

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Sur quelques intégrales multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 10 (1845), p. 158-168.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__158_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES:

PAR M. A. CAYLEY.

J'ai donné, il y a trois ans, dans le *Cambridge Mathematical Journal*, une formule assez singulière pour l'intégrale multiple

$$\int \dots dx_1 dx_2 \dots \varphi(a_1 - x_1, a_2 - x_2, \dots),$$

prise entre les limites données par l'équation

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \frac{x_2^2}{h_2^2} + \dots = 1,$$

la fonction φ étant seulement assujettie à la condition de ne pas devenir infinie entre les limites de l'intégration. L'expression que j'obtiens est une suite infinie, dont le terme général est de cette forme

$$A_p \left(h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + h_2^2 \frac{d^2}{da_2^2} + \dots \right)^p \cdot \varphi(a_1, a_2, \dots).$$

En appliquant ce résultat à un cas particulier, j'ai obtenu l'intégrale à n variables analogue à celle qui exprime le *potentiel* d'un ellipsoïde homogène, pour un point extérieur. J'ai depuis cherché à étendre ces résultats au cas d'une densité variable et égale à une fonction rationnelle et entière des coordonnées, et d'une loi d'attraction selon une puissance quelconque de la distance (toujours à n variables); mais quoique j'aie réussi à effectuer cette généralisation, mes formules étaient si confuses et si inférieures à celles que donne la belle analyse de M. Lejeune-Dirichlet, que je ne les ai jamais publiées. Cependant, en revenant il y a quelques jours sur ce sujet, en me fondant sur une intégrale plus générale, j'ai trouvé que la question était à peine plus difficile que dans le cas d'une densité constante, et se laissait traiter exactement de la même manière. J'ai réussi de cette façon à exprimer

l'intégrale cherchée au moyen d'une seule intégrale définie *abélienne*, et de ses coefficients différentiels relatifs aux constantes qui y entrent; et il m'a paru que les formules que j'ai ainsi obtenues pourraient n'être pas tout à fait indignes de l'attention des géomètres.

Considérons l'intégrale multiple à n variables V , donnée par l'équation

$$V = \int dx_1 \dots x_1^{2r_1+1} \dots (f \text{ termes}) x_{f+1}^{2r_{f+1}} \dots (\overline{n-f} \text{ termes}) \varphi(a_1, x_1, t, \dots)$$

où les variables $x_1, \dots$ doivent recevoir des valeurs réelles quelconques, positives ou négatives, qui satisfassent à la condition

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \dots \leq 1;$$

et l'on suppose de plus qu'il est permis de développer (sous le signe intégral) la fonction φ , suivant les puissances ascendantes des variables $x_1, \dots$.

En faisant ce développement, il est clair que les termes qui contiennent des puissances impaires d'une ou de plusieurs des variables se détruisent par l'intégration; donc, en ne faisant attention qu'aux termes qui contiennent seulement des puissances paires, on a ce terme général

$$\frac{(-)^f t^{2p+f}}{[2r_1+1]^{2r_1+1} \dots [2r_{f+1}]^{2r_{f+1}+1}} \left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1+1} \dots \left(\frac{d}{da_{f+1}}\right)^{2r_{f+1}} \dots \varphi(a_1, \dots) \\ \times \int dx_1 \dots x_1^{2r_1+2r_1+2} \dots x_{f+1}^{2r_{f+1}+2r_{f+1}} \dots$$

où

$$p = r_1 + \dots;$$

il est à peine nécessaire de remarquer que, dans l'expression

$$[2r_1+1]^{2r_1+1} \dots [2r_{f+1}]^{2r_{f+1}+1},$$

il faut prendre (f) termes tels que $[2r_1+1]^{2r_1+1}$, et $\overline{n-f}$ termes de l'autre forme $[2r_{f+1}]^{2r_{f+1}}$, et ainsi dans tous les cas semblables.

