JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Sur les courbes tautochrones

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 409-421.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__409_0>

SUR LES COURBES TAUTOCHRONES;

PAR M. PUISEUX.

1. La méthode que je vais suivre pour traiter le problème des tautochrones est uniquement fondée sur la différentiation sous le signe $\int$. Elle me semble préférable au développement en série qu'on trouve dans la *Mécanique* de Poisson. Je détermine l'équation de la tautochrone soit dans le vide, soit dans un milieu dont la résistance est comme le carré de la vitesse, et en supposant le mobile pesant ou sollicité par une force dirigée vers un centre fixe. En particulier, lorsque le mobile est attiré ou repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance, et que la résistance est nulle, j'obtiens pour solutions la ligne droite, la spirale logarithmique, l'épicycloïde, et une spirale que j'ai considérée ailleurs, et qui jouit de la propriété remarquable d'être semblable à la développée de sa développée.

2. Je supposerai d'abord le mobile pesant et dans le vide; je dirigerai l'axe des x en sens contraire de la pesanteur, et il s'agira de trouver la courbe que doit suivre un point matériel pour arriver toujours dans le même temps à l'origine des coordonnées, quel que soit le point d'où il est parti sans vitesse initiale. Nommons t le temps, s l'arc de la tautochrone à partir de l'origine, h la valeur de x pour le point de départ du mobile, g la pesanteur. Nous aurons, par le principe des forces vives,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(h-x), \quad dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Si donc nous appelons T le temps employé par le mobile pour arriver à l'origine, et si nous faisons $s = \varphi(x)$, il nous viendra

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}},$$

ou bien, en posant $x = hz$,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{\varphi'(hz)\,dz\sqrt{h}}{\sqrt{1-z}}.$$

Par la nature du problème, cette valeur de T doit être indépendante de h; il faut donc que sa dérivée relative à h soit nulle. Mais on a

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{2\sqrt{2gh}} \int_0^1 \frac{[2hz\varphi''(hz) + \varphi'(hz)]\,dz}{\sqrt{1-z}};$$

la quantité entre crochets est une fonction de hz, et si nous faisons

$$2x\varphi''(x) + \varphi'(x) = \varphi_1(x),$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{2\sqrt{2gh}} \int_0^1 \frac{\varphi_1(hz)\,dz}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{2h\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{h-x}}.$$

Mais l'intégrale définie $\int_0^h \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{h-x}}$ ne peut pas être nulle, quel que soit h, à moins que la fonction $\varphi_1(x)$ ne soit elle-même identiquement nulle; car autrement on pourrait prendre h assez petit pour que de $x = 0$ à $x = h$, $\varphi_1(x)$ fût toujours de même signe, et alors l'intégrale, ayant tous ses éléments de même signe, ne serait pas nulle. On a donc l'équation

$$2x\varphi''(x) + \varphi'(x) = 0,$$

d'où

$$\varphi'(x) = \sqrt{\frac{c}{x}},$$

c étant une constante arbitraire. On a donc, pour la courbe cherchée,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{c}{x}},$$

et, en intégrant une seconde fois,

$$s = 2\sqrt{cx};$$

on n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que s et x doivent être nuls en même temps. Si dans la valeur de T on remplace $\varphi'(x)$ par sa valeur, on trouve

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{c}{2g}},$$

valeur indépendante de h, comme cela devait avoir lieu. On tire de là

$$\sqrt{c} = \frac{\mathrm{T}\sqrt{2g}}{\pi},$$

et par conséquent

$$s = \frac{2\mathrm{T}}{\pi}\sqrt{2gx}, \quad x = \frac{\pi^2}{8g\mathrm{T}^2}s^2.$$

Cette équation représente une cycloïde qui a son sommet à l'origine et dont l'axe, dirigé en sens contraire de la pesanteur, a pour longueur $\frac{2g\mathrm{T}^2}{\pi^2}$.

