

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MICHAEL ROBERTS

Note sur deux systèmes généraux de trajectoires orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 10 (1845), p. 251-256.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__251_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR DEUX SYSTÈMES GÉNÉRAUX DE TRAJECTOIRES ORTHOGONALES:

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Désignons par $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ les distances d'un point O aux sommets $P_1, P_2, \dots, P_n$ d'un polygone quelconque, et par $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les angles $OP_1P_2, OP_2P_3, \dots, OP_{n-1}P_n$; je dis que les équations

$$U') \quad \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 + \dots + \varpi \omega_n = (\lambda + \mu + \dots + \varpi) \zeta,$$

Soit OO' (∂s) un élément d'une courbe quelconque du premier système (U), on a

$$\phi r_n = \phi s \cos P_n O O' :$$

$$\lambda \frac{\partial r}{\partial x} + \mu \frac{\partial r}{\partial y} + \dots + \pi \frac{\partial r}{\partial z} = 0;$$

on aura donc

$$(u) \quad \lambda \frac{\cos P_1 OO'}{r_1} + \mu \frac{\cos P_2 OO'}{r_2} + \dots + \varpi \frac{\cos P_n OO'}{r_n} = 0.$$

Soit encore OO'' ($\partial s''$) un élément d'une courbe quelconque du système (U'), on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial s''} &= \frac{\sin P_1 OO''}{r_1}, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial s''} &= \frac{\sin P_2 OO''}{r_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial \omega_n}{\partial s''} &= \frac{\sin P_n OO''}{r_n}, \end{aligned}$$

et, à cause de l'équation (U'),

$$\lambda \frac{\partial \omega_1}{\partial s''} + \mu \frac{\partial \omega_2}{\partial s''} + \dots + \varpi \frac{\partial \omega_n}{\partial s''} = 0;$$

donc

$$(u') \quad \lambda \frac{\sin P_1 OO''}{r_1} + \mu \frac{\sin P_2 OO''}{r_2} + \dots + \varpi \frac{\sin P_n OO''}{r_n} = 0.$$

On conclut aisément des équations (u) et (u') que les éléments ∂s et $\partial s''$ sont perpendiculaires entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

Si les points $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés et de rayon a , et que les quantités $\lambda, \mu, \nu, \dots$ soient toutes égales, on pourra aisément déterminer l'équation des courbes du système (U').

Pour cela nous poserons

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \omega_1 &= \psi_1, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \omega_2 &= \psi_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \omega_n &= \psi_n, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$n \frac{\pi}{2} - \pi - (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n.$$

On aura aussi, en désignant par r et ω les coordonnées polaires de notre courbe relatives au centre du polygone,

$$\begin{aligned}\text{tang } \psi_1 &= \frac{r \sin \omega}{a - r \cos \omega}, \\ \text{tang } \psi_2 &= \frac{r \sin \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right)}{a - r \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right)}, \\ &\dots \dots \dots \\ \text{tang } \psi_n &= \frac{r \sin \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)}{a - r \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)},\end{aligned}$$

ou [*]

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{r}{a} \sin \omega + \frac{r^2}{2a^2} \sin 2\omega + \frac{r^3}{3a^3} \sin 3\omega + \dots, \\ \psi_2 &= \frac{r}{a} \sin \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) + \frac{r^2}{2a^2} \sin 2 \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) + \frac{r^3}{3a^3} \sin 3 \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) + \dots, \\ &\dots \dots \dots \\ \psi_n &= \frac{r}{a} \sin \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) + \frac{r^2}{2a^2} \sin 2 \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) \\ &\quad + \frac{r^3}{3a^3} \sin 3 \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) + \dots;\end{aligned}$$

ajoutant ces équations, et se rappelant que la somme

$$\sin k\omega + \dots + \sin k \left[\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right]$$

est égale à $n \sin k\omega$ ou à zéro suivant que k est ou non divisible par n .
on aura

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n = \frac{r^n}{a^n} \sin n\omega + \frac{r^{2n}}{2a^{2n}} \sin 2n\omega + \frac{r^{3n}}{3a^{3n}} \sin 3n\omega + \dots = \text{arc tang } \frac{r^n \sin n\omega}{a^n - r^n \cos n\omega},$$

ou, en faisant $\text{tang } (\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n) = \cot n\delta$,

$$(1) \quad r^n \cos n(\omega - \delta) = a^n \cos n\delta,$$

ce qui s'accorde avec l'équation de M. Serret.

[*] Voyez *Journal de l'École Polytechnique*, xix^e cahier, page 410.

La propriété qui a servi à former cette équation a été constatée depuis longtemps pour l'hyperbole équilatère, ou dans le cas particulier de $n = 2$.

Dans le Mémoire déjà cité, M. Serret a montré que les courbes représentées par l'équation (1) possèdent n sommets, déterminés par les valeurs de l'angle polaire, $\vartheta, \frac{2\pi}{n} + \vartheta, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n} + \vartheta$, et si l'on augmente les rayons correspondants dans le rapport $\sqrt[n]{2}$ à 1, les extrémités seront des points analogues aux foyers des hyperboles équilatères (qui, du reste, font partie des systèmes de courbes que nous considérons). Ces points sont sur la circonférence du cercle dont le rayon ρ est déterminé par l'équation

$$\rho^n = 2a^n \cos n\vartheta,$$

et le produit des distances d'un point de la courbe aux foyers est égal à la puissance $n^{\text{ième}}$ du rayon correspondant de la courbe; enfin le lieu des foyers du système de courbes représentées par l'équation (1) est une courbe dont l'équation est

$$\rho^n = 2a^n \cos n\omega.$$

Nous allons maintenant démontrer quelques théorèmes analogues dans la géométrie sphérique.

Soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ les distances mesurées par des arcs de grands cercles, d'un point O aux sommets $P_1, P_2, \dots, P_n$ d'un polygone quelconque formé aussi par des arcs de grands cercles, et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les angles $OP_1P_2, OP_2P_3, \dots, OP_{n-1}P_n$; il est facile de démontrer que les équations

$$(V) \quad \left(\tan \frac{\rho_1}{2}\right)^\lambda \left(\tan \frac{\rho_2}{2}\right)^\mu \dots \left(\tan \frac{\rho_n}{2}\right)^\varpi = \left(\tan \frac{\vartheta}{2}\right)^{\lambda+\mu+\dots+\varpi},$$

$$(V') \quad \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 + \dots + \varpi\omega_n = (\lambda + \mu + \dots + \varpi)\vartheta,$$

représentent deux systèmes de courbes orthogonales.

Si OO' est un élément d'une courbe quelconque du système V, on trouve aisément

$$\lambda \frac{\cos P_1 OO'}{\sin \rho_1} + \mu \frac{\cos P_2 OO'}{\sin \rho_2} + \dots + \varpi \frac{\sin P_n OO'}{\sin \rho_n} = 0,$$

et de même si OO'' est un élément d'une courbe quelconque du système V' , on a aussi

$$\lambda \frac{\cos P_1 OO''}{\sin \rho_1} + \mu \frac{\cos P_2 OO''}{\sin \rho_2} + \dots + \omega \frac{\cos P_n OO''}{\sin \rho_n} = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Si les points $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés et de rayon *sphérique* α , on aura facilement en coordonnées polaires ρ, ω l'équation des courbes du système V .

On trouve, en effet, assez facilement

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{1}{2} \rho_1 &= \frac{\tan^2 \frac{1}{2} \rho - 2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \rho \cos \omega + \tan^2 \frac{1}{2} \alpha}{\tan^2 \frac{1}{2} \rho \tan^2 \frac{1}{2} \alpha + 2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \rho \cos \omega + 1}, \\ \tan^2 \frac{1}{2} \rho_2 &= \frac{\tan^2 \frac{1}{2} \rho - 2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) + \tan^2 \frac{1}{2} \alpha}{\tan^2 \frac{1}{2} \rho \tan^2 \frac{1}{2} \alpha + 2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) + 1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \tan^2 \frac{1}{2} \rho_n &= \frac{\tan^2 \frac{1}{2} \rho - 2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) + \tan^2 \frac{1}{2} \alpha}{\tan^2 \frac{1}{2} \rho \tan^2 \frac{1}{2} \alpha + 2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \rho \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) + 1}, \end{aligned}$$

et, par la multiplication,

$$\frac{\tan^{2n} \frac{1}{2} \rho - 2 \tan^n \frac{1}{2} \alpha \tan^n \frac{1}{2} \rho \cos n\omega + \tan^{2n} \frac{1}{2} \alpha}{\tan^{2n} \frac{1}{2} \rho \tan^{2n} \frac{1}{2} \alpha \mp 2 \tan^n \frac{1}{2} \rho \tan^n \frac{1}{2} \alpha \cos n\omega + 1} = \tan^{2n} \frac{\rho}{2},$$

le signe supérieur ou inférieur devant s'employer selon que n est pair ou impair.

On déduit aisément, pour l'équation différentielle du système V' .

$$\frac{d\rho}{\sin \rho d\omega} = \frac{\tan^n \frac{1}{2} \rho (1 \pm \tan^{2n} \frac{1}{2} \alpha) - \tan^n \frac{1}{2} \alpha (1 \pm \tan^{2n} \frac{1}{2} \rho) \cos n\omega}{\tan^n \frac{1}{2} \alpha \sin n\omega (1 \mp \tan^{2n} \frac{1}{2} \rho)}.$$

L'intégration de cette équation s'effectue sans difficulté: δ désignant une constante, on trouve pour l'équation du système V' ,

$$(2) \quad \frac{1 \pm \tan^{2n} \frac{1}{2} \rho}{1 \pm \tan^{2n} \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\tan^n \frac{1}{2} \rho \cdot \cos n(\omega - \delta)}{\tan^n \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos n\delta}.$$

Si $n = 2$, l'équation du système V devient

$$\operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \rho - \frac{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha (1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta)}{1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho \cos 2\omega + \frac{\operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta} = 0,$$

équation qui présente de l'analogie avec celle des cassinoïdes homofocales. Si l'on considère la courbe représentée par cette équation comme la base d'un cône qui aurait pour sommet le centre de la sphère, cette surface sera du quatrième ordre; l'équation (2) pour $n=2$ deviendra

$$\frac{1}{\sin^2 \rho} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \delta) \cos^2 (\omega - \delta) - (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta) \sin^2 (\omega - \delta)}{\sin^2 \alpha \cos 2\delta},$$

et représente des hyperboles équilatères sphériques ayant même centre et un point commun.

Concluons donc que :

Si deux droites passent par un point, le lieu d'une troisième droite qui passe par le même point et fait les angles θ , θ' avec les deux premières, tel que le produit $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta' = \text{constante}$, sera un cône du quatrième ordre, et le système de cônes, dans lequel cette constante varie, sera coupé orthogonalement par un système de cônes du second ordre, ayant même sommet et une commune arête. Le lieu des lignes focales des cônes du second ordre sera un cône du quatrième ordre et fait partie du système des trajectoires orthogonales.

Ce théorème paraît être analogue à un théorème donné par M. Lamé, et dont parle M. Serret dans le Mémoire si souvent cité.