L'intégrale qui entre dans cette formule a été trouvée, comme on

sait, par M. Dirichlet. Sa valeur est

$$\frac{\Gamma\left(\alpha_1 + r_1 + \frac{3}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\alpha_{f+1} + r_{f+1} + \frac{1}{2}\right) \cdots}{\Gamma\left(p + k + f + \frac{n}{2} + 1\right)} h_1^{2\alpha_1 + 2r_1 + 3} \cdots h_{f+1}^{2\alpha_{f+1} + 2r_{f+1} + 1},$$

ou

$$k = \alpha_1 + \dots$$

Le terme entier devient, après quelques réductions très-simples,

$$\times \frac{L_1 \cdots M_{f+1} \cdots}{[r_1]^{r_1} \cdots} h_1^{2\alpha_1 + 2r_1 + 3} \cdots h_{f+1}^{2\alpha_{f+1} + 2r_{f+1} + 1} \left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1 + 1} \cdots \left(\frac{d}{da_{f+1}}\right)^{r_{f+1}} \cdots \varphi(a_1, \dots),$$

où l'on écrit, pour un moment,

$$\begin{aligned} L_1 &= \overline{2r_1 + 3} \overline{2r_1 + 5} \cdots \overline{2r_1 + 2\alpha_1 + 1}, \\ &\vdots \\ M_{f+1} &= \overline{2r_{f+1} + 1} \overline{2r_{f+1} + 3} \cdots \overline{2r_{f+1} + 2\alpha_{f+1} - 1}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

puis on le transforme en

$$\times \frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}} n t^{2p+f}}{2^{2p+k+f} \Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)} \left(\frac{d}{da_1} \cdots \frac{d}{da_f}\right) \cdot \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \cdots h_1^{2r_1+3} \cdots h_{f+1} \cdots \frac{1}{[r_1]^{r_1}} \left(h_1^3 \frac{d^2}{da_1^2}\right)^{r_1} \cdots \varphi(a_1, \dots).$$

En effet, les symboles $\frac{d}{da_i}$ et $h_i^3 \frac{d}{dh_i}$ étant convertibles, on a

$$\frac{d}{da_i} \cdot \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \cdot h_i^{2r_i+3} \left(\frac{d}{da_i}\right)^{2r_i} = L_i h_i^{2r_i+2\alpha_i+3} \left(\frac{d}{da_i}\right)^{2r_i+1};$$

et ainsi de suite.

En prenant la somme de tous les termes qui correspondent à une

même valeur de p , on a

$$S_{[r_1]^{r_1}} \left(h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} \right)^{2r_1} \dots = \frac{1}{[p]^p} \nabla^p.$$

En posant

$$\nabla = \left(h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + \dots \right);$$

puis, en observant que p doit s'étendre depuis 0 jusqu'à ∞ , on a, pour l'intégrale cherchée,

$$V = \frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}n}}{2^{k+f}} \left(\frac{d}{da_1} \dots \frac{d}{da_f} \right) \cdot \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1} \right)^{\alpha_1} \dots \\ \times \left[h_1^3 \dots h_{f+1}^3 \dots t^f \cdot S_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p} [p]^p \Gamma \left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1 \right)} \nabla^p \cdot \varphi(a_1, \dots) \right) \right],$$

ce qui fait voir que l'intégrale V dépend de cette seule expression

$$U = S_0^\infty \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p} [p]^p \Gamma \left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1 \right)} \nabla^p \cdot \varphi(a_1, \dots) \right).$$

On peut remarquer, en passant, que cette quantité satisfait à cette équation différentielle

$$\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \cdot \left(t^{-2k-2f-n+1} \frac{d}{dt} (t^{2k+2f+n} U) \right) - \nabla U = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + (2k + 2f + n + 1) \frac{1}{t} \frac{dU}{dt} - \nabla U = 0.$$

M. G. Boole, de Lincoln, a déduit une équation semblable de mes formules dans le *Mathematical Journal*. C'est à lui qu'on doit l'introduction dans l'intégrale proposée de cette quantité t , ce qui, au reste, n'est pas d'une grande importance ici; mais j'ai cru devoir la conserver, à cause de cette équation même, qui pourrait conduire à des résultats intéressants.