3. Supposons maintenant le mobile attiré ou repoussé par un centre fixe: soient r sa distance à ce centre, $f(r)$ la force qui le sollicite, et qu'on regarde comme positive ou négative, selon qu'elle est attractive ou répulsive. Appelons a la valeur de r qui répond au point de départ du mobile, α celle qui répond à l'origine des arcs parcourus dans le même temps, θ l'angle compris entre les rayons vecteurs r et α. Le principe des forces vives nous donnera

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -2\int_a^r f(r)\,dr:$$

faisons

$$2\int_\alpha^r f(r)\,dr = x, \quad 2\int_\alpha^a f(r)\,dr = h;$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{ds^2}{dt^2} = h - x, \quad \text{d'où} \quad dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Si donc nous désignons par T le temps employé à parcourir l'arc dont les extrémités répondent à $r = a$, $r = \alpha$, ou bien à $x = h$, $x = 0$, et si nous posons de plus $s = \varphi(x)$, nous aurons

$$\mathrm{T} = \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}}.$$

Cette valeur de T ne diffère que par le facteur constant $\sqrt{2g}$ de celle qu'on a trouvée plus haut; elle doit être indépendante de a et par conséquent de h; on aura donc encore

$$\varphi'(x), \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{c}{x}}, \quad s = 2\sqrt{cx},$$

d'où résulte

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{c},$$

et, par suite,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\mathrm{T}}{\pi\sqrt{x}}, \qquad s = \frac{2\mathrm{T}}{\pi}\sqrt{x},$$

ou enfin, en remplaçant x par sa valeur,

$$ds = \frac{2\mathrm{T}f(r)\,dr}{\pi\sqrt{2\int_\alpha^r f(r)\,dr}}, \quad s = \frac{2\mathrm{T}}{\pi}\sqrt{2\int_\alpha^r f(r)\,dr}.$$

Ces deux équations multipliées ensemble nous donnent

$$f(r)\frac{dr}{ds} = \frac{\pi^2 s}{4\mathrm{T}^2}:$$

on voit par là que la composante suivant le rayon vecteur de la force qui sollicite le mobile doit être à chaque instant proportionnelle à l'arc qui lui reste à parcourir. Cette propriété de la tautochrone était connue de Newton (*Principes*, liv. I^er^, section 10) [*].

---

[*] On en déduit immédiatement la solution de cette question : Quelle doit être la loi de l'attraction, pour qu'une courbe donnée soit tautochrone?

4. De l'équation qui donne la valeur de ds, on tire

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\pi}{T\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\int_\alpha^r f(r)\,dr}}{f(r)};$$

on voit par là que $\frac{dr}{ds}$ se réduit à zéro, quand on fait $r = \alpha$, en exceptant le cas particulier où l'on aurait

$$f(\alpha) = 0.$$

On en conclut que généralement la tautochrone est normale au rayon vecteur mené du centre fixe à l'origine des arcs parcourus en temps égaux ; cette origine est alors un sommet de la courbe.

Mais il peut en être autrement si l'on a

$$f(\alpha) = 0.$$

Alors l'expression de $\frac{dr}{ds}$ prend, pour $r = \alpha$, la forme $\frac{0}{0}$, et par la méthode ordinaire on trouve que sa vraie valeur est $\frac{\pi}{2T\sqrt{f'(\alpha)}}$: tel est le cosinus de l'angle sous lequel le rayon vecteur mené à l'origine des arcs coupe la tautochrone. Si toutefois ce cosinus était plus grand que 1 ou imaginaire, la courbe serait elle-même imaginaire, au moins pour les valeurs de r voisines de α, et par conséquent ne répondrait pas à la question.

5. Si dans l'équation précédente on remplace ds par $\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, on aura l'équation de la tautochrone en coordonnées polaires : elle peut s'écrire

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{\frac{2T^2}{\pi^2} f^2(r) - \int_\alpha^r f(r)\,dr}{\int_\alpha^r f(r)\,dr}}.$$

Supposons en particulier la force proportionnelle à une puissance de la distance, de sorte qu'on ait

$$f(r) = mr^p;$$

il viendra

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{R}{r^{p+1} - \alpha^{p+1}}},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$R = \frac{2(p+1)T^2m}{\pi^2}\cdot r^{2p} - r^{p+1} + \alpha^{p+1}.$$

La forme de la courbe dépend principalement du nombre et de la grandeur des valeurs positives de r qui annullent R. Or, la dérivée de R étant un binôme, on pourra toujours savoir pour quelles valeurs de r ce trinôme augmente ou diminue, et on connaîtra par conséquent dans quels intervalles se trouvent les racines positives de l'équation

$$R = 0,$$

s'il en existe. Sans entrer dans le détail de cette discussion, qui exige la distinction d'un assez grand nombre de cas, j'en indique seulement les résultats principaux.

En supposant que α ne soit pas nul, le rayon vecteur mené à l'origine des arcs est normal à la courbe et la partage en deux parties symétriques : la longueur α de ce rayon est un maximum par rapport aux rayons voisins, si la force est répulsive; un minimum, si elle est attractive. Dans ce dernier cas, la courbe à son sommet peut tourner vers le centre fixe sa concavité ou sa convexité ; le rayon vecteur peut croître jusqu'à l'infini, et alors la courbe est une spirale composée de deux branches infinies symétriques, ou bien le rayon vecteur a un maximum fini; alors le rayon maximum est tangent à la courbe, et celle-ci est analogue pour la forme à une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile roulant intérieurement sur un autre cercle décrit du centre fixe.

