JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 257-285.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__257_0>

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET ULTRA-ELLIPTIQUES;

PAR M. J.-A. SERRET.

I.

On sait depuis longtemps que les arcs de la lemniscate sont exprimables par des fonctions elliptiques de première espèce, de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et par suite qu'ils peuvent être ajoutés ou retranchés entre eux, multipliés ou divisés algébriquement, de la même manière que les arcs de cercle; mais la lemniscate est la seule courbe algébrique chez laquelle on ait jusqu'ici constaté cette singulière propriété.

Legendre, qui s'est beaucoup occupé de ce genre de questions, a formé l'équation d'une courbe algébrique du sixième degré, dont l'arc s'exprime par une fonction elliptique de première espèce, augmentée d'une quantité algébrique, qui, à la vérité, peut disparaître en prenant convenablement les extrémités de l'arc, mais qui, n'étant pas nulle en général, empêche la courbe d'offrir une représentation parfaite de la première transcendante elliptique. Enfin, dans ces derniers temps, j'ai démontré que l'arc de la *cassinoïde*, dont la lemniscate n'est qu'un cas particulier, se présente sous la forme d'une fonction *abélienne*, décomposable en une somme ou une différence de deux fonctions elliptiques complémentaires de première espèce, et même que cet arc est exprimable à l'aide d'une simple fonction elliptique, si l'une de ses extrémités est convenablement choisie, l'autre demeurant arbitraire. Mais la question était loin d'être résolue, la lemniscate restait toujours la

seule courbe algébrique connue dont les coordonnées rectangulaires x et y satisfissent à une équation de la forme

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dz^2}{\alpha + 6z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4}.$$

Depuis la publication de mes premières recherches, deux géomètres étrangers, M. William Roberts, de Dublin, et M. Tortolini, de Rome, se sont occupés à diverses reprises de questions analogues; la lecture de leurs intéressants Mémoires m'a conduit à examiner de nouveau le problème de la représentation de la première transcendante, que j'avais abandonné depuis longtemps, et dont la solution générale, si elle était possible, ne me semblait pouvoir être due qu'au hasard.

La première idée des recherches nouvelles auxquelles je me suis livré, et que je publie aujourd'hui, m'a été suggérée par une propriété de la lemniscate, à laquelle je n'avais pas d'abord attaché une grande importance, et qui pourtant paraît être la seule susceptible d'une généralisation favorable. Cette propriété de la lemniscate consiste en ce que ses coordonnées rectangulaires sont exprimables en fonction rationnelle de l'amplitude de la fonction elliptique qui représente l'arc; on peut la vérifier à l'instant même, car l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

qui appartient à la lemniscate, est évidemment satisfaite en posant

$$x = a\sqrt{2}\,\frac{z + z^3}{1 + z^4}, \quad y = a\sqrt{2}\,\frac{z - z^3}{1 + z^4};$$

d'où l'on déduit aisément

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a\,\frac{dz}{\sqrt{1 + z^4}}.$$

J'ai été ainsi naturellement conduit à chercher les différentes solutions que peut admettre l'équation indéterminée

$$dx^2 + dy^2 = Z\,dz^2,$$

en prenant pour x, y, Z des fonctions réelles et rationnelles de z.

On trouvera dans mon Mémoire la solution générale de ce problème, qui comprend en même temps et la représentation des fonctions ellip-

tiques et celle des fonctions ultrà-elliptiques; toutefois, comme j'ai eu spécialement en vue les fonctions elliptiques de première espèce, je m'occuperai d'abord d'un cas simple, celui où Z est une fraction ayant pour numérateur un monôme $C^2 z^{2\mu}$ et pour dénominateur un polynôme P qui ne renferme pas de facteurs multiples, en sorte que l'équation à résoudre sera

$$dx^2 + dy^2 = C^2 \frac{z^{2\mu} dz^2}{P}.$$

Les solutions de cette équation une fois trouvées, on connaîtra en particulier, parmi les courbes algébriques dont les coordonnées rectangulaires sont des fonctions rationnelles de l'amplitude z, quelles sont celles dont l'arc s'exprime par une fonction elliptique de première espèce. Nous verrons que le nombre de ces courbes est illimité.

II.

Conformément à l'usage adopté par plusieurs géomètres, nous représentons par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$, en sorte que l'équation qu'il s'agit de résoudre pourra s'écrire de la manière suivante :

$$(dx + idy)(dx - idy) = C^2 \frac{z^{2\mu} dz^2}{P}, \tag{1}$$

et l'on voit de suite qu'elle n'admettra aucune solution si P renferme des facteurs réels, car toute valeur réelle de z qui rendrait infini le second membre de l'équation (1) rendrait nécessairement infinis les deux facteurs

$$dx + idy \quad \text{et} \quad dx - idy,$$

ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, P n'a pas de facteurs multiples, et que x et y doivent être rationnels; si donc on désigne par p et ϖ deux polynômes *conjugués* dont le produit est P, l'équation (1) deviendra

$$\frac{dx + idy}{\left(\frac{Cz^\mu}{p}\right) dz} \cdot \frac{dx - idy}{\left(\frac{Cz^\mu}{\varpi}\right) dz} = 1,$$

ce qui montre que les deux fonctions rationnelles $\frac{dx+i\,dy}{\frac{Cz^{\mu}}{p}\,dz}$ et $\frac{dx-i\,dy}{\frac{Cz^{\mu}}{\varpi}\,dz}$ sont conjuguées et ont pour module l'unité; on aura donc nécessairement, en désignant par t et τ deux polynômes conjugués premiers entre eux, et par ω un angle réel,

$$dx+idy=Ce^{\omega i}\frac{t}{\tau}\frac{z^{\mu}dz}{p},$$

$$dx-idy=Ce^{-\omega i}\frac{\tau}{t}\frac{z^{\mu}dz}{\varpi}.$$

Chacune de ces équations est une conséquence de l'autre, car elle s'en déduit par le changement de i en $-i$; de la première on tire

$$x+iy=Ce^{\omega i}\int\frac{t}{\tau}\frac{z^{\mu}dz}{p}. \tag{2}$$

Cette équation fournira toutes les solutions de l'équation (1), et il ne s'agira plus que de déterminer les polynômes conjugués t et τ par la condition que l'intégrale

$$\int\frac{t}{\tau}\frac{z^{\mu}dz}{p}$$

soit algébrique.

Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que tous les facteurs de p se trouvent dans τ ou dans t; soit donc

$$p=p_1p_2 \quad \text{et} \quad \varpi=\varpi_1\varpi_2,$$

p_1 désignant le produit des facteurs de p qui se trouvent dans t, et p_2 le produit de ceux qui se trouvent dans τ; et de même, ϖ_1 et ϖ_2 étant les facteurs de ϖ qui se trouvent, le premier dans τ, et le second dans t, l'équation (2) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$x+iy=Ce^{\omega i}\int\frac{t\varpi_2}{\tau p_2}\frac{z^{\mu}dz}{p_1\varpi_2}. \tag{3}$$

Or, $p_1\varpi_2$ est, comme p, un polynôme dont le module est $\sqrt{P}$; d'ailleurs ce polynôme est évidemment premier avec τp_2; si donc on met simple-

ment p au lieu de $p_1\varpi_2$, $\frac{t}{\tau}$ au lieu de $\frac{t\varpi_2}{\tau p_2}$, l'équation (3) ne sera autre que l'équation (2), où τ sera dès lors un polynôme premier à p.

Il suit de là que, sans altérer la généralité de la solution fournie par l'équation (2), on peut supposer le polynôme p premier avec τ. Cela posé, pour que l'intégrale du second membre de l'équation (2) soit algébrique, il faut que $\frac{t}{p}$ et par suite $\frac{\tau}{\varpi}$ soient entiers, et en outre que τ ne contienne aucun facteur linéaire simple.

Soient ρ un polynôme quelconque, δ le plus grand commun diviseur entre ce polynôme et sa dérivée, le polynôme $\frac{\rho^2}{\delta}$ ne différera de ρ qu'en ce que chaque facteur linéaire y entrera une fois de plus, et représentera, par conséquent, un polynôme quelconque n'ayant pas de facteurs simples; on pourra donc poser

$$\tau = \frac{\rho^2}{\delta}, \quad \text{et, par suite,} \quad t = \frac{r^2}{\delta},$$

r et δ représentant les polynômes conjugués de ρ et de δ.

D'après cela, l'équation (2) donnera

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{\delta r^2}{p\delta\rho^2} z^\mu dz, \tag{4}$$

où l'on ne devra prendre pour r et ρ que des polynômes conjugués respectivement divisibles par p et ϖ, et tels que, pour chaque racine c de l'équation

$$\rho = 0,$$

on ait

$$\mathcal{L} \frac{(z-c)\delta r^2 z^\mu}{((z-c))p\delta\rho^2} = 0.$$

III.

De ce qui précède, on peut déduire une propriété remarquable des fonctions rationnelles x et y susceptibles de satisfaire à l'équation

$$dx^2 + dy^2 = C^2 \frac{z^{2\mu} dz^2}{\rho}.$$

Si l'équation précédente est satisfaite en posant

$$x = \frac{U}{R}, \quad y = \frac{V}{R},$$

U, V, R désignant trois fonctions entières premières entre elles, la fonction

$$\frac{U^2 + V^2}{R}$$

sera entiere.

Ce théorème résulte immédiatement de l'équation (4). Si, en effet, l'intégrale du second membre est algébrique, on aura

$$x + iy = \frac{s}{\rho},$$

s désignant un polynôme premier à ρ, et de même

$$x - iy = \frac{\sigma}{r},$$

σ étant le polynôme conjugué de s.

Cela posé, si $\sqrt{R}$ et $\sqrt{S}$ désignent les modules des polynômes r et ρ, s et σ, on déduira des équations précédentes, par la multiplication,

$$x^2 + y^2 = \frac{S}{R},$$

et d'ailleurs les valeurs de x et y seront évidemment de la forme

$$x = \frac{U}{R}, \quad y = \frac{V}{R},$$

ce qui montre que l'on aura

$$S = \frac{U^2 + V^2}{R} = \text{entier}.$$

De ce théorème, qu'on pouvait facilement établir à priori à l'aide de simples considérations algébriques, résulte aussi un moyen très-simple de former l'équation (4); mais nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet. Nous nous bornerons à remarquer que si

l'équation proposée admet une solution rationnelle

$$x = \frac{U}{R}, \quad y = \frac{V}{R},$$

les fractions $\frac{U}{R}$ et $\frac{V}{R}$ seront irréductibles, car tout facteur commun à R et à l'une des fonctions U et V devrait nécessairement diviser l'autre, puisque la fonction

$$\frac{U^2 + V^2}{R}$$

est entière; or cela ne sera pas, car on pourra toujours supposer les polynômes U, V et R débarrassés de leurs facteurs communs.

IV.

Nous allons maintenant faire l'application de ce qui précède au cas des fonctions elliptiques de la première espèce; mais auparavant nous croyons utile de présenter quelques observations sur la transformation de l'intégrale elliptique $\int \frac{dz}{\sqrt{P}}$, dans laquelle P est un polynôme du quatrième degré, dont les quatre facteurs linéaires sont imaginaires et conjugués deux à deux.

Soient a et α deux racines conjuguées de $P = 0$. b et 6 les deux autres, et posons

$$F = \int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-\alpha)(z-b)(z-6)}};$$

la transformation *réelle* du *premier ordre* est toujours possible, bien que les quatre racines de P soient imaginaires. Soit donc

$$z = \frac{p + qu}{1 + u}, \quad \text{d'où} \quad dz = (q - p)\frac{du}{(1+u)^2},$$

et substituons ces valeurs dans F, on aura

$$F = \frac{(q-p)}{\sqrt{(q-a)(q-\alpha)(q-b)(q-6)}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(u - \frac{a-p}{q-a}\right)\left(u - \frac{\alpha-p}{q-\alpha}\right)\left(u - \frac{b-p}{q-b}\right)\left(u - \frac{6-p}{q-6}\right)}},$$

L'intégrale en u est de la même forme que la proposée, et l'on pourra, comme on sait, disposer des indéterminées p et q, de manière à faire disparaître les puissances impaires de u sous le radical; mais ceci peut se faire de deux manières, et c'est ce qu'il importe de bien remarquer: en d'autres termes, si l'on pose

$$P' = \left(u - \frac{a-p}{q-a}\right)\left(u - \frac{\alpha-p}{q-\alpha}\right)\left(u - \frac{b-p}{q-b}\right)\left(u - \frac{6-p}{q-6}\right),$$

on pourra toujours disposer des indéterminées p et q, de manière que deux racines conjuguées de $P' = 0$ soient respectivement égales et de signes contraires aux deux autres, ou bien que chaque racine soit égale et de signe contraire à sa conjuguée.

