

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 8 (1843), p. 397-434.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8_397_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

MÉMOIRE

SUR LES SURFACES ORTHOGONALES ET ISOTHERMES;

PAR M. G. LAMÉ.

(Lu à l'Académie des Sciences, le 31 août 1843.)

Dans un Mémoire, inséré dans ce Journal (tome V, page 313), j'ai démontré les formules qui peuvent servir à transformer des équations aux différences partielles en coordonnées curvilignes, et dont l'interprétation géométrique se résume en deux théorèmes sur les variations de courbure de tout système de surfaces orthogonales. Les formules dont il s'agit sont aux différences partielles du second ordre, mais non linéaires. Elles contiennent, comme variables indépendantes, les paramètres des surfaces conjuguées, ou les trois coordonnées curvilignes, et, comme fonctions de ces variables, les trois paramètres différentiels du premier ordre. Ces équations aux différences partielles sont trop compliquées pour qu'on puisse les intégrer généralement; mais en assujettissant les fonctions qu'elles contiennent à de nouvelles conditions, l'intégration devient possible.

Dans le Mémoire actuel, j'introduis la condition que les surfaces conjuguées soient toutes isothermes, ce qui donne trois équations nouvelles aux différences partielles, linéaires et du premier ordre. Un système de surfaces isothermes, ou d'égale température, existe dans tout solide homogène soumis à diverses sources constantes de chaleur ou de froid. Deux quelconques des surfaces qui composent ce système peuvent être prises à volonté; mais ces deux surfaces, une fois choisies, non-seulement toutes les autres se dessinent d'elles-mêmes, mais encore les surfaces orthogonales qui leur sont conjuguées. Il faut toute-

fois excepter le cas de deux sphères concentriques, et celui de deux plans parallèles, à cause de l'indétermination des systèmes conjugués qui leur correspondent. Mais ces cas étant écartés, l'ensemble des surfaces orthogonales est totalement déterminé dès qu'on se donne deux surfaces individuelles; ce qui montre clairement que les deux surfaces choisies doivent avoir une nature et des positions relatives particulières, pour que les systèmes conjugués qui les accompagnent soient tous les trois isothermes.

J'ai fait voir que, dans tout système triple de surfaces isothermes, les six rayons de courbure des surfaces qui passent en chaque point sont tels, que le produit de trois d'entre eux, pris dans un certain ordre, est égal au produit des trois autres. Depuis, M. J. Bertrand, dans le Mémoire qu'il a récemment présenté à l'Académie des Sciences, a démontré plusieurs théorèmes nouveaux sur les surfaces dont il s'agit. Il démontre, par exemple, que toute surface appartenant au système triple doit jouir de la propriété de pouvoir être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, lesquelles, d'après le beau théorème démontré généralement par M. Dupin, ne sont autres que les intersections de cette surface, par toutes les surfaces orthogonales qui peuvent lui être conjuguées.

C'est cette proposition élégante, trouvée par M. J. Bertrand, qui m'a donné l'idée de chercher, par l'intégration des équations différentielles dont je viens de parler, quelles sont toutes les surfaces capables de composer un système triplement isotherme. Je considère d'abord le cas des surfaces de révolution, c'est-à-dire celui où l'un des trois systèmes partiels se compose de plans menés suivant une même droite, et les deux autres de surfaces de révolution autour de cette droite; or, l'intégration complète ne conduit qu'aux deux systèmes connus des surfaces de révolution du second degré. Je considère ensuite le cas général, et l'intégration me conduit pareillement aux systèmes triples des surfaces isothermes du second ordre; ainsi, par le théorème de M. J. Bertrand, les surfaces du second ordre peuvent être partagées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure.

Des résultats aussi simples doivent pouvoir se démontrer d'une manière en quelque sorte élémentaire, à l'aide des infiniment petits et en s'appuyant sur la théorie, aujourd'hui si bien connue, des surfaces

du second ordre; mais la méthode complètement analytique que j'ai suivie m'offrait l'avantage d'essayer une première fois, sur un cas simple, l'intégration des équations différentielles qui appartiennent à tous les systèmes de surfaces orthogonales. Ces équations sont compliquées et d'une forme telle, que les méthodes d'intégration employées jusqu'ici ne leur sont pas applicables. Je n'ai pu atteindre le but que je me proposais qu'en ayant recours à des procédés particuliers qui paraissent liés intimement avec cette sorte d'équations différentielles, et qui doivent mettre sur la voie pour parvenir à les intégrer dans des cas plus généraux.

En résumé, on connaît maintenant tous les genres de surfaces orthogonales dans lesquels les trois systèmes partiels sont isothermes : 1^o celui des ellipsoïdes et des hyperboloïdes homofocaux, qui m'a servi à trouver les lois de l'équilibre et du mouvement des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, dont la surface est directement soumise à des sources constantes de chaleur et de froid; 2^o celui des paraboloides elliptiques et hyperboliques, ayant même axe et mêmes foyers; 3^o ceux qui comprennent les ellipsoïdes de révolution autour du petit axe et autour du grand axe; 4^o celui où l'un des systèmes partiels se compose de sphères concentriques, lesquelles peuvent être conjuguées à une infinité de cônes du second ordre; 5^o enfin ceux où l'un des systèmes partiels se compose de plans parallèles, qui peuvent être conjugués à une infinité de cylindres isothermes.

