JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 270-274.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__270_0>

NOTE

Sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

1. Soient entre les neuf quantités a, a', a'', b,... les six relations

$$(1)\quad \begin{cases} a^2+a'^2+a''^2=1, & b^2+b'^2+b''^2=1, & c^2+c'^2+c''^2=1, \\ bc+b'c'+b''c''=0, & ca+c'a'+c''a''=0, & ab+a'b'+a''b''=0. \end{cases}$$

On sait que l'on peut en déduire les six relations inverses

$$(2)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, & a'^2+b'^2+c'^2=1, & a''^2+b''^2+c''^2=1, \\ a'a''+b'b''+c'c''=0, & a''a+b''b+c''c=0, & aa'+bb'+cc'=0; \end{cases}$$

et encore les neuf suivantes, dans lesquelles on doit prendre à la fois tous les signes supérieurs ou tous les signes inférieurs des premiers membres :

$$(3)\quad \begin{cases} \pm a = b'c'' - c'b'', & \pm a' = cb'' - bc'', & \pm a'' = bc' - cb', \\ \pm b = c'a'' - a'c'', & \pm b' = ac'' - ca'', & \pm b'' = ca' - ac', \\ \pm c = a'b'' - b'a'', & \pm c' = ba'' - ab'', & \pm c'' = ab' - ba'. \end{cases}$$

Mais la manière, élégante du reste, dont on fait quelquefois cette déduction ne semble pas tout à fait directe, car elle se fonde sur l'emploi de six indéterminées qui ne sont autre chose que les coordonnées d'un même point par rapport à deux systèmes de trois droites rectangulaires lorsque les quantités a, a',... représentent des cosinus d'angles qu'elles forment entre elles [*].

---

[*] *Traité de Géométrie analytique*, par M. Lefébure de Fourcy, 3e édition; ou Lagrange, *Mécanique analytique*, seconde partie, section IX, 6.

Or, on peut aussi déduire les relations (2) et (3) des relations (1) de la manière directe suivante, qui me paraît avoir aussi l'avantage de mieux faire voir l'origine des binômes formant les seconds membres des relations (3).

2. Si l'on élimine successivement, entre les deux dernières équations (1) qui sont du premier degré en a, a', a'', deux de ces quantités, on obtient

$$(4)\qquad \frac{a}{b'c''-c'b''}=\frac{a'}{cb''-bc''}=\frac{a''}{bc'-cb'}.$$

La somme des carrés des trois dénominateurs de cette double égalité revient identiquement à

$$(b^2+b'^2+b''^2)(c^2+c'^2+c''^2)-(bc+b'c'+b''c'')^2,$$

et est, par conséquent, égale à l'unité d'après les mêmes équations (1). Donc, d'après la première relation $a^2+a'^2+a''^2=1$, le carré du numérateur de chaque membre de (4) est égal au carré de son dénominateur; ce qui démontre les trois premières relations (3), dans lesquelles il faut prendre ensemble ou les trois signes supérieurs, ou les trois signes inférieurs pour que l'égalité (4) soit satisfaite.

On démontrerait de même les six autres relations (3), et la correspondance des signes, soit dans le groupe des quatrième, cinquième et sixième relation, soit dans le groupe des trois dernières.

Pour comparer les signes dans deux groupes, prenons, par exemple, la première relation $\pm b=c'a''-a'c''$ du deuxième groupe, et substituons-y les valeurs de a' et a'' tirées de celles du premier, prises avec le signe supérieur; on aura

$$\pm b=b(c'^2+c''^2)-c(b'c'+b''c'')=b(1-c^2)-c(-bc)=b,$$

ce qui exige que le signe supérieur soit adopté aussi dans le second groupe. Donc ce sont bien ou tous les signes supérieurs ensemble, ou tous les signes inférieurs ensemble qui se correspondent dans les neuf relations (3).

3. Les relations (2), inverses des relations (1), se déduisent facilement de celles (3) que nous venons de démontrer; car, 1° si, dans le trinôme $aa' + bb' + cc'$, par exemple, on met pour a, b, c, leurs valeurs fournies par les relations (3), on le rend identiquement nul, et il en est de même des deux autres trinômes analogues, ce qui démontre les trois dernières relations inverses (2). 2° On a identiquement

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &(b'c'' - c'b'')^2 + (c'a'' - a'c'')^2 + (a'b'' - b'a'')^2 \\ &= (a'^2 + b'^2 + c'^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2) - (a'a'' + b'b'' + c'c'')^2. \end{aligned} \right.$$

Donc

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2).$$

Et l'on obtiendrait également

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2),$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

Multipliant deux à deux ces trois équations, on en conclut que chacun des trois trinômes tels que $a^2 + b^2 + c^2$ est égal à ± 1, et c'est $+1$ qu'il faut prendre si l'on considère que, d'après les trois premières équations (1), la somme de ces trinômes est égale à 3.

Les trois premières relations inverses (2) se trouvent donc aussi démontrées.

