JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales eulériennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 489-494.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__489_0>

SUR QUELQUES FORMULES RELATIVES A LA THÉORIE DES INTÉGRALES EULÉRIENNES;

PAR J.-A. SERRET.

1. Je me propose de donner une démonstration simple de quelques formules fréquemment employées dans l'Analyse, en les rattachant autant que possible à la théorie si féconde des intégrales eulériennes.

Soit

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{p-1}d\theta;$$

on aura identiquement

$$\int_0^\infty e^{-mx}x^{p-1}dx = \frac{\Gamma(p)}{m^p},$$

m étant une quantité positive, ou au moins de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant positif.

Si l'on fait

$$m = a + y\sqrt{-1},$$

l'équation précédente donne lieu aux deux équations distinctes

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos yx\, x^{p-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi\,\cos p\varphi,$$

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin yx\, x^{p-1}dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi\,\sin p\varphi;$$

formules dans lesquelles on suppose

$$y = a\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

2. Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$\frac{dy}{(1+y^2)^n} = a\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,(1+a^2\,\mathrm{tang}^2\varphi)^n},$$

et qu'on intègre ensuite depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$, ou de $\varphi=0$ à $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}dx\int_0^\infty \frac{\cos xy}{(1+y^2)^n}dy=\frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}d\varphi.$$

Or, j'ai démontré (page 20 de ce volume) que l'on a, quel que soit n,

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{(1+y^2)^n}dy=\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-(x+2z)}(x+z)^{n-1}z^{n-1}dz;$$

l'équation précédente deviendra donc

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}dx\int_0^\infty e^{-(x+2z)}(x+z)^{n-1}z^{n-1}dz$$
$$=\frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}d\varphi;$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}d\varphi=\frac{\pi a^{p-1}}{\Gamma(p)[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(a+1)x-2z}x^{p-1}(x+z)^{n-1}z^{n-1}dx\,dz.$$

Soit

$$z=xt,\qquad \text{d'où}\qquad dz=xdt;$$

l'équation précédente deviendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}d\varphi=\frac{\pi a^{p-1}}{\Gamma(p)[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty t^{n-1}(1+t)^{n-1}dt\int_0^\infty e^{-(a+1+2t)x}x^{2n+p-2}dx.$$

L'intégrale du second membre relative à x a pour valeur

$$\frac{\Gamma(2n+p-1)}{(a+1+2t)^{2n+p-1}};$$

donc

$$(3)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi}{(1+a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^n}d\varphi=\pi a^{p-1}\frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(p)[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty\frac{t^{n-1}(1+t)^{n-1}}{(a+1+2t)^{2n+p-1}}dt.$$

Si l'on fait $a = 1$, cette formule devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2n-2}\varphi . \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n+p-1}} \frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(p)[\Gamma(n)]^2} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{n+p}} dt.$$

D'ailleurs

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}dt}{(1+t)^{n+p}} = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2n-2}\varphi . \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n+p-1}} \frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n+p)}.$$

Si l'on fait $p + 2n - 2 = q$, cette équation devient

$$(4) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q\varphi \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{q+1}} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}+1\right)}.$$

C'est la même que j'ai donnée page 6 de ce volume, et qui avait été démontrée différemment par MM. Cauchy et Binet [*].

Si l'on fait $q = p$, on a la formule donnée par Poisson,

$$(5) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}}.$$

3. Si $n = 1$, l'équation (3) devient

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^p\varphi \cos p\varphi}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{a^{p-1}}{(a+1)^p},$$

qui comprend comme cas particulier la précédente.

L'équation (6) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos\varphi \, e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^p + \left(\cos\varphi \, e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^p}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^p.$$

---

[*] Mémoire de M. Cauchy sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, et Mémoire de M. Binet sur les intégrales eulériennes. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVI^e cahier.)

Si donc $F(z)$ représente une fonction développable en série convergente suivant les puissances positives de z, on aura

$$(7)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F\left(\cos\varphi\, e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) + F\left(\cos\varphi\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{a} F\left(\frac{a}{a+1}\right),$$

et si $a = 1$,

$$(8)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[F\left(\cos\varphi\, e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) + F\left(\cos\varphi\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right] d\varphi = \pi F\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Les deux formules (7) et (8) feront connaître un grand nombre d'intégrales définies.

Si, par exemple, on pose

$$F(z) = e^{2mz} \quad \text{et} \quad 2\varphi = \theta,$$

les équations (7) et (8) donneront

$$(9)\qquad \int_0^{\pi} \frac{e^{m\cos\theta}\cos(m\sin\theta)\, d\theta}{\cos^2\frac{1}{2}\theta + a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{\pi}{a} e^{m\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}.$$

$$(10)\qquad \int_0^{\pi} e^{m\cos\theta}\cos(m\sin\theta)\, d\theta = \pi.$$

Cette dernière formule a été donnée par Poisson, au XIX[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* p. 493.

4. Si l'on multiplie les équations (1) et (2) par

$$y^{q-1}\, dy = a^q \operatorname{tang}^{q-1}\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et qu'on intègre ensuite de $y = 0$ à $y = \infty$, il vient

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{p-1}\, dx \int_0^{\infty} \cos xy\, y^{q-1}\, dy = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{p-1}\, dx \int_0^{\infty} \sin xy\, y^{q-1}\, dy = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi;$$

et, en ayant égard à la formule connue

$$\int_0^{\infty} e^{-xy\sqrt{-1}}\, y^{q-1}\, dy = \frac{\Gamma(q)}{x^q} e^{-\frac{q\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

on en tire aisément

$$(11)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \cos\frac{q\pi}{2},$$

$$(12)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma(q)\,\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \sin\frac{q\pi}{2}.$$

Si dans les équations (11) et (12) on fait successivement $q = 1$ et $q = p - 1$, on a les quatre formules suivantes, que j'ai déjà données par différents moyens :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = \frac{1}{p-1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{p-1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = \frac{-\cos\frac{p\pi}{2}}{p-1}.$$

Si dans l'équation (12) on fait $q = 0$, il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

5. Cette dernière peut être bien simplement déduite de l'équation (2); si l'on multiplie l'équation (2) par

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

et qu'on intègre de $y = 0$ à $y = \infty$ ou de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il viendra

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{p-1}\, dx \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{y}\, dy = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi.$$

Or,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax}\, x^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi\, \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

6. On peut déduire immédiatement de l'équation (2) la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx$. Multiplions en effet l'équation (2) par

$$\frac{\cos y\, dy}{y} = \frac{\cos(a \tang\varphi)\, d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

et intégrons de $y = 0$ à $y = \infty$ ou de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{p-1}\, dx \int_0^{\infty} \frac{\sin xy \cos y}{y}\, dy = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi\, \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi} \cos(a \tang\varphi)\, d\varphi.$$

Or, $\int_0^{\infty} \frac{\sin xy \cos y}{y}\, dy$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou à 0, suivant que x est plus grand ou plus petit que 1 ; donc on aura

$$\frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} e^{-ax} x^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi\, \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi} \cos(a \tang\varphi)\, d\varphi ;$$

d'où, en faisant $p = 1$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \tang\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$