De ces cinq genres, les quatre premiers ne forment réellement qu'un seul et même groupe, car le second, le troisième et le quatrième peuvent se déduire du premier, en modifiant convenablement les constantes qu'il renferme. Il n'en est pas de même du cinquième genre, qui forme un second groupe distinct et très-étendu; car il existe une infinité de cylindres de tous les degrés, dont les bases sont des courbes orthogonales isothermes: on démontre, en effet, très-facilement qu'un système de courbes planes isothermes a pour trajectoires orthogonales des courbes pareillement isothermes.

§ I.

Rappelons en peu de mots les principes établis et les formules démontrées dans le Mémoire sur les coordonnées curvilignes (tome V de ce Journal, page 313).

Lorsqu'une famille de surfaces est donnée par une équation de la forme $f(x, y, z) = \rho$, le paramètre ρ , et les deux expressions différentielles

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}\right),$$

que nous désignons par h et $\Delta_2\rho$, conservent les mêmes valeurs numériques en chaque point, quels que soient les axes coordonnés. La seconde de ces quantités, ou h , que nous appelons paramètre différentiel du premier ordre, est telle que $\frac{d\rho}{h}$ représente la distance normale de deux surfaces consécutives; la troisième, ou $\Delta_2\rho$, que nous appelons paramètre différentiel du second ordre, est telle que l'expression $\left(\frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2\rho}{h}\right)$ représente la somme des deux courbures de la surface qui passe au point que l'on considère.

Lorsque trois familles de surfaces, aux paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 , partagent l'espace en parallélépipèdes infiniment petits, leur ensemble constitue un système de surfaces conjuguées et orthogonales. Un point quelconque est déterminé par les trois surfaces qui s'y coupent à angles droits, ou par les valeurs numériques des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 , qui leur correspondent. Les trois paramètres différentiels du premier ordre, h, h_1, h_2 , vérifient les six équations aux différences partielles suivantes, dans lesquelles on a posé, pour simplifier, $\frac{1}{h} = H, \frac{1}{h_1} = H_1, \frac{1}{h_2} = H_2$:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \cdot H}{d\rho_1 d\rho_2} = \frac{1}{H_1} \frac{dH}{d\rho_1} \frac{dH_1}{d\rho_2} + \frac{1}{H_2} \frac{dH}{d\rho_2} \frac{dH_2}{d\rho_1}, \\ \frac{d^2 H_1}{d\rho_2 d\rho} = \frac{1}{H_2} \frac{dH_1}{d\rho_2} \frac{dH_2}{d\rho} + \frac{1}{H} \frac{dH_1}{d\rho} \frac{dH}{d\rho_2}, \\ \frac{d^2 H_2}{d\rho d\rho_1} = \frac{1}{H} \frac{dH_2}{d\rho} \frac{dH}{d\rho_1} + \frac{1}{H_1} \frac{dH_2}{d\rho_1} \frac{dH_1}{d\rho}; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\rho_1} \frac{1}{H_1} \frac{dH}{d\rho_1} + \frac{d}{d\rho} \frac{1}{H} \frac{dH_1}{d\rho} + \frac{1}{H_2} \frac{dH}{d\rho_2} \frac{1}{H_2} \frac{dH_1}{d\rho_2} = 0, \\ \frac{d}{d\rho} \frac{1}{H} \frac{dH_2}{d\rho} + \frac{d}{d\rho_2} \frac{1}{H_2} \frac{dH}{d\rho_2} + \frac{1}{H_1} \frac{dH_2}{d\rho_1} \frac{1}{H_1} \frac{dH}{d\rho_1} = 0, \\ \frac{d}{d\rho_2} \frac{1}{H_2} \frac{dH_1}{d\rho_2} + \frac{d}{d\rho_1} \frac{1}{H_1} \frac{dH_2}{d\rho_1} + \frac{1}{H} \frac{dH_1}{d\rho} \frac{1}{H} \frac{dH_2}{d\rho} = 0. \end{cases}$$

Les trois fonctions $h = \frac{1}{H}$, $h_1 = \frac{1}{H_1}$, $h_2 = \frac{1}{H_2}$, étant connues en ρ , ρ_1 , ρ_2 , 1°. les formules

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} = \frac{h_1}{h} \frac{dh}{d\rho_1}, & \frac{1}{c_1} = \frac{h_2}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho_2}, & \frac{1}{c_2} = \frac{h}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho}, \\ \frac{1}{\gamma} = \frac{h_2}{h} \frac{dh}{d\rho_2}, & \frac{1}{\gamma_1} = \frac{h}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho}, & \frac{1}{\gamma_2} = \frac{h_1}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho_1}, \end{cases}$$

donnent les rayons de plus grande et de plus petite courbure des surfaces ρ , ρ_1 , ρ_2 , lesquels sont respectivement (γ_1, c_2) , (γ_2, c) , (γ, c_1) ; ou bien, les surfaces orthogonales se coupant suivant leurs lignes de courbure, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{\gamma}$, sont les deux courbures de l'arc $ds = \frac{d\rho}{h}$; $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{\gamma_1}$, celles de l'arc $ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}$; $\frac{1}{c_2}$, $\frac{1}{\gamma_2}$, celles de l'arc $ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}$.

