

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Note sur une propriété de la lemniscate

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 9 (1844), p. 116.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9_116_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA LEMNISCATE,

PAR M. OSSIAN BONNET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

« Soit une lemniscate dont le centre est à l'origine, et dont l'axe fait un angle de
 » 45 degrés avec l'axe des x ; je dis que le temps que met un point matériel partant
 » du repos et soumis à l'action d'une force constamment dirigée en un point de l'axe
 » des x et proportionnelle à la distance, pour parcourir un arc quelconque de cette
 » lemniscate, compté à partir de l'origine, est égal au temps qu'il mettrait pour par-
 » courir la corde de cet arc, et que, de plus, la lemniscate est la seule courbe qui
 » jouisse de cette propriété [*]. »

Soient O le point de départ du mobile, A le centre de la force, et M la position du mobile au bout du temps t . Posons

$$OA = a, \quad OM = \rho, \quad MOA = \theta;$$

le temps que mettra le mobile pour parcourir la corde OM sera, ainsi qu'on le voit aisément,

$$t_1 = \text{arc sin} \frac{\rho - a \cos \theta}{a \cos \theta} + \frac{\pi}{2},$$

et le temps qu'il mettra pour parcourir l'arc OM,

$$t_2 = \int \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}}{\sqrt{2a\rho \cos \theta - \rho^2}}.$$

Si l'on veut que $t_1 = t_2$, il faudra que

$$d \cdot \text{arc sin} \frac{\rho - a \cos \theta}{a \cos \theta} = \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}}{\sqrt{2a\rho \cos \theta - \rho^2}},$$

ou

$$\frac{\cos \theta d\rho + \rho \sin \theta d\theta}{\cos \theta} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2},$$

d'où

$$2 \text{ tang } \theta d\rho = \rho d\theta (1 - \text{tang}^2 \theta),$$

d'où

$$\sin 2\theta d\rho = \rho \cos 2\theta d\theta,$$

d'où

$$\rho^2 = c^2 \sin 2\theta,$$

ce qui est bien l'équation d'une lemniscate dont le centre est à l'origine et dont l'axe est la droite OB inclinée de 45 degrés sur OX.

[*] On a rappelé, à la page 28 de ce volume, une propriété de la lemniscate connue depuis bien longtemps, et qui ne diffère de la nôtre qu'en ce que le point matériel, au lieu d'être soumis à l'action d'une force centrale proportionnelle à la distance, est soumis à l'action de la pesanteur.