A présent, soit

$$\varphi(a_1 - x, t, \dots) = \frac{1}{((a_1 - x, t)^2 + \dots)^{\frac{1}{2}n-s}}?$$

où s est un nombre entier; je pose, pour abrégé,

$$\frac{1}{2}n - s = i, \quad k + f + s = \sigma,$$

ce qui donne

$$\Gamma\left(p + k + f + \frac{1}{2}n + 1\right) = \Gamma(p + i + \sigma + 1) = [p + i + \sigma]^{p+1} \cdot \Gamma(i + \sigma);$$

et ainsi

$$U = \frac{1}{\Gamma(i + \sigma)} S_0^\infty \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p} [p]^p [p + i + \sigma]^{p+1}} \nabla^p \cdot \frac{1}{(a_1^2 + \dots)^i} \right).$$

Le cas de $\sigma = 0$, qui est le plus simple, est, en effet, celui du Mémoire cité, et à ce cas on peut réduire celui de σ entier négatif; il y a même deux manières d'effectuer cette réduction. Représentons, en effet, la valeur de U par cette notation plus complète U_i ; on obtient tout de suite

$$U_i^{-\sigma} = 2^{-2\sigma} t^{2\sigma-2i} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^\sigma (t^{2i} U_i^0),$$

et

$$U_i^{-\sigma} = \frac{1}{2^{2\sigma} [1-i]^\sigma \left[i - \frac{1}{2}n \right]^\sigma} \left(\frac{d^2}{da_1^2} + \dots \right)^\sigma U_{i-\sigma}^0,$$

la seconde desquelles équations se déduit de cette formule facile à démontrer,

$$\left(\frac{d^2}{da_1^2} + \dots \right)^\sigma \cdot \frac{1}{(a_1^2 + \dots)^{i-\sigma}} = 2^{2\sigma} [i-1]^\sigma \left[i - \frac{1}{2}n \right]^\sigma \cdot \frac{1}{(a_1^2 + \dots)^i}.$$

Nous pouvons donc, dans la suite, ne considérer que le cas de σ entier positif.

Commençons par opérer la transformation que voici; en déterminant ζ par l'équation

$$\frac{a_1^2}{\zeta + h_1^2} + \dots = t^2,$$

je pose

$$l_1 = \frac{h_1^2}{\zeta}, \dots, \quad a_1^2 = (1 + l_1) t^2 a_1^2, \dots,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\zeta &= \alpha_1^2 + \dots, \\ \alpha_1^2 + \dots &= t^2 \cdot [(1 + l_1) \alpha_1^2 + \dots], \\ \nabla &= \frac{\zeta}{t^2} \cdot \left(\frac{l_1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right),\end{aligned}$$

où il faut remarquer que ce ζ , contenu en ∇ , ne doit pas être affecté des symboles $\frac{d}{d\alpha_1}, \dots$ de ∇ , de manière qu'il faut écrire

$$\nabla^p = t^{-2p} \cdot \zeta^p \left(\frac{l_1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right)^p = t^{-2p} (\alpha_1^2 + \dots)^p \cdot \left(\frac{l_1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right)^p,$$

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{\Gamma(i) \cdot t^{2i} (\alpha_1^2 + \dots)^i} \\ &\times \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2^{2p} [p+i+\sigma]^{p+\sigma+1} [p]^p} (\alpha_1^2 + \dots)^{p+i} \left(\frac{l_1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right)^p \frac{1}{(\alpha_1^2 1 + l_1 + \dots)^i} \right),\end{aligned}$$

formules qui se prêtent mieux aux réductions, quoique plus compliquées en apparence.