2°. Les paramètres différentiels du second ordre des surfaces conjuguées sont déterminés par les équations

$$(4) \quad \frac{\Delta_2 \rho}{h^2} = \frac{d \log \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho}, \quad \frac{\Delta_2 \rho_1}{h_1^2} = \frac{d \log \frac{h_1}{h_2 h}}{d\rho_1}, \quad \frac{\Delta_2 \rho_2}{h_2^2} = \frac{d \log \frac{h_2}{h h_1}}{d\rho_2},$$

qui, d'après les formules (3), peuvent se mettre sous la forme

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2 \rho}{h} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{c_2}, & \frac{dh_1}{d\rho_1} - \frac{\Delta_2 \rho_1}{h_1} = \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{c}, \\ \frac{dh_2}{d\rho_2} - \frac{\Delta_2 \rho_2}{h_2} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{c_1}. \end{cases}$$

3°. Toute coordonnée rectiligne x , y ou z , ou en général toute

distance φ d'un point de l'espace à un plan fixe quelconque, étant exprimée en ρ, ρ_1, ρ_2 , doit vérifier les quatre équations différentielles

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\varphi}{d\rho d\rho_1} + \frac{1}{h} \frac{dh}{d\rho_1} \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} \frac{d\varphi}{d\rho_1} = 0, \\ \frac{d^2\varphi}{d\rho_1 d\rho_2} + \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho_2} \frac{d\varphi}{d\rho_1} + \frac{1}{h} \frac{dh}{d\rho_2} \frac{d\varphi}{d\rho} = 0, \\ \frac{d^2\varphi}{d\rho d\rho_2} + \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho_2} \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho_1} \frac{d\varphi}{d\rho_2} = 0, \\ h^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho} \right)^2 + h_1^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho_1} \right)^2 + h_2^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho_2} \right)^2 = 1. \end{array} \right.$$

Ainsi, lorsqu'on aura intégré, soit généralement, soit dans quelque cas particulier, les équations (1) et (2), on connaîtra les fonctions $h = \frac{1}{H}$, $h_1 = \frac{1}{H_1}$, $h_2 = \frac{1}{H_2}$, en ρ, ρ_1, ρ_2 ; les formules (3) donneront les six courbures des surfaces conjuguées, les équations (4) leurs paramètres différentiels du second ordre. Mais, si l'on veut passer aux coordonnées rectilignes, il faudra, en outre, intégrer les équations (5); cette intégration conduira aux valeurs de x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 , et l'élimination de deux des trois paramètres entre ces valeurs donnera les équations générales des surfaces conjuguées en coordonnées rectilignes.

§ II.

Considérons le cas où les systèmes conjugués sont tous les trois isothermes. On sait que, pour toute famille de surfaces isothermes, le rapport du paramètre différentiel du second ordre, au carré de celui du premier, est constant sur chaque surface individuelle; d'où l'on conclut facilement que si l'on prend, pour paramètre intégral, la fonction même qui exprimerait la température, le paramètre différentiel du second ordre doit être nul. (*Mémoire sur les surfaces isothermes*, tome II de ce Journal.)

Ainsi, dans le cas que nous nous proposons de traiter, les paramètres peuvent toujours être tels que l'on ait

$$\Delta_2 \rho = 0, \quad \Delta_2 \rho_1 = 0, \quad \Delta_2 \rho_2 = 0,$$

ou, d'après les formules (4),

$$\frac{d}{d\rho} \frac{h}{h_1 h_2} = 0, \quad \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{h_2 h} = 0, \quad \frac{d}{d\rho_2} \frac{h_2}{h h_1} = 0,$$

ou enfin,

$$(6) \quad \frac{d}{d\rho} \frac{H_1 H_2}{H} = 0, \quad \frac{d}{d\rho_1} \frac{H_2 H}{H_1} = 0, \quad \frac{d}{d\rho_2} \frac{H H_1}{H_2} = 0,$$

et il s'agit de trouver tous les groupes de fonctions H , H_1 , H_2 , qui peuvent vérifier à la fois les équations différentielles (1), (2), (6).

On aura les intégrales générales des équations (6) en posant

$$\frac{H_1 H_2}{H} = Q^2, \quad \frac{H_2 H}{H_1} = Q_1^2, \quad \frac{H H_1}{H_2} = Q_2^2,$$

d'où

$$(7) \quad H = Q_1 Q_2, \quad H_1 = Q_2 Q, \quad H_2 = Q Q_1,$$

Q , Q_1 , Q_2 étant respectivement indépendants de ρ , ρ_1 , ρ_2 ; c'est-à-dire Q étant simplement fonction de ρ_1 et ρ_2 , Q_1 de ρ_2 et ρ , Q_2 de ρ et ρ_1 .

Des fonctions (7) on déduit par la différentiation

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dH}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho_1}, \quad \frac{dH_1}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ}{d\rho_2}, \quad \frac{dH_2}{d\rho} = Q \frac{dQ_1}{d\rho}, \\ \frac{dH}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ_1}{d\rho_2}, \quad \frac{dH_1}{d\rho} = Q \frac{dQ_2}{d\rho}, \quad \frac{dH_2}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ}{d\rho_1}, \\ \frac{d^2 H}{d\rho_1 d\rho_2} = \frac{dQ_2}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho_2}, \quad \frac{d^2 H_1}{d\rho_2 d\rho} = \frac{dQ}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho}, \quad \frac{d^2 H_2}{d\rho d\rho_1} = \frac{dQ_1}{d\rho} \frac{dQ}{d\rho_1}. \end{array} \right.$$

La substitution des valeurs (7) et (8) transforme ainsi qu'il suit les équations (1) et (2),