La force étant toujours attractive, si l'on suppose $\alpha = 0$ et p compris entre $+1$ et -1, l'origine des arcs se confond avec le centre fixe, et la courbe se compose de deux branches symétriques qui, partant d'un même point où elles sont tangentes au rayon vecteur maximum, s'enroulent autour du centre fixe et ne l'atteignent qu'après un nombre infini de révolutions.

Lorsque la force est répulsive, le rayon vecteur peut décroître jusqu'à zéro ou avoir un minimum ; s'il y a un minimum, la forme de la courbe est analogue à celle d'une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile roulant extérieurement sur un autre cercle décrit du centre fixe : si le rayon n'a pas de minimum, la courbe est une spirale à deux branches symétriques qui s'approchent indéfiniment du centre sans l'atteindre : leur longueur peut être finie ou infinie.

6. Considérons plus particulièrement le cas où la force est proportionnelle à la première puissance de la distance; l'équation de la tautochrone devient, en faisant $p = 1$,

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{\left(\frac{4T^2 m}{\pi^2} - 1\right) r^2 + \alpha^2}{r^2 - \alpha^2}} \text{ [*]}.$$

Si l'on suppose d'abord $m < 0$, ou la force répulsive, et qu'on fasse $-\frac{4T^2 m}{\pi^2} + 1 = \frac{1}{\mu^2}$, on voit que cette équation appartient à une épicycloïde qu'on peut décrire en faisant rouler extérieurement un cercle de rayon $\frac{(1-\mu)\alpha}{2}$ sur un autre cercle décrit du centre fixe avec le rayon $\mu\alpha$. Cette propriété de l'épicycloïde, d'être tautochrone lorsque la force est proportionnelle à la première puissance de la distance, se trouve démontrée dans le livre des *Principes* (loc. cit.).

Lorsque la force est attractive, il faut distinguer plusieurs cas :

Soit $\frac{4T^2 m}{\pi^2} < 1$, et faisons $1 - \frac{4T^2 m}{\pi^2} = \frac{1}{\lambda^2}$: la courbe sera encore une épicycloïde, et $\frac{(\lambda - 1)\alpha}{2}$ sera le rayon du cercle qui l'engendrera en roulant intérieurement sur un autre cercle décrit du centre fixe avec le rayon $\lambda\alpha$.

Soit maintenant $\frac{4T^2 m}{\pi^2} = 1$: l'équation représente une droite située à la distance α du centre fixe; on retrouve ainsi une propriété bien connue de cette ligne.

Soit enfin $\frac{4T^2 m}{\pi^2} > 1$, et faisons $\frac{4T^2 m}{\pi^2} - 1 = \frac{1}{\lambda^2}$; l'équation de la tau-

---

[*] Elle est alors intégrable.

tochrone devient

$$d\theta = \pm \frac{dr}{\lambda r}\sqrt{\frac{r^2 + \lambda^2 \alpha^2}{r^2 - \alpha^2}}.$$

On voit que r peut croître depuis α jusqu'à l'infini; θ devient d'ailleurs infini en même temps que r: la courbe est donc une spirale à deux branches symétriques s'éloignant indéfiniment du centre fixe. Mais elle jouit, en outre, d'une propriété remarquable; c'est qu'elle est semblable, non pas comme l'épicycloïde à sa développée, mais à la développée de sa développée, de sorte qu'en formant ses développées successives, on obtient une série de courbes semblables de deux en deux

Cette proposition se déduit immédiatement, comme je l'ai fait voir dans un précédent article, de la relation

$$\rho = \frac{\alpha(1+\lambda^2)}{2}(e^{\lambda u} + e^{-\lambda u}),$$

qui existe entre le rayon de courbure ρ d'un point quelconque de la courbe, et l'angle u qu'il fait avec le rayon vecteur mené du centre fixe au sommet. Pour démontrer que cette relation convient à la ligne dont nous nous occupons, il suffit de faire voir qu'on en peut tirer son équation entre r et θ.