Ecrivons d'abord

$$\begin{aligned}\frac{l_1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots &= \left(\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right) - \left(\frac{1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right) \\ &= \Delta - \left(\frac{1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right).\end{aligned}$$

En développant la $p^{ième}$ puissance de ce symbole selon les puissances de Δ , on a

$$(-)^{p-q} \frac{[p]^p}{[p-q]^{p-q} \cdot [q]^q} \cdot \Delta^q \left(\frac{1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right)^{p-q},$$

qui doit s'appliquer à $\frac{1}{(1 + l_1 \alpha_1^2 + \dots)^i}$.

Considérons l'expression

$$\left(\frac{l_1}{1 + l_1} \frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \dots \right)^{p-q} \frac{1}{(1 + l_1 \alpha_1^2 + \dots)^i},$$

et mettons, pour un moment,

$$(1 + l_1) \alpha_1^2 = \alpha_1'^2 \dots,$$

cette expression se trouve réduite à

$$\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} + \dots\right)^{p-q} \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^i},$$

laquelle, par une formule déjà citée, devient

$$2^{2p-2q} \cdot [i+p-q-1]^{p-q} \cdot \left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q} \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^{i+p-q}},$$

c'est-à-dire

$$2^{2p-2q} \cdot [i+p-q-1]^{p-q} \cdot \left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q} \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 (1+l_1) + \dots)^{i+p-q}}.$$

Le terme général de U, en faisant abstraction du facteur $\frac{1}{\Gamma(i) \cdot t^{2i} (\alpha_1^2 + \dots)^i}$, se réduit à

$$\frac{(-)^{p-q} (\alpha_1^2 + \dots)^{p+i}}{2^{2q} [p+i+\sigma]^{q+i+1} [p-q]^{p-q} [q]^{q-1}} \left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q} \cdot \Delta^q \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 (1+l_1) + \dots)^{i+p-q}};$$

considérons la partie de ce terme qui est de l'ordre θ en $l_1, \dots$, elle devient

$$\frac{(-)^{p-q+\theta} (\alpha_1^2 + \dots)^{p+i}}{2^{2q} [p-q]^{p-q} [q]^{q-1} [s]^s} [i+p-q+\theta-1]^{q-s-q-1} \\ \times \left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q} \Delta^q \cdot \frac{(l_1 \alpha_1^2 + \dots)^\theta}{(\alpha_1^2 + \dots)^{i+p-q+\theta}}.$$

Soit, en général, Θ une fonction homogène de l'ordre 2θ des lettres $\alpha_1, \dots$; on a

$$\Delta \frac{\Theta}{(\alpha_1^2 + \dots)^i} = \frac{\Delta \Theta}{(\alpha_1^2 + \dots)^i} + 2^2 \cdot i \left(i+1-2\theta-\frac{1}{2}n\right) \frac{\Theta}{(\alpha_1^2 + \dots)^{i+1}};$$

et de là, en répétant toujours l'opération Δ , et faisant attention à ce que $\Delta \Theta, \Delta^2 \Theta, \dots$ sont des fonctions homogènes des ordres $2\theta-1, 2\theta-2$, etc., on obtient

$$\Delta^q \frac{\Theta}{(\alpha_1^2 + \dots)^i} = \frac{[q]^q}{[\lambda]^\lambda [q-\lambda]^{q-\lambda}} 2^{2q-2\lambda} [i+q-\lambda-1]^{q-\lambda} \\ \times \left[i+q-2\theta-\frac{1}{2}n\right]^{q-\lambda} \Delta^\lambda \Theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^{i+q-\lambda}},$$

ou

$$\Delta^q \cdot \frac{(l, \alpha_1^2 + \dots)^\theta}{(\alpha_1^2 + \dots)^{i+p-q+\theta}} = \frac{[q]^q}{[\lambda]^\lambda [q-\lambda]^{q-\lambda}} 2^{2q-2\lambda} [i+p+\theta-\lambda-1]^{q-\lambda} \\ \times \left[i+p-\theta-\frac{1}{2}n \right]^{q-\lambda} \Delta^\lambda (l, \alpha_1^2 + \dots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^{i+p+\theta-\lambda}},$$

depuis $\lambda = 0$, jusqu'à $\lambda = q$.