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q \frac{dQ_1}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho_1} \frac{dQ}{d\rho_2} + Q_2 \frac{dQ}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho_2}, \\ Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho} \frac{dQ}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ}{d\rho_2} \frac{dQ_1}{d\rho} + Q \frac{dQ_1}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho}, \\ Q_2 \frac{dQ}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho} = Q \frac{dQ_1}{d\rho} \frac{dQ_2}{d\rho_1} + Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho} \frac{dQ}{d\rho_1}; \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \begin{cases} Q \frac{d}{d\rho} \frac{1}{Q_1 Q_2} \frac{dQ_2}{d\rho} + Q_1 \frac{d}{d\rho_1} \frac{1}{QQ_2} \frac{dQ_2}{d\rho_1} + \frac{Q_2^2}{Q^2 Q_1^2} \frac{dQ}{d\rho_2} \frac{dQ_1}{d\rho_2} = 0, \\ Q_2 \frac{d}{d\rho_2} \frac{1}{QQ_1} \frac{dQ_1}{d\rho_2} + Q \frac{d}{d\rho} \frac{1}{Q_2 Q_1} \frac{dQ_1}{d\rho} + \frac{Q_1^2}{Q^2 Q_2^2} \frac{dQ_2}{d\rho_1} \frac{dQ}{d\rho_1} = 0, \\ Q_1 \frac{d}{d\rho_1} \frac{1}{Q_2 Q} \frac{dQ}{d\rho_1} + Q_2 \frac{d}{d\rho_2} \frac{1}{Q_1 Q} \frac{dQ}{d\rho_2} + \frac{Q^2}{Q_1^2 Q_2^2} \frac{dQ_1}{d\rho} \frac{dQ_2}{d\rho} = 0. \end{cases}$$

Le problème est maintenant réduit à trouver trois fonctions : l'une, Q , de ρ_1 et ρ_2 ; la seconde, Q_1 , de ρ_2 et ρ ; la troisième, Q_2 , de ρ et ρ_1 , qui vérifient les six équations (9) et (10).

§ III.

Si l'un des trois systèmes conjugués, celui au paramètre ρ par exemple, se compose de plans parallèles, les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{\epsilon_2}$, des surfaces ρ , sont nulles généralement; il en est de même des deux courbures $\frac{1}{\epsilon}$, $\frac{1}{\gamma}$, de l'arc ds . On a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{dH_1}{d\rho} = 0, \quad \frac{dH_2}{d\rho} = 0, \quad \frac{dH}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dH}{d\rho_2} = 0,$$

et par les valeurs (8),

$$\frac{dQ_2}{d\rho} = 0, \quad \frac{dQ_1}{d\rho} = 0, \quad \frac{dQ_2}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dQ_1}{d\rho_2} = 0;$$

c'est-à-dire que les fonctions Q_1 et Q_2 sont constantes ainsi que H . Il est facile de voir que l'on pourra disposer de l'indétermination des paramètres, de telle sorte que $Q_1 = Q_2 = H = 1$; d'où résultera $H_1 = H_2 = Q$, seule fonction encore inconnue. Les équations (9) et (10) deviendront identiques, à l'exception de la dernière, qui se réduira à

$$(11) \quad \frac{d}{d\rho_1} \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\rho_1} + \frac{d}{d\rho_2} \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\rho_2} = 0,$$

et qui peut être vérifiée par une infinité de fonctions Q . On retombe ainsi dans la classe très-étendue des surfaces cylindriques orthogonales et isothermes, déjà suffisamment étudiée dans une Note spéciale (tome I^{er} de ce *Journal*).

Si l'un des trois systèmes conjugués, celui dont le paramètre est ρ , se compose de sphères concentriques, r étant le rayon variable, il faut prendre $\rho = \frac{1}{r}$, pour que $\Delta_2 \rho$ soit nul, et l'on a

$$h = \frac{1}{r^2} = \rho^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dh}{d\rho_2} = 0,$$

ou, d'après les formules (3),

$$\frac{1}{c} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = 0;$$

en effet, tous les éléments dS sont des lignes droites, et les surfaces orthogonales conjuguées au système sphérique sont des cônes. De plus, les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$, de chaque surface ρ , sont égales entre elles et à $\frac{1}{r} = \rho$; on a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} = \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho} = \frac{1}{\rho};$$

ou bien l'on a

$$H = \frac{1}{\rho^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dH}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dH}{d\rho_2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{1}{H_1} \frac{dH_1}{d\rho} = \frac{1}{H_2} \frac{dH_2}{d\rho} = -\frac{1}{\rho};$$

relations qui donnent définitivement

$$(12) \quad Q_1 = \frac{a}{\rho}, \quad Q_2 = \frac{1}{a\rho},$$

a étant une constante. Ces valeurs (12) de Q_1 et Q_2 rendent identiques les équations (9), ainsi que les deux premières (10); la dernière se réduit à

$$(13) \quad a^2 \frac{d}{d\rho_1} \left(\frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\rho_1} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{d}{d\rho_2} \left(\frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\rho_2} \right) + Q^2 = 0,$$

et peut être vérifiée par un grand nombre de fonctions Q . On retrouve

ainsi la classe des surfaces coniques orthogonales et isothermes, dont la généralité a été reconnue dans un Mémoire précédent (tome IV de ce Journal, page 126).

§ IV.

