^6 (\rho^2 + \rho'^2 - 2C^2) = \frac{9\sqrt{3}}{8} (C^4 - \rho^2 \rho'^2) (9\rho^2 \rho'^2 - C^4),$$

ce qui est l'équation de la courbe cherchée entre ses deux coordonnées polaires ρ et ρ' , la distance des deux pôles étant représentée par $2C$. On

sait que la lemniscate, en adoptant le même genre de coordonnées, est représentée par l'équation

$$\rho \rho' = C^2.$$

Pour avoir l'équation de la courbe en coordonnées polaires ordinaires, il suffira de remplacer, dans l'équation (7), ρ et ρ' par leurs valeurs tirées des équations

$$\rho^2 = r^2 - 2C r \cos t + C^2,$$

$$\rho'^2 = r^2 + 2C r \cos t + C^2,$$

d'où l'on déduit

$$\rho^2 \rho'^2 = r^4 - 2C^2 r^2 \cos 2t + C^4;$$

on trouve ainsi

$$9r^2(r^2 - 2C^2 \cos 2t)^2 + 8C^4(r^2 - 2C^2 \cos 2t) + \frac{16C^6}{9\sqrt{3}} = 0.$$