En premier lieu, pour que chaque racine de P' soit égale et de signe contraire à sa conjuguée, il faut et il suffit que

$$\frac{a-p}{q-a} + \frac{\alpha-p}{q-\alpha} = 0, \quad \frac{b-p}{q-b} + \frac{6-p}{q-6} = 0.$$

On en déduit

$$pq - \frac{a+\alpha}{2}(p+q) + a\alpha = 0, \quad pq - \frac{b+6}{2}(p+q) + b6 = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2}(p+q) = \frac{a\alpha - b6}{a+\alpha-b-6} \quad \text{et} \quad pq = \frac{a\alpha(b+6) - b6(a+\alpha)}{a+\alpha-b-6}.$$

On déduit de là très-aisément

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)(a-6)(\alpha-b)(\alpha-6)}{(a+\alpha-b-6)^2},$$

et si l'on fait

$$a = m + in, \quad b = m' + in',$$
$$\alpha = m - in, \quad 6 = m' - in',$$

on aura

$$(p-q)^2 = \frac{[(m-m')^2 + (n-n')^2][(m-m')^2 + (n+n')^2]}{(m-m')^2}.$$

D'ailleurs

$$p+q=\frac{(m^2+n^2)-(m'^2+n'^2)}{m-m'};$$

ce qui montre que les valeurs de p et q, que nous cherchons, seront toujours réelles.

A la vérité, ces valeurs de p et q seraient infinies, si l'on avait $m'=m$; mais, dans ce cas, en posant $z=u+m$, l'intégrale $\int\frac{dz}{\sqrt{\mathrm{P}}}$ se transformerait en une autre de même forme $\int\frac{du}{\sqrt{\mathrm{P}'}}$, et chaque racine de P′ serait bien égale et de signe contraire à sa conjuguée.

En second lieu, je dis qu'on peut déterminer p et q de manière que deux racines conjuguées de P′ soient respectivement égales et de signes contraires aux deux autres.

Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{a-p}{q-a}+\frac{b-p}{q-b}=0,\quad \frac{\alpha-p}{q-\alpha}+\frac{6-p}{q-6}=0.$$

Comme nous ne pouvons prendre pour p et q que des valeurs réelles, l'une de ces équations sera toujours une conséquence de l'autre, car elle s'en déduira par le changement de i en $-i$.

De la première on tire, en posant $a=m+in$, $b=m'+in'$,

$$pq-\frac{(m+m')+(n+n')i}{2}(p+q)+(mm'-nn')+(mn'+m'n)i=0.$$

Cette équation se décompose nécessairement dans les deux suivantes :

$$pq-\frac{m+m'}{2}(p+q)+(mm'-nn')=0,$$

$$\frac{n+n'}{2}(p+q)-(mn'+m'n)=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{p+q}{2}=\frac{mn'+m'n}{n+n'},$$

$$pq=\frac{n'(m^2+n^2)+n(m'^2+n'^2)}{n+n'},$$

$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2=-nn'\frac{(m-m')^2+(n+n')^2}{(n+n')^2}.$$

Les valeurs de p et q, fournies par ces équations, seront réelles si l'on prend pour a et b deux racines de P non conjuguées et dont les parties imaginaires soient de signes contraires.

Si cependant $n + n'$ était nul, les valeurs précédentes de p et q seraient infinies; mais, dans ce cas, on obtiendrait l'intégrale transformée en mettant dans la proposée $z + \frac{m+m'}{2}$ au lieu de z.

Il résulte de ce qui précède que si x et y sont les coordonnées *rationnelles* d'un courbe dont l'arc soit

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{P}}},$$

on pourra toujours supposer que chaque racine de $\mathrm{P} = 0$ est égale et de signe contraire à sa conjuguée, ou bien que deux racines conjuguées sont égales et de signes contraires aux deux autres; car, s'il en était autrement, on ramènerait l'intégrale proposée à cette forme par une substitution réelle et rationnelle, et, en faisant la même substitution dans x et y, ces fonctions ne cesseraient pas d'être rationnelles.

C'est la seconde forme de l'intégrale que nous adopterons, et l'équation indéterminée qu'il s'agit de résoudre sera

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \mathrm{C}\,\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)}},$$

a et α étant deux constantes imaginaires conjuguées.

V.

Ainsi qu'on l'a vu au § II, on obtiendra toutes les solutions *réelles et rationnelles* de l'équation précédente au moyen de la formule

$$x + iy = \mathrm{C}e^{\omega i} \int \frac{\left(\frac{r^2}{p\partial}\right)}{\left(\frac{\rho^2}{\delta}\right)}\, dz, \tag{5}$$

où ρ désigne un polynôme divisible par ϖ et dont chaque racine c satisfait à la condition

$$\mathcal{L}\,\frac{(z-c)\frac{r^2}{p\partial}}{((z-c))\frac{\rho^2}{\delta}} = 0. \tag{6}$$

En général, pour une forme déterminée des polynômes ρ et r, les conditions exprimées par l'équation (6) ne pourront subsister en même temps; mais il existe un cas très-étendu où elles pourront toujours être satisfaites, c'est celui où les polynômes ρ et r ne renfermeront que les facteurs linéaires des polynômes donnés ϖ et p. Ce cas est aussi le seul que nous considérerons dans ce Mémoire.

Soit posé

$$p = (z^2 - a^2), \quad r = (z-a)^m (z+a)^n, \quad \vartheta = (z-a)^{m-1} (z+a)^{n-1},$$
$$\varpi = (z^2 - \alpha^2), \quad \rho = (z-\alpha)^m (z+\alpha)^n, \quad \delta = (z-\alpha)^{m-1} (z+\alpha)^{n-1},$$

l'équation (5) deviendra

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{(z-a)^m (z+a)^n}{(z-\alpha)^{m+1} (z+\alpha)^{n+1}} dz; \tag{7}$$

si l'on fait, pour abréger,

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m (z+a)^n}{(z+\alpha)^{n+1}}, \quad \psi(z) = \frac{(z-a)^m (z+a)^n}{(z-\alpha)^{m+1}},$$

on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(z-a)^m (z+a)^n}{(z-\alpha)^{m+1} (z+\alpha)^{n+1}} \\ = \dfrac{\varphi(\alpha}{(z-\alpha)^{m+1}} + \dfrac{\varphi'(\alpha)}{1.(z-\alpha)^m} + \dfrac{\varphi''(\alpha)}{1.2.(z-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \dfrac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m(z-\alpha)} \\ + \dfrac{\psi(-\alpha)}{(z+\alpha)^{n+1}} + \dfrac{\psi'(-\alpha)}{1.(z+\alpha)^n} + \dfrac{\psi''(-\alpha)}{1.2.(z+\alpha)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n(z+\alpha)} \end{array} \right. \tag{8}$$

Cela posé, pour que l'intégrale du second membre de l'équation (7) soit algébrique, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi^m(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \psi^n(-\alpha) = 0; \tag{9}$$

mais l'une de ces équations est évidemment une conséquence de l'autre, car si l'on chasse les dénominateurs dans l'équation (8), le premier membre sera un polynôme du degré $m+n$, et le second un polynôme du degré $m+n+1$; le coefficient de z^{m+n-1} sera donc nul de lui-

même, et l'on aura

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m} + \frac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n} = 0.$$

Si donc l'une des équations (9) est satisfaite, l'autre le sera nécessairement aussi.