Supposons encore que les surfaces ρ et ρ_1 soient de révolution autour du même axe, et conséquemment les surfaces ρ_2 des plans méridiens. Les deux courbures $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{c_1}$, de la surface ρ_2 , sont généralement nulles; on a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{dH}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dH_1}{d\rho_2} = 0,$$

ou, dans les valeurs (8),

$$\frac{dQ_1}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dQ}{d\rho_2} = 0.$$

Ainsi Q_1 ne contient que ρ , nous le désignerons dorénavant par p ; pareillement Q ne contient que ρ_1 , et nous le désignerons par p_1 ; enfin Q , que nous remplacerons par F , contient toujours les deux variables ρ et ρ_1 . Ces valeurs rendent identiques les deux premières équations (9); la troisième devient, en désignant, pour simplifier, $\frac{dp}{d\rho}$ et $\frac{dp_1}{d\rho_1}$ par p' et p'_1 :

$$(14) \quad \frac{p'p'_1}{pp_1} = \frac{p'}{pF} \frac{dF}{d\rho_1} + \frac{p'_1}{p_1F} \frac{dF}{d\rho},$$

et les trois équations (10) se transforment ainsi

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p} \frac{d}{d\rho} \frac{1}{pF} \frac{dF}{d\rho} + \frac{1}{p_1} \frac{d}{d\rho_1} \frac{1}{p_1F} \frac{dF}{d\rho_1} = 0, \\ \frac{1}{p^2} \frac{d}{d\rho} \frac{p'}{p} - \frac{p'}{p^3 F} \frac{dF}{d\rho} + \frac{p'_1}{p_1^3 F} \frac{dF}{d\rho_1} = 0, \\ \frac{1}{p_1^2} \frac{d}{d\rho_1} \frac{p'_1}{p_1} + \frac{p'}{p^3 F} \frac{dF}{d\rho} - \frac{p'_1}{p_1^3 F} \frac{dF}{d\rho_1} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on ajoute les deux dernières équations (15), il vient

$$(16) \quad \frac{1}{p^3} \frac{d p'}{d \rho} + \frac{1}{p_1^3} \frac{d p'_1}{d \rho_1} = 0.$$

Or p ne contient que ρ , p_1 que ρ_1 ; il faut donc que, k désignant une constante, on ait séparément

$$\frac{1}{p^3} \frac{d p'}{d \rho} = k, \quad \frac{1}{p_1^3} \frac{d p'_1}{d \rho_1} = -k.$$

On peut intégrer ces deux équations en les multipliant par $2 p d p$, $2 p_1 d p_1$, ce qui les transforme ainsi

$$d. \left(\frac{p'}{p} \right)^2 = k d. p^2, \quad d. \left(\frac{p'_1}{p_1} \right)^2 = -k d. p_1^2,$$

d'où l'on conclut, A et B étant deux nouvelles constantes,

$$p' = \frac{d p}{d \rho} = p \sqrt{k p^2 - A}, \quad p'_1 = \frac{d p_1}{d \rho_1} = p_1 \sqrt{B - k p_1^2},$$

et enfin,

$$\rho = \int \frac{d p}{p \sqrt{k p^2 - A}}, \quad \rho_1 = \int \frac{d p_1}{p_1 \sqrt{B - k p_1^2}}.$$

Si l'on pose

$$p = \varpi \sqrt{A}, \quad p_1 = \varpi_1 \sqrt{B}, \quad k = \frac{1}{c^2},$$

ces équations deviennent

$$\frac{\sqrt{A}}{c} \cdot \rho = \int \frac{d \varpi}{\varpi \sqrt{\varpi^2 - c^2}}, \quad \frac{\sqrt{B}}{c} \cdot \rho_1 = \int \frac{d \varpi_1}{\varpi_1 \sqrt{c^2 - \varpi_1^2}},$$

or on peut prendre pour paramètres $\frac{\sqrt{A}}{c} \cdot \rho$, et $\frac{\sqrt{B}}{c} \cdot \rho_1$, sans que les paramètres différentiels du second ordre cessent d'être nuls; on ne diminuera donc en rien la généralité du cas actuel, en prenant

$$(17) \quad \begin{cases} p' = p \sqrt{p^2 - c^2}, & p'_1 = p_1 \sqrt{c^2 - p_1^2}, \\ \rho = \int_c^p \frac{d p}{p \sqrt{p^2 - c^2}}, & \rho_1 = \int_0^{p_1} \frac{d p_1}{p_1 \sqrt{c^2 - p_1^2}}. \end{cases}$$

ces valeurs vérifient l'équation (16). Si l'on regarde maintenant F comme une fonction de p et p_1 , et qu'on ait égard aux valeurs (17), l'équation (14) et les deux dernières équations (15), lesquelles se réduisent à une seule, deviennent

$$(18) \quad \begin{cases} p \frac{dF}{dp} + p_1 \frac{dF}{dp_1} = F, \\ F = \frac{p^2 - c^2}{p} \frac{dF}{dp} - \frac{c^2 - p_1^2}{p_1} \frac{dF}{dp_1}. \end{cases}$$

La première de ces équations réduit la seconde à

$$\frac{1}{p} \frac{dF}{dp} + \frac{1}{p_1} \frac{dF}{dp_1} = 0,$$

équation aux différences partielles dont l'intégrale est

$$F = f(p^2 - p_1^2);$$

or, si l'on pose

$$(p^2 - p_1^2) = z,$$

cette valeur générale de F , substituée dans la première des équations (18), exige que l'on ait

$$2z \frac{df}{dz} = f, \quad \text{d'où} \quad f = G \sqrt{z};$$

on doit donc prendre

$$(19) \quad F = \sqrt{p^2 - p_1^2};$$

car la constante G , qui serait facteur du radical, pourrait toujours être ramenée à l'unité en changeant convenablement le paramètre ρ_2 . On reconnaîtra facilement que cette valeur (19) de F vérifie la première des équations (15), en ayant égard aux relations (17).