Puis, pour le terme général de U,

$$\frac{(-)^{p-q+\theta}}{2^{2\lambda} [p-q]^{p-q} [\theta]^\theta [\lambda]^\lambda [q-\lambda]^{q-\lambda}} [i+p+\theta-\lambda-1]^{\theta-\sigma-\lambda-1} \\ \times \left[i+p-q-\frac{1}{2}n \right]^{p-q} \left[i+p-\theta-\frac{1}{2}n \right]^{q-\lambda} \Delta^\lambda (l, \alpha_1^2 + \dots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^{i+p+\theta-\lambda}}.$$

ou

$$\frac{(-)^{-q}}{[p-q]^{p-q} [q-\lambda]^{q-\lambda}} \left[i+p-\frac{1}{2}n-q \right]^{p-q} \left[i+p-\theta-\frac{1}{2}n \right]^{q-\lambda} \\ \times \frac{(-)^{p+\theta}}{2^{2\lambda} [\theta]^\theta [\lambda]^\lambda} [i+p+\theta-\lambda-1]^{\theta-\sigma-\lambda-1} \Delta^\lambda (l, \alpha_1^2 + \dots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^{i+p+\theta-\lambda}};$$

le dernier facteur étant indépendant de q , q doit s'étendre depuis 0 jusqu'à p . Mais à cause de $[q-\lambda]^{q-\lambda}$ qui devient infini pour $q < \lambda$, on peut faire étendre q depuis $q = \lambda$ jusqu'à $q = p$; ou, en écrivant

$$q - \lambda = q', \quad p - \lambda = p',$$

q' s'étend depuis 0 jusqu'à p' . Le facteur à sommer est donc

$$(-)^\lambda \cdot \left\{ \frac{(-)^{q'}}{[p'-q']^{p'-q'} [q']^{q'}} [C-q']^{p'-q'} [M]^{q'} \right\}.$$

Si, pour un moment, l'on pose

$$C = i + p' - \frac{1}{2}n, \quad M = i + p - \theta - \frac{1}{2}n,$$

somme qui se réduit à

$$(-)^\lambda \cdot \frac{[C-M]^{C-M-p'}}{[C-M-p']^{C-M-p'}},$$

c'est-à-dire à

$$(-)^\lambda \cdot \frac{[\theta-\lambda]^{\theta-p}}{[\theta-p]^{\theta-p}},$$

nous avons le terme général

$$\frac{(-)^{\lambda+p+\theta} [\theta - \lambda]^{\theta-p} [i + \theta - \lambda - 1 + p]^{\theta-\sigma-\lambda-1}}{2^{2\lambda} \cdot [\theta]^\theta [\lambda]^\lambda \cdot [\theta-p]^{\theta-p}} \Delta^\lambda (l_1 \alpha_1^2 + \dots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^{\theta-\lambda}}.$$

Écrivons

$$p = \theta - p';$$

cela devient

$$\frac{(-)^{p'} [M]^{p'} [C-p']^{C-A}}{[p']^{p'}} \frac{(-)^x}{2^{2\lambda} \cdot [\theta]^\theta [\lambda]^\lambda} \Delta^\lambda (l_1 \alpha_1^2 + \dots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^{\theta-\lambda}},$$

$$M = \theta - \lambda, \quad C = i + 2\theta - \lambda - 1, \quad C - A = \theta - \sigma - \lambda - 1;$$

p' doit s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à θ . Mais à cause de $[p']^{p'}$, qui devient infini, pour p' négatif, on peut l'étendre seulement depuis 0 jusqu'à θ , ou même seulement depuis 0 jusqu'à M , à cause du facteur $M^{p'}$. La somme se réduit à