Les équations (9) établissent ainsi entre a, α et les nombres entiers m et n, une relation unique

$$f(a, \alpha) = 0. \tag{10}$$

D'ailleurs on peut donner au produit $a\alpha$ telle valeur que l'on voudra, car cela revient à changer z en λz dans l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{P}}$; l'équation (10) déterminera donc entièrement les quantités a et α en fonction des nombres m et n, et il faudra, en outre, que ces valeurs de a et α satisfassent à l'équation

$$f(\alpha, a) = 0,$$

que l'on obtient en changeant dans l'équation (10) les quantités a et α l'une en l'autre; or je dis que cette condition sera toujours remplie, à cause que l'équation (10) est symétrique par rapport aux quantités a et α.

VI.

Nous examinerons d'abord un cas simple, celui de $m = 1$, n restant quelconque, et nous donnerons en même temps les valeurs des modules des fonctions elliptiques comprises dans ce cas particulier.

On a, dans ce cas,

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)(z+a)^n}{(z+\alpha)^{n+1}},$$

d'où

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z-a} + \frac{n}{z+a} - \frac{n+1}{z+\alpha},$$

et l'équation

$$\varphi'(\alpha) = 0$$

devient, dans ce cas,

$$\frac{\alpha^2+a^2}{a\alpha} = 2\,\frac{n-1}{n+1}; \tag{11}$$

elle ne change pas, comme on voit, en changeant l'une en l'autre les quantités a et α.

Si donc on prend pour a et α des quantités satisfaisant à l'équation (11), l'arc de la courbe algébrique définie par l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega i}\int \frac{(z-a)(z+a)^n}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^{n+1}}\,dz$$

sera représenté par l'intégrale elliptique

$$C\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-\alpha^2)}},$$

dont le module k (en ramenant l'intégrale à la forme $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$) a pour valeur

$$k = \sqrt{\frac{n}{n+1}};$$

la lemniscate, comme chacun sait, correspond au cas le plus simple de $n = 1$.

Considérons encore le cas particulier de $m = 2$.

On a

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^2(z+a)^n}{(z+\alpha)^{n+1}},$$

d'où

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{2}{z-a} + \frac{n}{z+a} - \frac{n+1}{z+\alpha},$$

et

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} = \left(\frac{2}{z-a} + \frac{n}{z+a} - \frac{n+1}{z+\alpha}\right)^2 - \left(\frac{2}{(z-a)^2} + \frac{n}{(z+a)^2} - \frac{n+1}{(z+\alpha)^2}\right).$$

D'après cela, l'équation

$$\varphi''(\alpha) = 0$$

sera

$$\left(\frac{2}{\alpha-a}+\frac{n}{\alpha+a}-\frac{n+1}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{2}{(\alpha-a)^2}+\frac{n}{(\alpha+a)^2}-\frac{n+1}{4\alpha^2}\right)=0,$$

ou

$$(n+1)(n+2)\left(\frac{\alpha^2+a^2}{a\alpha}\right)^2-4(n+1)(n-2)\frac{\alpha^2+a^2}{a\alpha}+4(n^2-5n+2)=0,$$

et, par suite,

$$\frac{a^2+\alpha^2}{a\alpha}=\frac{2(n+1)(n-2)\pm 4\sqrt{2n(n+1)}}{(n+1)(n+2)}, \tag{12}$$

en sorte que si a et α sont des imaginaires conjuguées, satisfaisant à l'équation (12), l'arc de la courbe algébrique définie par l'équation

$$x+iy=Ce^{\omega i}\int\frac{(z-a)^n(z+a)^n}{(z-\alpha)^3(z+a)^{n+1}}\,dz$$

sera représenté par l'intégrale elliptique

$$C\int\frac{dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-\alpha^2)}}.$$

Les deux quantités a et α sont entièrement déterminées par l'équation (12); car, ainsi que je l'ai dit précédemment, on peut supposer leur produit égal à 1; il est aisé de voir que les deux valeurs du second membre de l'équation (12) sont toujours plus petites que 2, excepté dans le cas de $n=1$, et, par conséquent, les quantités a et α déterminées par cette équation seront toujours imaginaires, comme cela doit être.

Dans le cas de $n=1$, l'une des valeurs de $\frac{a^2+\alpha^2}{a\alpha}$ est -2; elle doit être rejetée, car elle donnerait $a+\alpha=0$; mais ce cas a déjà été traité précédemment, et l'on a vu que si l'un des exposants m et n est l'unité, il n'existe qu'une valeur unique pour le module de la fonction elliptique correspondante.

Quant au module k de la fonction elliptique, dont nous nous occupons en ce moment, on aura pour la valeur de son carré

$$k^2=\frac{n(n+1)\pm\sqrt{2n(n+1)}}{(n+1)(n+2)}.$$

VII.

Nous venons de voir, au paragraphe précédent, que dans le cas particulier où l'un des nombres m et n est égal à 1 ou à 2, les équations équivalentes

$$\varphi^m(\alpha) = 0, \quad \psi^n(-\alpha) = 0,$$

établissent entre a et α une relation unique où ces quantités entrent symétriquement, et de cette circonstance seulement est résultée la possibilité de former deux classes de modules pour lesquels les fonctions elliptiques de la première espèce sont *identiques* aux arcs de courbes algébriques à *coordonnées rationnelles*.

Cette propriété dont jouit l'équation

$$f(a, \alpha) = 0,$$

d'être symétrique par rapport aux quantités a et α, subsiste pour toutes les valeurs possibles des entiers m et n, en sorte que si l'on pose

$$\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \zeta,$$

elle prendra la forme

$$\Pi(\zeta) = 0,$$

et sera du degré θ en ζ, θ désignant le plus petit des nombres m et n.