Ainsi, p et p_1 étant déterminés par les relations (17), on a

$$Q = p_1, \quad Q_1 = p, \quad Q_2 = F = \sqrt{p^2 - p_1^2};$$

d'où

$$H = p \sqrt{p^2 - p_1^2}, \quad H_1 = p_1 \sqrt{p^2 - p_1^2}, \quad H_2 = pp_1.$$

et enfin,

$$(20) \quad \begin{cases} h = \frac{1}{p \sqrt{p^2 - p_1^2}}, & h_1 = \frac{1}{p_1 \sqrt{p^2 - p_1^2}}, & h_2 = \frac{1}{p p_1}, \\ \int_c^p \frac{dp}{p \sqrt{p^2 - c^2}} = \rho, & \int_0^{p_1} \frac{dp_1}{p_1 \sqrt{c^2 - p_1^2}} = \rho_1. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de trouver en coordonnées rectilignes les équations des surfaces de révolution, orthogonales et isothermes, toutes caractérisées par les valeurs (20).

§ V.

Les valeurs (20), substituées dans les formules (3), donnent

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} = \frac{p_1 \sqrt{c^2 - p_1^2}}{(p^2 - p_1^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{1}{c_1} = 0, & \frac{1}{c_2} = \frac{-\sqrt{p^2 - c^2}}{p \sqrt{p^2 - p_1^2}}, \\ \frac{1}{\gamma} = 0, & \frac{1}{\gamma_1} = \frac{-p \sqrt{p^2 - c^2}}{(p^2 - p_1^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{1}{\gamma_2} = \frac{-\sqrt{p^2 - p_1^2}}{p_1 \sqrt{c^2 - p_1^2}}. \end{cases}$$

Les deux limites de p sont c et l'infini, celles de p_1 , zéro et c . Il résulte des expressions (21) que les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$, des surfaces ρ , sont nulles, quel que soit p_1 , quand $p = c$, ou $\rho = 0$; que les deux courbures $\frac{1}{\gamma_2}$, $\frac{1}{c}$, des surfaces ρ_1 , sont l'une infinie, l'autre nulle, quel que soit p ou ρ , quand $p_1 = 0$, ou $\rho_1 = 0$. On conclut de là que la surface ρ_1 , correspondante à $p_1 = 0$, se réduit à une droite, laquelle ne peut être que l'axe de révolution lui-même, et que la surface ρ correspondante à $p = c$ est une aire plane, laquelle est nécessairement perpendiculaire à la surface $p_1 = 0$, ou à l'axe de révolution.

Cet axe et cette aire plane, si intimement liés au système orthogonal que nous étudions, assignent aux coordonnées rectilignes leur position naturelle. En effet, il conviendra de prendre pour axe des z , l'axe de révolution ou la surface $\rho_1 = 0$, et pour plan des xy l'aire plane correspondante à $p = c$, ou à $\rho = 0$.

Ainsi, en intégrant les équations (5), afin de trouver les valeurs de x, y, z , en ρ, ρ_1, ρ_2 , il faudra que x et y deviennent nuls pour $\rho_1 = 0$,

ou $p_1 = 0$, et z pour $\rho = 0$, ou $p = c$. De plus, il est évident que x et y dépendront du paramètre ρ_2 , ou de l'azimut des plans méridiens, mais que z en sera indépendant.

La première des équations (5), transformée en p et p_1 , à l'aide des formules (20), devient

$$(22) \quad (p^2 - p_1^2) \frac{d^2 \varphi}{dp dp_1} + p_1 \frac{d\varphi}{dp} - p \frac{d\varphi}{dp_1} = 0;$$

si l'on y pose $\varphi = PP_1$, P ne contenant que p , P_1 que p_1 , on trouve

$$p^2 - \left(\frac{pP}{\frac{dP}{dp}} \right) = p_1^2 - \left(\frac{p_1 P_1}{\frac{dP_1}{dp_1}} \right);$$

or le premier membre ne contient que p , le second que p_1 , il faut donc que leur valeur commune A soit indépendante de p et p_1 ; on aura alors séparément

$$\frac{dP}{P} = \frac{p dp}{p^2 - A}, \quad \frac{dP_1}{P_1} = \frac{p_1 dp_1}{p_1^2 - A},$$

d'où

$$P = \sqrt{p^2 - A}, \quad P_1 = \sqrt{p_1^2 - A}.$$

Il suit de là que l'intégrale générale de l'équation (22) peut être mise sous la forme

$$(23) \quad \varphi = \sum \sqrt{B} (p^2 - A) (p_1^2 - A),$$

où B et A , constants relativement à p et p_1 , varient d'un terme à l'autre de la série. Les trois coordonnées x , y , z , considérées comme des fonctions de p , p_1 , et ρ_2 , seront donc de la forme (23).