$$[C - M]^{C-M-A} \cdot [C - A]^M = [i + \theta - 1]^{-\sigma-1} [\theta - \sigma - \lambda - 1]^{\theta-\lambda},$$

et le terme général devient

$$\frac{(-)^{\lambda}}{2^{2\lambda} \cdot [\theta]^\theta [\lambda]^\lambda} [i + \theta - 1]^{-\sigma-1} [\theta - \sigma - \lambda - 1]^{\theta-\lambda} \Delta^\lambda (l_1 \alpha_1^2 + \dots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^{\theta-\lambda}}.$$

Écrivons enfin

$$\theta = \lambda + \kappa,$$

le terme devient

$$\frac{(-)^{\lambda}}{2^{2\lambda} [\lambda]^\lambda \cdot [\lambda + \kappa]^{\lambda+\kappa} [i + \lambda + \kappa + \sigma]^{\sigma+1}} \cdot [\kappa - \sigma - 1]^\kappa \cdot \Delta^\lambda (l_1 \alpha_1^2 + \dots)^{\lambda+\kappa} \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^\lambda}.$$

Il faut que κ soit toujours positif, car autrement le terme s'évanouit à cause de $\Delta^\lambda (l_1 \alpha_1^2 + \dots)^{\lambda+\kappa}$; mais pour κ plus grand que σ , le facteur $[\kappa - \sigma - 1]^\kappa$ s'évanouit; donc κ s'étend seulement depuis 0 jusqu'à σ .

Soit $k_1 + \dots = \kappa$, et considérons les termes de $\Delta^\lambda (l_1 \alpha_1^2 + \dots)$ qui contiennent $\alpha_1^{2k_1}, \dots$. Ces termes seront de la forme

$$\frac{[\lambda]^\lambda}{[q_1]^{q_1} \dots [q_1 + k_1]^{q_1 + k_1} \dots} \left(\frac{d^2}{d\alpha_1^2} \right)^{2q_1} \dots l_1^{q_1 + k_1} \alpha_1^{2q_1 + 2k_1} \dots,$$

ou

$$q_1 + \dots = \lambda.$$

c'est-à-dire

$$\frac{[\lambda]^\lambda [\lambda + \alpha]^{i+\alpha} [2q_1 + 2k_1]^{2q_1} \dots}{[q_1]^{q_1} \dots [q_1 + k_1]^{q_1 + k_1} \dots} l_1^{q_1 + k_1} \dots \alpha_1^{2k_1} \dots,$$

ou, en réduisant à

$$2^{2i} [\lambda]^\lambda [\lambda + \alpha]^{i+\alpha} \cdot \frac{\alpha_1^{2k_1} \dots}{[k_1]^{k_1} \dots} \frac{\left[q_1 + k_1 - \frac{1}{2} \right]^{q_1} \dots}{[q_1]^{q_1} \dots} l_1^{q_1 + k_1} \dots,$$

ce qui donne pour U,

$$\frac{(-)^i}{[i + \alpha + \lambda + \sigma]^{i+\alpha}} \frac{\left[q_1 + k_1 - \frac{1}{2} \right]^{q_1} \dots}{[q_1]^{q_1} \dots} l_1^{q_1 + k_1} \dots \frac{[\alpha - \sigma - 1]^\alpha \alpha_1^{2k_1} \dots}{[k_1]^{k_1}} \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^\alpha}.$$