L'équation en ζ a pour racines les carrés des modules des fonctions elliptiques correspondantes aux valeurs données de m et n; mais si le plus petit de ces nombres surpasse 2, l'équation sera au moins du troisième degré et ne pourra, en général, être résolue.

Quoi qu'il en soit, nous aurons rigoureusement établi qu'il existe une infinité de classes de modules pour lesquels les fonctions de première espèce correspondantes sont représentées par des arcs de courbes algébriques analogues à la lemniscate.

VIII.

Il est indifférent, pour former l'équation

$$f(a, \alpha) = 0,$$

de se servir de l'une ou de l'autre des équations (9); nous supposerons que m soit inférieur ou au plus égal à n, et nous prendrons la première des équations (9)

$$\varphi^m(\alpha) = 0.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\chi(z) = (z-a)^m (z+a)^n,$$

on aura

$$\varphi(z) = \chi(z).(z+\alpha)^{-n-1},$$

d'où, en différentiant m fois, et représentant, suivant l'usage, par

$$\Gamma(\theta)$$

le produit des $\theta - 1$ premiers nombres entiers,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)}(z+\alpha)^{n+m+1}\varphi^m(z) = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^{m-p}\frac{\Gamma(n+m-p+1)}{\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)}\chi^p(z)(z+\alpha)^p.$$

Comme le nombre m n'est pas supérieur à n, les quantités

$$\chi(\alpha), \quad \chi'(\alpha), \ldots, \quad \chi^m(\alpha)$$

seront toutes divisibles par $(\alpha+a)^{n-m}$, qui ne peut être nul, en sorte que l'équation

$$\varphi^m(\alpha) = 0$$

deviendra

$$(13) \qquad 0 = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^{n-p}\frac{\Gamma(n+m-p+1)}{\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)}(2\alpha)^p\frac{\chi^p(\alpha)}{(\alpha+a)^{n-m}};$$

on a d'ailleurs

$$\chi(\alpha) = (\alpha-a)^m(\alpha+a)^n,$$

et, en développant d'après les puissances de $\alpha+a$,

$$\chi(\alpha) = \Gamma(m+1)\sum_{q=0}^{q=m}(-1)^q\frac{(2a)^q(\alpha+a)^{n+m-q}}{\Gamma(m-q+1)\Gamma(q+1)};$$

différentiant p fois par rapport à α, on aura

$$\chi^p(\alpha) = \Gamma(m+1)\sum_{q=0}^{q=m}(-1)^q\frac{\Gamma(n+m-q+1)}{\Gamma(m-q+1)\Gamma(q+1)\Gamma(n+m-p-q+1)}(2a)^q(\alpha+a)^{n+m-p-q},$$

en sorte que l'équation (13) deviendra

$$(14)\quad 0=\sum_{p=0}^{p=m}\sum_{q=0}^{q=m}(-1)^{p+q}\frac{\Gamma(n+m-p+1)\,\Gamma(n+m-q+1)}{\Gamma(m-p+1)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(m-q+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(n+m-p-q+1)}(2\alpha)^p(2a)^q(\alpha+a)^{2m-p-q}.$$

Telle est l'équation à laquelle doivent satisfaire les quantités a et α, dans le cas le plus général que nous ayons considéré; elle est évidemment symétrique et homogène par rapport à ces quantités, en sorte que si l'on pose

$$\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha}=\zeta,$$

elle prendra la forme

$$\Pi(\zeta)=0,$$

et sera du degré m en ζ, ainsi que nous l'avions annoncé.

IX.

Nous allons maintenant nous occuper plus particulièrement des courbes appartenant aux deux premières classes que nous avons distinguées plus haut et qui correspondent aux cas les plus simples de $m=1$ et $m=2$, n restant quelconque; mais, auparavant, il convient d'établir un théorème important qui nous sera d'une grande utilité.

Ainsi qu'on l'a vu au § II, on satisfera à l'équation

$$dx^2+dy^2=C^2\frac{z^{2\mu}dz^2}{P},$$

où P est un polynôme qui ne renferme ni facteurs réels, ni facteurs multiples, en posant

$$x+iy=Ce^{\omega i}\int\frac{\delta r^2}{p\delta\rho^2}z^\mu\,dz;$$

si l'intégrale du second membre est algébrique, elle sera de la forme $\frac{s}{\rho}$, s étant un polynôme premier à ρ, et l'on aura

$$\rho s'-s\rho'=Ce^{\omega i}z^\mu\delta\frac{r^2}{p\delta},$$

ρ' et s' désignant, suivant l'usage, les dérivées des polynômes ρ et s.

Cette équation, en désignant par ε une constante quelconque, peut s'écrire de la manière suivante

$$\rho(s' - \varepsilon\rho') - \rho'(s - \varepsilon\rho) = Ce^{\omega i} z^{\mu} \delta \frac{r^2}{p\delta}.$$

Cela posé, si $z - c$ désigne un facteur linéaire qui divise θ fois le polynôme $\frac{r}{p}$, et si l'on prend pour ε la valeur de $\frac{s}{\rho}$ correspondante à $z = c$, l'équation précédente montre que $s - \varepsilon\rho$ sera divisible $\theta + \varkappa$ fois par $z - c$; on aura donc

$$s - \varepsilon\rho = (z - c)^{\theta+2} s_1,$$

d'où

$$\frac{s}{\rho} \quad \text{ou} \quad x + iy = \frac{(z-c)^{\theta+2} s_1}{\rho} + \text{constante}.$$

Ce théorème nous permettra de former sans difficulté les équations des courbes appartenant aux deux premières classes.

X.

Ainsi qu'on l'a vu au § VI, si a et α désignent des quantités imaginaires conjuguées satisfaisant à l'équation

$$\frac{a^2 + \alpha^2}{a\alpha} = 2\frac{n-1}{n+1},$$

la courbe définie par l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{(z-a)(z+a)^n}{(z-\alpha)^2 (z+\alpha)^{n+1}} dz$$

est algébrique, et son arc est représenté par l'intégrale elliptique

$$C \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)}}.$$

Dans le cas que nous considérons en ce moment, le polynôme $\frac{r}{p}$ est divisible par $(z+a)^{n-1}$; donc, en vertu du théorème du § IX, le numérateur de $x + iy$ sera divisible par $(z+a)^{n+1}$, et comme ce numérateur ne peut être d'un degré supérieur à $n+1$, on aura néces-

sairement un résultat de la forme

$$x + iy = Ce^{\omega i}\frac{(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n} + \text{constante}; \tag{15}$$

C et ω sont encore des constantes réelles, un peu différentes néanmoins de celles qu'on désignait tout à l'heure par les mêmes lettres. Telle est l'équation qui détermine les courbes de la première classe; le principe à l'aide duquel elle a été formée ne peut pas être appliqué dans le cas de $n = 1$ qui appartient à la lemniscate, à cause que, dans ce cas, le polynôme $\frac{r}{p}$ n'est plus divisible par $z + a$; toutefois, il est facile de s'assurer que l'équation (15) doit être conservée, car la courbe qu'elle représente pour $n = 1$ n'est autre que la lemniscate.