Mais s'il s'agit de x ou de y , comme elles doivent s'évanouir pour $p_1 = 0$, A sera nécessairement nul; le produit pp_1 sera facteur de tous les termes de la série; et si l'on pose $\sum \sqrt{B} = M$ pour x , $\sum \sqrt{B} = N$ pour y , on aura

$$(24) \quad x = pp_1 M, \quad y = pp_1 N;$$

M et N étant des fonctions encore inconnues du paramètre ρ_2 seul.

S'il s'agit de z , comme il doit s'évanouir pour $p=c$, il faudra que A

soit égal à c^2 , dans tous les termes de la série (23); et si l'on pose

$$\sum \sqrt{1-B} = \frac{1}{g}, \text{ on aura}$$

$$(25) \quad gz = \sqrt{p^2 - c^2} \sqrt{c^2 - p_1^2},$$

g étant constant, puisque z doit être indépendant de ρ_2 .

Il ne reste plus qu'à déterminer les fonctions M et N et la constante g .

§ VI.

Les valeurs (24), mises successivement à la place de φ , dans la seconde et la troisième des équations (5), les vérifient, quelles que soient d'ailleurs les fonctions M et N ; la valeur de z , formule (25), rend les mêmes équations identiques, puisque z , h , h_1 , h_2 , sont indépendants de ρ_2 . Il n'y a donc plus que la dernière équation (5) dont la vérification nécessaire puisse servir à la détermination de M , N , et g .

Cette dernière équation (5), transformée en p , p_1 , à l'aide des formules (20), devient

$$(26) \quad (p^2 - c^2) \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + (c^2 - p_1^2) \left(\frac{d\varphi}{dp_1} \right)^2 = (p^2 - p_1^2) \left[1 - \left(\frac{1}{pp_1} \frac{d\varphi}{d\rho_2} \right)^2 \right];$$

si l'on y substitue successivement, à la place de φ , les valeurs (24) de x et y , $(p^2 - p_1^2)$ devient facteur commun, et en supprimant ce facteur on a

$$c^2 M^2 = 1 - \left(\frac{dM}{d\rho_2} \right)^2, \quad c^2 N^2 = 1 - \left(\frac{dN}{d\rho_2} \right)^2;$$

d'où l'on conclut, par l'intégration, que M et N doivent être égales à l'une ou à l'autre des deux fonctions,

$$\frac{1}{c} \cos c\rho_2, \quad \frac{1}{c} \sin c\rho_2;$$

car la constante qu'il faudrait ajouter à l'arc $c\rho_2$ peut être supprimée.

Si l'on prend pour M l'une de ces valeurs, il faudra prendre l'autre pour N , sinon les valeurs (24) ne vérifieraient pas les équations

$$\frac{dx}{d\rho} \frac{dx}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho} \frac{dy}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dx}{d\rho_1} \frac{dx}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho_1} \frac{dy}{d\rho_2} = 0,$$

qui doivent avoir lieu, puisque les surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 , sont orthogonales, et que z ne contient pas ρ_2 dans le système d'axes choisi.

Si l'on substitue dans l'équation (26), à la place de φ , la valeur de z , formule (25), il vient

$$p^2(c^2 - p_1^2) + p_1^2(p^2 - c^2) = (p^2 - p_1^2)g^2,$$

ou, en réduisant et supprimant le facteur commun $(p^2 - p_1^2)$,

$$c^2 = g^2;$$

ainsi la constante g doit être égale à c .

On a donc enfin, pour les valeurs de x, y, z , en ρ, ρ_1, ρ_2 ,

$$(27) \quad \begin{cases} cx = pp_1 \cos c\rho_2, \\ cy = pp_1 \sin c\rho_2, \\ cz = \sqrt{p^2 - c^2} \sqrt{c^2 - p_1^2}. \end{cases}$$

L'élimination successive de p_1 et ρ_2 , de ρ_2 et p , de p et p_1 , entre ces trois équations, donne pour résultats,

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{p^2} + \frac{z^2}{p^2 - c^2} = 1, \\ \frac{x^2 + y^2}{p_1^2} - \frac{z^2}{c^2 - p_1^2} = 1, \\ \frac{y}{x} = \tan c\rho_2, \end{cases}$$

c'est-à-dire que les seuls systèmes de surfaces de révolution, à la fois orthogonales et isothermes, sont du second ordre.

§ VII.

La première des équations (28) ne représente que les ellipsoïdes de révolution autour du petit axe. Mais on peut, en changeant convenablement la constante c et les paramètres, transformer les équations (27) de manière à obtenir les ellipsoïdes de révolution autour du grand axe. En effet, si l'on pose

$$c^2 = -b^2, \quad p^2 = r^2 - b^2, \quad p_1^2 = r_1^2 - b^2, \quad \rho_2 = -r_2 \sqrt{-1}.$$

les équations (27) deviennent

$$(29) \quad \begin{cases} bx = \sqrt{r^2 - b^2} \sqrt{b^2 - r_1^2} \cos br_2, \\ by = \sqrt{r^2 - b^2} \sqrt{b^2 - r_1^2} \sin br_2, \\ bz = rr_1, \end{cases}$$

et donnent par l'élimination successive de deux des paramètres r, r_1, r_2 ,

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{z^2}{r^2} + \frac{x^2 + y^2}{r^2 - b^2} = 1, \\ \frac{z^2}{r_1^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2 - r_1^2} = 1, \\ \frac{y}{x} = \tan br_2; \end{cases}$$

or, la première de ces équations représente des ellipsoïdes de révolution autour du grand axe.