4. On aurait pu obtenir celles-ci en premier lieu, en observant que, d'après les relations (1), on a

$$(bc + b'c')^2 = b''^2 c''^2 = (1 - b^2 - b'^2)(1 - c^2 - c'^2),$$

ce qui revient à

$$(bc' - cb')^2 = 1 - (1 - b^2 - b'^2) - (1 - c^2 - c'^2) = 1 - b''^2 - c''^2,$$

ou, en ayant égard à la troisième relation (3), à

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

c'est-à-dire la troisième relation inverse. Les deux premières auraient été obtenues de la même manière; et les trois dernières relations inverses (2) s'en tirent, en observant que le premier membre, ainsi que la première partie du second membre de l'identité (5), étant égaux à 1, le dernier terme doit être nul, ce qui donne

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

et ainsi des autres. De cette seconde manière, les six relations inverses (2) peuvent s'obtenir, comme l'on voit, avant d'avoir établi la correspondance des signes des neuf relations (3), et en n'employant celles-ci que sous la forme $a^2 = (b'c'' - c'b'')^2 \ldots$

5. Il reste à savoir, dans chaque cas, si l'on doit donner le signe $+$ ou le signe $-$ aux premiers membres des neuf relations (3). Cela ne se peut qu'en particularisant plus ou moins les neuf quantités a, a',.... Supposons, comme cela a lieu ordinairement, que ce soient les cosinus des angles formés par trois droites rectangulaires ox, oy, oz avec trois autres droites aussi rectangulaires ox_1, oy_1, oz_1, en sorte que

$$\begin{aligned} \cos xox_1 &= a, & \cos yox_1 &= a', & \cos zox_1 &= a'', \\ \cos xoy_1 &= b, & \cos yoy_1 &= b', & \cos zoy_1 &= b'', \\ \cos xoz_1 &= c, & \cos yoz_1 &= c', & \cos zoz_1 &= c''. \end{aligned}$$

Il faut prendre le signe $+$ quand les droites de même nom sont disposées entre elles de la même manière dans les deux systèmes, en sorte que l'on puisse passer de l'un à l'autre en le faisant tourner autour du point de concours commun o. En effet, alors, dans le cas particulier où oy_1, oz_1 se confondent avec oy, oz, la troisième droite ox_1 doit aussi se confondre avec ox, d'où il suit que $b' = 1$, $c'' = 1$ doivent entraîner $a = 1$, les six autres cosinus étant nuls. Or cette condition ne peut être remplie qu'en donnant le signe $+$ aux premiers membres de l'équation (3).

Plusieurs géomètres ont remarqué [*] qu'il faudrait leur donner le signe $-$ si les droites ox_1, oy_1, oz_1 étaient disposées dans un autre ordre que ox, oy, oz. C'est ce qui aurait lieu si, sur chacun des trois plans formés par ces dernières, les mouvements de x en y, de y en z et de z en x s'exécutaient de gauche à droite pour un observateur placé au point o, comme on le suppose ordinairement; tandis que sur les trois plans formés par ox_1, oy_1, oz_1, les mouvements de même nom s'exécuteraient, au contraire, de droite à gauche. Il est facile de voir que, dans chaque système, toute permutation de deux des trois droites, tout remplace-

[*] Voyez *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de M. Cauchy, tome II, 1841, page 276.

ment d'une de ces droites, par son prolongement de l'autre côté du point o, change le sens de ces mouvements : il en serait de même du remplacement de toutes trois, mais non de deux seulement, par leurs prolongements.

6. Si les trois droites ox_1, oy_1, oz_1 du second système n'étaient point rectangulaires, on n'aurait, entre les neuf cosinus $a, a', \ldots$, que les trois premières relations (1). Soient, alors, A, A′, A″ les cosinus des angles formés avec ox, oy, oz par une droite ox' perpendiculaire à la fois à oy_1 et à oz_1; les trois équations

$$\mathrm{A}b + \mathrm{A}'b' + \mathrm{A}''b'' = 0, \quad \mathrm{A}c + \mathrm{A}'c' + \mathrm{A}''c'' = 0, \quad \mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2 = 1,$$

résolues comme on a fait au n° **2**, donneraient

$$\pm \mathrm{A} = \frac{b'c'' - c'b''}{\sin y_1 o z_1}, \quad \pm \mathrm{A}' = \frac{cb'' - bc''}{\sin y_1 o z_1}, \quad \pm \mathrm{A}'' = \frac{bc' - cb'}{\sin y_1 o z_1},$$

en sorte que, lorsque ox_1, oy_1, oz_1 forment un de ces systèmes d'axes peu obliques ou presque rectangulaires entre eux que l'on est dans le cas de considérer dans quelques questions de la mécanique des corps élastiques, les binômes occupant les seconds membres des relations (3) ne sont autre chose (en négligeant les quantités très-petites du second ordre) que les neuf cosinus des angles formés avec les axes rectangulaires ox, oy, oz, par ces trois autres axes peu obliques, dits *auxiliaires*, qui coupent deux à deux ceux ox_1, oy_1, oz_1, à angle droit, et dont on se sert, comme l'on sait, pour les formules de transformation des coordonnées obliques.

Cette extension, hors du cas des axes rectangulaires, de la démonstration donnée ci-dessus des relations (3), me fait penser qu'elle est la plus directe et la plus propre à donner une idée de la nature des binômes tels que $b'c'' - c'b''$: ce sont, comme l'on voit, des cosinus d'angles formés avec trois axes ox, oy, oz par des droites à qui l'on impose pour condition d'être perpendiculaires chacune à deux autres droites ou rectangulaires ou presque rectangulaires, déterminées par des angles formés avec les mêmes axes, et dont les cosinus sont b', c', b'', c'', etc.