

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

A. CAYLEY

**Addition à la note sur quelques intégrales multiples,  
insérée dans le cahier d'avril**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 10 (1845), p. 242-244.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1845\\_1\\_10\\_242\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10_242_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

ADDITION A LA NOTE  
SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES,

INSÉRÉE DANS LE CAHIER D'AVRIL [\*];

PAR M. A. CAYLEY.

On démontre, au moyen des formules que j'ai données sur ce sujet, une propriété remarquable de l'intégrale multiple

$$V = \int dx_1 \dots dx_n x_1^{2\alpha_1-1} \dots x_{f+1}^{2\alpha_{f+1}-1} \dots \varphi(a_1 - x_1 t, \dots),$$

prise entre les limites

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{h_n^2} = 1.$$

En effet, en supposant toujours que l'on peut développer la fonction  $\varphi$  selon les puissances entières et positives de  $t$ , l'intégrale  $V$  peut s'exprimer sous la forme

$$V = \frac{(-1)^f \pi^{\frac{1}{2}n} t^f}{2^{k+f}} \left( \frac{d}{da_1} \dots \frac{d}{da_f} \right) \left( h_1^3 \frac{d}{dh_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( h_n^3 \frac{d}{dh_n} \right)^{\alpha_n} h_1^3 \dots h_{f+1}^3 \dots U,$$

où

$$k = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$U = \sum_{p=0}^{p=\infty} \left( \frac{t^p}{2^{2p} \Gamma(p+1) \Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p \varphi(a_1, \dots) \right),$$

$$\nabla = h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + \dots + h_n^2 \frac{d^2}{da_n^2}.$$

Soit

$$W = \int dx_1 \dots \varphi(a_1 - x_1 t T, \dots)$$

entre les mêmes limites que  $V$ . On a

$$W = \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \dots h_n \sum_{p=0}^{p=\infty} \left( \frac{T^{2p} t^{2p}}{2^{2p} \Gamma(p+1) \Gamma(p+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p \varphi(a_1, \dots) \right).$$

---

[\*] Voir page 158.

En multipliant par

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} T^{n+1} (1 - T^2)^{k+f} dT,$$

et intégrant depuis  $T = 0$  jusqu'à  $T = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 T^{n+1} (1 - T^2)^{k+f} W dT \\ &= \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \dots h_n \sum_{p=0}^{p=\infty} \left( \frac{t^{2p}}{2^{2p} \Gamma(p+1) \Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p \varphi(a_1, \dots) \right), \end{aligned}$$

puisque en général

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 T^{2p+n+1} (1 - T^2)^{k+f} dT = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2}n+1)}{\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)}.$$

On a donc l'équation

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 T^{n+1} (1 - T^2)^{k+f} W dT = \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \dots h_n U.$$

Mettons la valeur de  $U$  qui en résulte, dans l'équation entre  $V$  et  $U$ ; faisons aussi  $t = 1$ , ce qui ne nuit pas à la généralité. On a, en rassemblant les formules,

$$V = \int dx_1 \dots dx_n \dots x_1^{2z_1+1} \dots x_{f+1}^{2z_{f+1}+1} \dots \varphi(a_1 - x_1, \dots,$$

$$W = \int dx_1 \dots dx_n \dots \varphi(a_1 - x_1 T, \dots),$$

$$V = \frac{-1^f}{2^{f+f-1} \Gamma(k+f)} \left( \frac{d}{da_1} \dots \frac{d}{da_f} \right) \left( h_1^3 \frac{d}{dh_1} \right)^{z_1} \dots \left( h_n^3 \frac{d}{dh_n} \right)^{z_n} h_1^2 \dots h_f^2 \int_0^1 T^{n+1} (1 - T^2)^{k+f} W dT.$$

Ce qui établit ce théorème: La suite des intégrales  $V$  s'exprime au moyen des coefficients différentiels par rapport à  $h_1 \dots h_n$  et  $a_1 \dots a_f$  de la seule intégrale

$$\int_0^1 T^{n+1} (1 - T^2)^{k+f} \int dx_1 \dots dx_n \dots \varphi(a_1 - x_1 T, \dots).$$

En supposant que les indices dans  $V$  soient tous pairs, on a  $f = 0$ . Les

symboles  $\frac{d}{da_1}, \dots$  n'entrent plus dans l'expression de V. En changeant la fonction  $\varphi$ , on a ces formules plus simples

$$\begin{cases} V = \int dx_1 \dots dx_n \cdot x_1^{2\alpha_1} \dots x_n^{2\alpha_n} \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n), \\ W = \int dx_1 \dots dx_n \cdot \varphi(Tx_1, \dots, Tx_n), \\ V = \frac{1}{2^{k-1} \Gamma(k)} \left( h_1^3 \frac{d}{dh_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( h_n^3 \frac{d}{dh_n} \right)^{\alpha_n} \int_0^1 T^{n+1} (1 - T^2)^k W dT, \end{cases}$$

où V s'exprime au moyen des coefficients différentiels par rapport à  $h_1, \dots, h_n$  de l'intégrale

$$\int_0^1 T^{n+1} (1 - T^2)^k \int dx_1 \dots dx_n \cdot \varphi(Tx_1, \dots, Tx_n),$$

de manière que nous avons trouvé des relations entre des intégrales définies qui contiennent une fonction indéterminée, assujettie à la seule condition d'être développable dans les limites de l'intégration selon les puissances entières et positives des variables [\*], mais dans lesquelles les limites sont données par

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{h_n^2} = 1.$$

---

[\*] Cette condition est supposée dans la démonstration, mais il me paraît, d'après la forme du résultat, qu'elle n'est pas essentielle.