L'angle ω et la constante du second membre de l'équation (15) ne font que laisser indéterminées l'origine et la direction des axes coordonnés; en égalant à zéro ces quantités, et posant $C = 1$, on aurait pour les courbes de la première classe,

$$x + iy = \frac{(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n},$$

$$x - iy = \frac{(z+\alpha)^{n+1}}{(z-a)(z+a)^n};$$

d'où l'on déduit, par la multiplication,

$$x^2 + y^2 = \frac{(z+a)(z+\alpha)}{(z-a)(z-\alpha)}.$$

Si l'on fait $n = 1$, les quantités a et α seront données par les équations

$$a^2 + \alpha^2 = 0, \quad a\alpha = 1,$$

et si l'on détermine la constante de l'équation (15) par la condition que le numérateur de $x + iy$ ne soit que du premier degré, on trouve

$$x + iy = C\frac{z}{z^2 - i} = C\frac{z^3 + iz}{z^4 + 1},$$

d'où

$$x = C\frac{z^3}{z^4 + 1}, \qquad y = C\frac{z}{z^4 + 1};$$

ce sont les équations de la lemniscate sous la forme la plus simple possible.

Si, en second lieu, on fait $n = 2$, on aura pour déterminer a et α,

$$a^2 + \alpha^2 = \frac{2}{3}, \quad a\alpha = 1,$$

et l'équation (15) donnera

$$x + iy = C\frac{z^2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z - \frac{1 - i\sqrt{2}}{9}}{\left(z - \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{3}}\right)^2\left(z + \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Cette équation appartient à une courbe du sixième degré, la plus simple de toutes celles de la première classe, après la lemniscate.

XI.

Pour obtenir sous forme finie les équations des courbes de la seconde classe, il faudra déterminer l'intégrale du second membre de l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega i}\int \frac{(z-a)^2(z+a)^n}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^{n+1}}\,dz,$$

dans laquelle les quantités conjuguées a et α satisfont à l'équation connue précédemment écrite; cette opération ne présente aucune difficulté, car, en vertu du théorème du § IX, le numérateur de $x + iy$, pour une valeur convenable attribuée à la constante que renferme l'intégrale, sera divisible par $(z+a)^{n+1}$, et comme ce numérateur ne saurait être d'un degré supérieur à $n+2$, on aura un résultat de la forme

$$x + iy = Ce^{\omega i}\frac{(z-b)(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^n} + \text{constante}, \tag{16}$$

en désignant par b une quantité que nous allons aisément déterminer.

Pour cela, nous allons différentier $x + iy$, et nous exprimerons que cette différentielle est nulle pour $z = a$; on trouve, en opérant ainsi,

$$\frac{1}{a-b} + \frac{n+1}{2a} - \frac{2}{a-\alpha} - \frac{n}{a+\alpha} = 0,$$

d'où

$$b = a\frac{(n+1)a^2 + (n+3)\alpha^2 - 2(n-2)a\alpha}{(n+1)\alpha^2 + (n+3)a^2 - 2(n-2)a\alpha}. \tag{17}$$

L'équation (16), dans laquelle b se trouve déterminé par l'équation (17), représentera les courbes de la seconde classe.

Si l'on fait $n = 2$, les quantités a et α seront déterminées par les équations

$$a^2 + \alpha^2 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad a\alpha = 1,$$

d'où

$$a^2 = \frac{1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \alpha^2 = \frac{1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

et l'équation (16), dans laquelle on déterminera la constante du second membre par la condition que le numérateur de $x + iy$ ne soit que du troisième degré, donnera

$$x + iy = Ce^{\omega i} \frac{z^3 - \frac{5 - i\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} z}{\left(z^2 - \frac{1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Cette équation détermine la plus simple des courbes de la seconde classe; faisant $\omega = 0$, on en déduit sans difficulté

$$x^2 + y^2 = C^2 \frac{z^2\left(z^4 - \frac{10z^2}{3\sqrt{3}} + 1\right)}{\left(z^4 - \frac{2z^2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2},$$

et, pour les valeurs de ses coordonnées rectangulaires,

$$x = C \frac{z^7 - \frac{11}{3\sqrt{3}} z^5 + \frac{11}{9} z^3 + \frac{1}{9\sqrt{3}} z}{\left(z^4 - \frac{2}{\sqrt{3}} z^2 + 1\right)^2},$$

$$y = C \frac{\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} z^5 - \frac{14\sqrt{2}}{9} z^3 + \frac{11\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} z}{\left(z^4 - \frac{2}{\sqrt{3}} z^2 + 1\right)^2}.$$

L'arc de la courbe définie par les équations précédentes a pour valeur

$$C\int\frac{dz}{\sqrt{z^4-\frac{2}{\sqrt{3}}z^2+1}},$$

où le radical $\sqrt{3}$ doit être pris avec le même signe que dans les valeurs des coordonnées x et y.

Dans ce cas remarquable, en prenant successivement le radical $\sqrt{3}$ avec les deux signes, on aura deux courbes dont les arcs sont identiques aux deux fonctions complémentaires dont les modules ont pour valeurs

$$k^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad k'^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Les deux courbes dont il est ici question ont pour centre commun l'origine des coordonnées. Elles se composent de deux boucles fermées qui se réunissent au centre comme dans la lemniscate. L'angle formé par les deux tangentes issues du centre commun a pour tangente $11\sqrt{2}$, ce qui donne, pour la valeur de cet angle, 86° 19′ 19″ de la division sexagésimale; cet angle est, comme on sait, de 90 degrés dans la lemniscate.

XII.

Nous ne nous occuperons pas, dans ce Mémoire, des propriétés géométriques des courbes remarquables dont il vient d'être fait mention; l'étude de ces propriétés sera l'objet d'un autre travail. Pour le moment, notre but est atteint, non que nous pensions avoir donné la solution la plus générale possible du problème de la représentation de la première transcendante elliptique; mais si nous avons laissé bien des choses à faire après nous sur cette matière, au moins croyons-nous avoir avancé la question, en prouvant, comme on l'a vu dans ce Mémoire, que le nombre des courbes *elliptiques* est illimité, et qu'auprès du cercle et de la lemniscate viennent se placer une série infinie

de courbes algébriques inconnues jusqu'aujourd'hui, et qui jouissent, comme celles-ci, de la propriété que leurs arcs peuvent être multipliés et divisés *algébriquement*.