Prenons pour axe des y une parallèle à la droite avec laquelle le rayon de courbure fait l'angle u, pour axe des x une perpendiculaire, nous aurons

$$dx = \rho \cos u\, du, \quad dy = -\rho \sin u\, du.$$

Remplaçons ρ par sa valeur écrite plus haut, intégrons, et disposons des constantes arbitraires de façon que l'on ait $x = 0$ et $y = \alpha$ pour $u = 0$; il viendra

$$x = \frac{\alpha}{2}[e^{\lambda u}(\sin u + \lambda \cos u) + e^{-\lambda u}(\sin u - \lambda \cos u)],$$

$$y = \frac{\alpha}{2}[e^{\lambda u}(\cos u - \lambda \sin u) + e^{-\lambda u}(\cos u + \lambda \sin u)],$$

et par conséquent

$$x^2 + y^2, \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{\alpha^2}{4}[(1 + \lambda^2)(e^{2\lambda u} + e^{-2\lambda u}) + 2(1 - \lambda^2)].$$

Tirons de cette équation $e^{2\lambda u} + e^{-2\lambda u}$; ajoutons-y ± 2, et extrayons la racine carrée; nous trouverons

$$e^{\lambda u} + e^{-\lambda u} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{r^2 + \lambda^2\alpha^2}{1+\lambda^2}}, \quad e^{\lambda u} - e^{-\lambda u} = \pm\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{r^2 - \alpha^2}{1+\lambda^2}},$$

et en différentiant l'une de ces équations, puis la divisant par l'autre, nous aurons

$$du = \pm\frac{r\,dr}{\lambda\sqrt{(r^2 - \alpha^2)(r^2 + \lambda^2\alpha^2)}}.$$

D'un autre côté, si dans la relation

$$r^2\,d\theta = y\,dx - x\,dy = \rho\,du(x\sin u + y\cos u),$$

nous remplaçons ρ, x, y par leurs valeurs en fonction de u, il nous viendra

$$r^2\,d\theta = \frac{\alpha^2(1+\lambda^2)}{4}(e^{\lambda u} + e^{-\lambda u})^2\,du = \pm\, r\,dr\sqrt{\frac{r^2 + \lambda^2\alpha^2}{r^2 - \alpha^2}},$$

d'où

$$d\theta = \pm\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{r^2 + \lambda^2\alpha^2}{r^2 - \alpha^2}},$$

ce qui est l'équation de la tautochrone.

Nous avons supposé, dans la discussion précédente, α différent de zéro; s'il était nul, on aurait

$$d\theta = \pm\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{4\mathrm{T}^2 m}{\pi^2} - 1}.$$

Si $\frac{4\mathrm{T}^2 m}{\pi^2}$ est moindre que 1, cette équation ne représente rien; si $\frac{4\mathrm{T}^2 m}{\pi^2} = 1$, elle appartient à une droite passant par le centre fixe; enfin si $\frac{4\mathrm{T}^2 m}{\pi^2}$ surpasse l'unité, elle représente une spirale logarithmique. Ainsi, lorsqu'un mobile assujetti à se mouvoir sur une spirale logarithmique est attiré par l'origine de cette courbe proportionnellement à la distance, il y arrive toujours dans le même temps, quel que soit son point de départ.

7. On pourrait faire sur la loi de la force plusieurs autres hypothèses et obtenir des courbes plus ou moins faciles à discuter; je me borne à supposer encore

$$f(r) = m(r - \alpha),$$

cas auquel s'applique la remarque qui termine le n° 4. On aura alors

$$d\theta = \pm \frac{dr}{r}\sqrt{\frac{4\mathrm{T}^2 m}{\pi^2} - 1},$$

équation qui représente une spirale logarithmique, lorsque $\sqrt{\frac{4\mathrm{T}^2 m}{\pi^2} - 1}$ est une quantité réelle. Ainsi, lorsqu'un point assujetti à rester sur une spirale logarithmique est sollicité par une force dirigée vers l'origine et proportionnelle à l'excès de son rayon vecteur sur celui d'un point fixe de la courbe, il arrive dans le même temps à ce point fixe, quel que soit son point de départ.

8. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le mouvement dans le vide; admettons maintenant que le mobile éprouve de la part du milieu environnant une résistance proportionnelle au carré de sa vitesse. Soit k cette résistance pour une vitesse égale à l'unité: en conservant les notations du n° **2**, nous aurons, dans le cas d'une pesanteur constante en grandeur et en direction,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dx}{ds} + k\frac{ds^2}{dt^2},$$

ou bien

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ds = -2g\,dx.$$

Cette équation s'intègre à la manière des équations linéaires; remarquons d'ailleurs que la vitesse doit être nulle pour $x = h$, et nous trouverons

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2ge^{2ks}\int_x^h e^{-2ks}\,dx, \quad dt = -\frac{e^{-ks}\,ds}{\sqrt{2g\int_x^h e^{-2ks}\,dx}}.$$

Faisons

$$\int_0^h e^{-2ks}\,dx = l, \quad \int_0^x e^{-2ks}\,dx = u, \quad e^{-ks} = \psi(u);$$

il viendra

$$dt = \frac{\psi'(u)\,du}{k\sqrt{2g(l-u)}}, \quad \mathrm{T} = -\frac{1}{k\sqrt{2g}}\int_0^l \frac{\psi'(u)\,du}{\sqrt{l-u}}.$$

Cette valeur de T est pareille à celles qu'on a obtenues aux n^{os} **2** et **3**; elle doit être indépendante de h et par suite de l; on en conclura donc de la même manière

$$\psi'(u) = -\sqrt{\frac{c}{u}},$$

et, en intégrant,

$$\psi(u) = 1 - 2\sqrt{cu}.$$

On a déterminé la constante en considérant que $\psi(u)$ ou e^{-ks} doit se réduire à l'unité pour $s = 0$, c'est-à-dire pour $x = 0$, ou, ce qui revient au même, pour $u = 0$.

Dans la valeur de T remplaçons $\psi'(u)$ par $-\sqrt{\frac{c}{u}}$; elle devient

$$\mathrm{T} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{c}{2g}}\int_0^l \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{c}{2g}},$$

d'où

$$\sqrt{c} = \frac{k\mathrm{T}\sqrt{2g}}{\pi}.$$

Substituons cette valeur de $\sqrt{c}$, ainsi que celles de u et de $\psi(u)$, dans l'équation

$$\psi(u) = 1 - 2\sqrt{cu};$$

nous trouverons

$$e^{-ks} = 1 - \frac{2k\mathrm{T}}{\pi}\sqrt{2g\int_0^x e^{-2ks}\,dx},$$

ou, en transposant et élevant au carré,

$$\frac{8k^2 g\mathrm{T}^2}{\pi^2}\int_0^x e^{-2ks}\,dx = (1 - e^{-ks})^2.$$

Différentions, multiplions les deux membres par e^{2ks}, puis intégrons, et il nous viendra, pour l'équation de la tautochrone,

$$\frac{4k^2gT^2}{\pi^2}x = e^{ks} - ks - 1, \quad x = \frac{\pi^2}{4k^2gT^2}(e^{ks} - ks - 1).$$

En faisant $k = 0$, elle devient

$$x = \frac{\pi^2}{8gT^2}s^2;$$

on retrouve la cycloïde, comme cela devait arriver. Quelle que soit d'ailleurs la valeur de k, il est aisé de reconnaître que la tautochrone est tangente à la cycloïde à son sommet, et que le contact est du second ordre.

9. La résistance étant toujours proportionnelle au carré de la vitesse, supposons enfin que le mobile soit attiré ou repoussé par un centre fixe; nous aurons, en reprenant les notations du n° **3**,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -f(r)\frac{dr}{ds} + k\frac{ds^2}{dt^2},$$

ou

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ds = -2f(r)\,dr.$$

Intégrons cette équation de manière que $\frac{ds}{dt}$ s'évanouisse pour $r = a$, et nous trouverons

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2e^{2ks}\int_r^a e^{-2ks}f(r)\,dr.$$

Posons

$$\int_\alpha f(r)\,dr = x,$$

d'où

$$f(r)\,dr = dx;$$

faisons de plus

$$\int_\alpha^a f(r)\,dr = h,$$

il viendra

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2e^{2ks}\int_x^h e^{-2ks}\,dx.$$

Sauf le facteur constant g, cette valeur de $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ est identique à celle du numéro précédent; la valeur de T qui s'en déduit doit être indépendante de a et par conséquent de h; en outre, comme dans ce numéro, x se réduit à zéro en même temps que s. Répétant donc les raisonnements et les calculs déjà faits, on arrivera à la même équation, où g sera remplacé par l'unité; et, en y remettant à la place de x sa valeur, on aura, pour équation de la tautochrone,

$$\int_\alpha^r f(r)\,dr = \frac{\pi^2}{4k^2\mathrm{T}^2}(e^{ks} - ks - 1).$$

En faisant $k = 0$, on retrouve la courbe que nous avons déterminée dans le cas du vide; on reconnaîtra facilement qu'en général ces deux courbes sont tangentes à l'extrémité du rayon vecteur α qui est leur sommet commun, et qu'elles y ont un contact du second ordre.