Soit

$$\frac{1}{((1 + l_1 u) \dots)^{\frac{1}{2}}} = (0) + (1) \cdot u \dots + (\lambda) \cdot u^i + \dots;$$

on a

$$(\lambda) = (-)^i \frac{\left[q_1 - \frac{1}{2} \right]^{q_1} \dots}{[q_1]^{q_1} \dots} l_1^{q_1} \dots + \text{etc.}, \quad q_1 + \dots = \lambda;$$

et de là,

$$\frac{1}{\left[k_1 - \frac{1}{2} \right]^{k_1} \dots} \frac{1}{l_1^{\frac{1}{2}} \dots} \left(l_1^2 \frac{d}{dl_1} \right)^{k_1} \dots l_1^{\frac{1}{2}} (\lambda) = (-)^i \frac{\left[q_1 + k_1 - \frac{1}{2} \right]^{q_1} \dots}{[q_1]^{q_1} \dots} l_1^{q_1 + k_1} \dots,$$

de manière que le terme de U devient

$$\frac{1}{l_1^{\frac{1}{2}} \dots} \left(l_1^2 \frac{d}{dl_1} \right)^{k_1} \dots l_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{[i + \alpha + \lambda + \sigma]^{i+\alpha}} (\lambda) \right) \cdot \frac{[\alpha - \sigma - 1]^\alpha \alpha_1^{2k_1} \dots}{[2k_1]^{2k_1} \dots} \frac{1}{(\alpha_1^2 + \dots)^\alpha}.$$

Prenant la somme pour λ , à l'aide de

$$[\sigma]^\sigma \int_0^1 (1-u)^\sigma u^{i+\alpha+\lambda-1} \cdot du = \frac{1}{[i + \alpha + \sigma + \lambda]^{i+\alpha}},$$

(ce qui suppose $i + \alpha > 0$), on obtient

$$\frac{2^{2\alpha} [\sigma]^\sigma [\alpha - \sigma - 1]^\alpha \alpha_1^{2k_1} \dots}{[2k_1]^{2k_1} \dots (\alpha_1^2 + \dots)^\alpha} \frac{1}{\sqrt{l_1} \dots} \left(l_1^2 \frac{d}{dl_1} \right)^{k_1} \dots \sqrt{l_1} \dots \int_0^1 \frac{(1-u)^\sigma \cdot u^{i+\alpha-1} du}{\{(1 + l_1 u) \dots\}^{\frac{1}{2}}}.$$

ou, mettant $l_1 = \frac{h_1^2}{\zeta}, \dots,$

$$2^\kappa \cdot [\sigma]^\sigma [\kappa - \sigma - 1]^\kappa \cdot \frac{\alpha_1^{2k_1} \dots}{[2k_1]^{2k_1} \dots} \zeta^{\frac{n}{2} - 2\kappa} \\ \times \frac{1}{h_1 \dots} \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1} \right)^{k_1} \dots h_1 \dots \int_0^1 \frac{(1-u)^\sigma u^{i+\kappa-1} \cdot du}{\{(\zeta + h_1^2 u) \dots\}^{\frac{1}{2}}},$$

en rétablissant le facteur constant $\frac{1}{\Gamma(i) \cdot t^{2i} \cdot \zeta^i}$ de U, le terme général de cette quantité est

$$\frac{2^\kappa \cdot [\sigma]^\sigma [\kappa - \sigma - 1]^\kappa}{t^{2i} \Gamma(i)} \cdot \frac{\alpha_1^{2k_1} \dots}{[2k_1]^{2k_1} \dots} \zeta^{\frac{n}{2} - 2\kappa + i} \\ \times \frac{1}{h_1 \dots} \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1} \right)^{k_1} \dots h_1 \dots \int_0^1 \frac{(1-u)^\sigma u^{i+\kappa-1} \cdot du}{\{(\zeta + h_1^2 u) \dots\}^{\frac{1}{2}}},$$

où k_1 , etc., sont des entiers positifs quelconques qui satisfont à

$$k_1 + \dots = \kappa,$$

et κ peut s'étendre depuis 0 jusqu'à σ . Il faut observer qu'en différentiant par $\frac{d}{dh_1}$, etc., on ne doit pas considérer ζ comme fonction de $h_1, \dots$, ce qui est cependant nécessaire dans l'équation entre V et U.