XIII.

Nous ferons maintenant une remarque importante sur la décomposition que nous avons adoptée du polynôme

$$P = (z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2),$$

en deux facteurs conjugués, car cette décomposition était la seule qui pût conduire à des résultats nouveaux; cette circonstance mérite d'être expliquée avec quelques détails.

Si l'on pose

$$p = (z-a)(z+\alpha), \qquad \varpi = (z-\alpha)(z+a),$$
$$r = (z-a)^m (z+\alpha)^n, \qquad \rho = (z-\alpha)^m (z+a)^n,$$
$$\partial r = (z-a)^{m-1}(z+\alpha)^{n-1}, \quad \partial\rho = (z-\alpha)^{m-1}(z+a)^{n-1},$$

l'équation

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{\partial r^2}{p \partial \rho^2}\, dz$$

devient

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{(z-a)^m (z+\alpha)^n}{(z-\alpha)^{m+1}(z+a)^{n+1}}\, dz,$$

et l'intégrale du second membre sera algébrique si, en posant

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m (z+\alpha)^n}{(z+a)^{n+1}},$$

on a identiquement

$$\varphi^{m}(\alpha) = 0.$$

De même que précédemment, cette équation est homogène et symétrique par rapport aux quantités a et α, et elle est du degré m en $\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha}$, si toutefois m n'est pas supérieur à n, ce qu'on peut toujours

supposer; mais les valeurs de $\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha}$, tirées de cette équation, sont supérieures à l'unité, en sorte qu'on aura, pour déterminer a et α, deux équations de la forme

$$\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha} = \zeta > 1 \quad \text{et} \quad a\alpha = 1.$$

Les valeurs de a et α, déterminées de cette manière, seront réelles et inégales, et ne pourront ainsi convenir, car $x + iy$ ne se changera pas en $x - iy$ par le changement des quantités a et α l'une en l'autre.

Dans le cas le plus simple de $m = 1$, on aurait

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{(z-a)(z+\alpha)^n}{(z-\alpha)^2(z+a)^{n+1}}\, dz,$$

et l'équation

$$\varphi'(\alpha) = 0$$

donnerait

$$\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha} = \frac{n+2}{n}.$$

Dans le cas de $m = 2$, on aurait

$$x + iy = Ce^{\omega i} \int \frac{(z-a)^2(z+\alpha)^n}{(z-\alpha)^3(z+a)^{n+1}}\, dz,$$

et l'équation

$$\varphi''(\alpha) = 0$$

donnerait aisément

$$n(n-1)\left(\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha}\right)^2 - 2n(n+3)\left(\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha}\right) + (n^2+7n+8) = 0,$$

d'où

$$\frac{a^2+\alpha^2}{2a\alpha} = \frac{n(n+3) \pm 2\sqrt{2n(n+1)}}{n(n-1)},$$

et il est facile de s'assurer que ces deux valeurs seront toujours plus grandes que l'unité, n étant un nombre entier et positif.

XIV.

Dans ce qui précède, nous avions principalement pour but la représentation géométrique de la première transcendante elliptique: aussi nous nous sommes borné à considérer l'équation

$$dx^2 + dy^2 = C^2 \frac{z^{2\mu}\, dz^2}{P},$$

dans laquelle P désigne un polynôme entier et rationnel premier avec sa dérivée; nous allons faire voir maintenant que la marche suivie au § II s'applique sans difficulté à l'équation générale

$$dx^2 + dy^2 = Z\, dz^2,$$

où Z désigne une fonction rationnelle quelconque de z.

Soient donc M et P deux fonctions entières premières entre elles, et considérons l'équation

$$dx^2 + dy^2 = \frac{M}{P}\, dz^2. \tag{18}$$

On voit d'abord que tout facteur réel qui se trouve dans M ou dans P doit y être un nombre pair de fois; car autrement, $\frac{M}{P}$ pourrait changer de signe, ce qui est absurde. On pourra donc poser

$$M = M_1^2 M_2, \quad P = P_1^2 P_2,$$

M_1^2, P_1^2 désignant les produits des facteurs réels de M et P, et de même. M_2 et P_2 désignant les produits des facteurs imaginaires; si, en outre, et d'après notre notation habituelle, on appelle m et μ deux polynômes conjugués dont le produit soit M_2, p et ϖ deux polynômes conjugués dont le produit soit P_2, on aura

$$M = M_1^2 m\mu, \quad P = P_1^2 p\varpi,$$

et l'équation (18) deviendra

$$dx^2 + dy^2 = \frac{M_1^2 m\mu}{P_1^2 p\varpi}\, dz^2.$$

ou

$$\frac{dx+i\,dy}{\frac{\mathrm{M}_1 m}{\mathrm{P}_1 p}\,dz}\,\frac{dx-i\,dy}{\frac{\mathrm{M}_1 \mu}{\mathrm{P}_1 \varpi}\,dz}=1;$$

on voit donc que les deux facteurs du premier membre sont deux fonctions rationnelles et conjuguées dont le module est 1, en sorte que si t et τ représentent deux polynômes conjugués premiers entre eux, et du reste indéterminés, on aura nécessairement

$$dx+i\,dy=\frac{t}{\tau}\frac{\mathrm{M}_1 m}{\mathrm{P}_1 p}\,dz,$$

$$dx-i\,dy=\frac{\tau}{t}\frac{\mathrm{M}_1 \mu}{\mathrm{P}_1 \varpi}\,dz,$$

et l'une de ces équations sera une conséquence de l'autre, car elle s'en déduira par le changement de i en $-i$. La première donnera

$$x+iy=\int\frac{t}{\tau}\frac{\mathrm{M}_1 m}{\mathrm{P}_1 p}\,dz; \tag{19}$$

on peut, sans altérer la généralité de cette équation, supposer m et p premiers, l'un avec t, l'autre avec τ; en effet, désignons par m_1 le produit des facteurs de m qui se trouvent dans t, par m_2 le produit des facteurs de m premiers à t, en sorte qu'on ait

$$m=m_1 m_2.$$

Désignons de même par p_1 le produit des facteurs de p qui se trouvent dans τ, par p_2 le produit de tous les autres, et posons

$$p=p_1 p_2;$$

soient aussi μ_1, μ_2, ϖ_1, ϖ_2 les polynômes conjugués de m_1, m_2, p_1, p_2; l'équation (19) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$x+iy=\int\frac{tm_1\varpi_1}{\tau\mu_1 p_1}\frac{\mathrm{M}_1\mu_1 m_2}{\mathrm{P}_1\varpi_1 p_2}\,dz.$$

D'ailleurs, $\mu_1 m_2$ et $\varpi_1 p_2$ sont des polynômes respectivement de même module que m et p, et qui sont premiers l'un avec le numérateur, l'autre avec le dénominateur de la fraction $\frac{tm_1\varpi_1}{\tau\mu_1 p_1}$ réduite à sa plus simple expression; si donc on met simplement m et p au lieu de $\mu_1 m_2$ et $\varpi_1 p_2$,

$\frac{t}{\tau}$ au lieu de $\frac{tm_1\varpi_1}{\tau\mu_1 p_1}$, l'équation précédente ne sera autre que l'équation (19), où m et p seront dès lors premiers l'un avec t, l'autre avec τ.

Il est bien entendu, toutefois, que pour avoir toutes les solutions de l'équation (18), il sera nécessaire de considérer toutes les décompositions possibles des polynômes M et P en facteurs conjugués.

Cela posé, pour que l'intégrale de l'équation (19) soit algébrique, il faut évidemment que le polynôme P_1 ne renferme aucun facteur simple, non plus que le dénominateur de chacune des fractions

$$\frac{t}{p} \quad \text{et} \quad \frac{m}{\tau},$$

supposées réduites à leur plus simple expression.

Soit m_1 le plus grand commun diviseur entre m et τ, et posons

$$m = m_1 m_2, \quad \text{et, en même temps,} \quad \mu = \mu_1 \mu_2,$$

le dénominateur de la fraction $\frac{m}{\tau}$, réduite à sa plus simple expression, sera $\frac{\tau}{m_1}$ et ne devra renfermer aucun facteur simple; si donc ρ désigne un polynôme quelconque, δ le plus grand commun diviseur entre ce polynôme et sa dérivée, on devra poser

$$\tau = m_1 \frac{\rho^2}{\delta}, \quad \text{et, par suite,} \quad t = \mu_1 \frac{r^2}{\delta}.$$

Il faut, en outre, que le dénominateur de la fraction $\frac{t}{p}$ ou $\mu_1 \frac{r^2}{p\delta}$, supposée réduite à sa plus simple expression, ne renferme aucun facteur simple, et comme p est premier avec μ_1, il suffira de considérer la fraction $\frac{r^2}{p\delta}$.

Soit p_1 le plus grand commun diviseur à p et $\frac{r^2}{\delta}$, et posons

$$p = p_1 p_2, \quad \text{avec} \quad \varpi = \varpi_1 \varpi_2,$$

la fraction $\frac{r^2}{p\delta}$, réduite à sa plus simple expression, aura p_2 pour dénominateur; si donc e désigne un polynôme convenablement choisi, g le

plus grand commun diviseur entre ce polynôme et sa dérivée, on devra poser

$$p_2 = \frac{e^2}{g}, \quad \text{avec} \quad \varpi_2 = \frac{\varepsilon^2}{\gamma};$$

d'après cela, l'équation (19) deviendra

$$x + iy = \int \frac{\frac{r^2}{p_1\partial}}{\frac{\rho^2}{\delta}} \frac{M_1\mu_1 m_2}{P_1 \frac{e^2}{g}}\, dz.$$

$M_1\mu_1 m_2$ est un polynôme dont le module est $\sqrt{M}$, je le désignerai simplement par m; de plus, comme P_1 ne renferme pas de facteurs simples, on pourra poser

$$P_1 = \frac{F^2}{G},$$

G désignant le plus grand commun diviseur du polynôme F et de sa dérivée, et l'on aura

$$x + iy = \int \frac{\frac{r^2}{p_1\partial}}{\frac{\rho^2}{\delta}} \frac{m\,dz}{\frac{F^2}{G}\cdot\frac{e^2}{g}}. \tag{20}$$

Telle est l'équation qui fera connaître les différentes solutions rationnelles de l'équation (18), en prenant pour r et ρ deux polynômes conjugués respectivement divisibles par p_1 et ϖ_1, premiers avec μ et m, et tels que, pour chaque racine c de l'équation

$$\rho = 0,$$

on ait

$$\mathfrak{L} \frac{(z-c)\frac{r^2}{p_1\partial}\, m}{((z-c))\frac{\rho^2}{\delta}\frac{F^2}{G}\frac{e^2}{g}} = 0.$$

Quant aux différentes quantités que nous avons introduites, elles seront données par les équations

$$m\mu = M,$$

$$\frac{F^2}{G^2}\frac{e^2}{g}\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\, p_1\varpi_1 = P.$$

XV.

Si pour des valeurs déterminées des polynômes arbitraires r et ρ, l'intégrale de l'équation (20) est algébrique, la valeur de $x + iy$ sera une fraction rationnelle ayant pour dénominateur $\mathrm{F}e\rho$; on aura donc

$$x + iy = \frac{s}{\mathrm{F}e\rho},$$

s désignant un polynôme premier avec $\mathrm{F}e\rho$, et de même

$$x - iy = \frac{\sigma}{\mathrm{F}\varepsilon r},$$

σ étant, comme d'habitude, le polynôme conjugué de s; si l'on désigne par $\sqrt{\mathrm{R}}$, $\sqrt{\mathrm{S}}$ et $\sqrt{\mathrm{E}}$ les modules des polynômes r et ρ, s et σ, e et ε, on aura, en multipliant les équations précédentes,

$$x^2 + y^2 = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{F}^2\mathrm{ER}},$$

et si les polynômes conjugués e et ε sont premiers entre eux, les valeurs de x et y seront de la forme

$$x = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{FER}}, \quad y = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{FER}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2}{\mathrm{ER}} = \mathrm{S} = \text{entier}.$$

Si, en outre, F est une constante, c'est-à-dire si le dénominateur P du second membre de l'équation (18) ne renferme pas de facteurs réels, on aura ce théorème déjà démontré dans un cas plus particulier.

Théorème. *Si l'on satisfait à l'équation*

$$dx^2 - dy^2 = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}\,dz^2,$$

en posant

$$x = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}}, \quad y = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}},$$

on aura nécessairement

$$\frac{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2}{\mathrm{R}} = \text{entier}.$$