Ainsi les équations (27) comprennent implicitement les deux groupes généraux des surfaces de révolution du second ordre, à la fois orthogonales et isothermes. Si le groupe aux ellipsoïdes aplatis se présente ici plus naturellement que le système aux ellipsoïdes allongés, cela tient uniquement à la méthode adoptée pour intégrer l'équation (16). Par une autre méthode, que nous allons développer, on est conduit directement aux groupes (29) et (30), et au contraire par transformation aux groupes (27) et (28).

§ VIII.

Remontons aux équations (14) et (15), dans lesquelles p ne contient que ρ, p_1 que ρ_1 , et F est fonction de ρ et ρ_1 . En ajoutant les deux dernières équations (15), on obtient l'équation (16), qu'il s'agit d'intégrer d'une autre manière. Soient r et r_1 deux nouvelles fonctions, l'une de ρ , l'autre de ρ_1 , données par les équations

$$dr = p^2 d\rho, \quad dr_1 = p_1^2 d\rho_1,$$

d'où

$$(31) \quad \rho = \int \frac{dr}{p^2}, \quad \rho_1 = \int \frac{dr_1}{p_1^2};$$

en regardant maintenant p comme fonction de r , p_1 de r_1 , l'équation (16) se mettra sous la forme

$$(3) \quad \frac{d^2(p^2)}{dr^2} + \frac{d^2(p_1^2)}{dr_1^2} = 0,$$

et k représentant une constante, on devra avoir séparément

$$\frac{d^2(p^2)}{dr^2} = 2k, \quad \frac{d^2(p_1^2)}{dr_1^2} = -2k,$$

d'où l'on conclut, A et B étant deux nouvelles constantes,

$$p^2 = kr^2 + A, \quad p_1^2 = B - kr_1^2,$$

et enfin

$$\rho = \int \frac{dr}{kr + A}, \quad \rho_1 = \int \frac{dr_1}{B - kr_1^2}.$$

Si l'on pose

$$r = \pi \sqrt{A}, \quad r_1 = \pi_1 \sqrt{B}, \quad k = \frac{1}{b^2}$$

les équations précédentes deviennent

$$\sqrt{\frac{A}{b^2}} \rho = \int \frac{d\pi}{\pi^2 - b^2}, \quad \sqrt{\frac{B}{b^2}} \rho_1 = \int \frac{d\pi_1}{b^2 - \pi_1^2}.$$

or, on peut prendre pour paramètres $\frac{\sqrt{A}}{b^2} \rho$, $\frac{\sqrt{B}}{b^2} \rho_1$, sans que les paramètres différentiels du second ordre cessent d'être nuls; on ne diminuera donc pas la généralité du cas actuel, en prenant

$$(33) \quad \begin{cases} \rho = \int_0^r \frac{dr}{r^2 - b^2}, & \rho_1 = \int_0^{r_1} \frac{dr_1}{b^2 - r_1^2}, \\ p = \sqrt{r^2 - b^2}, & p_1 = \sqrt{b^2 - r_1^2}. \end{cases}$$

Ces valeurs vérifient l'équation (16). Si l'on regarde F comme fonction de r et r_1 , l'équation (14) et les deux dernières équations (15) donnent, en réduisant,

$$\begin{aligned} r \frac{dF}{dr} + r_1 \frac{dF}{dr_1} &= F, \\ \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \frac{1}{r_1} \frac{dF}{dr_1} &= 0, \end{aligned}$$

et conduisent, par un calcul déjà fait, § IV, à

$$(34) \quad F = \sqrt{r^2 - r_1^2},$$

forme qui vérifie aussi la première des équations (15).

On a enfin, pour les valeurs de h , h_1 , h_2 , qu'il s'agissait de trouver.

$$(35) \quad \begin{cases} h = \frac{1}{\sqrt{r^2 - b^2} \sqrt{r^2 - r_1^2}}, & h_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - r_1^2} \sqrt{r^2 - r_1^2}}, & h_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 - b^2} \sqrt{b^2 - r^2}}, \\ \int_b^r \frac{dr}{r^2 - b^2} = \rho, & \int_0^{r_1} \frac{dr_1}{b^2 - r_1^2} = \rho_1; \end{cases}$$

à l'aide de ces valeurs on peut calculer les six courbures (3); conclure de leurs propriétés le système d'axes rectilignes qu'il convient de choisir; intégrer les équations (5), en suivant identiquement la marche développée aux §§ V et VI, et l'on arrive alors aux équations (29) et (30).

§ IX.

Abordons maintenant le cas général, c'est-à-dire l'intégration des équations (9) et (10), sans supposer qu'aucune des six courbures soit généralement nulle. Q , Q_1 , Q_2 sont alors respectivement fonctions de (ρ_1, ρ_2) , de (ρ_2, ρ) , de (ρ, ρ_1) . Posons, pour simplifier,

$$(36) \quad \begin{cases} Q = A \frac{dQ}{d\rho_1} = B \frac{dQ}{d\rho_2}, \\ Q_1 = A_1 \frac{dQ_1}{d\rho_2} = B_1 \frac{dQ_1}{d\rho}, \\ Q_2 = A_2 \frac{dQ_2}{d\rho} = B_2 \frac{dQ_2}{d\rho_1}. \end{cases}$$

Les équations (9) se transforment ainsi,

$$(37) \quad \begin{cases} AA_1 + BB_2 = AB, \\ A_1A_2 + B_1B = A_1B_1, \\ A_2A + B_2B_1 = A_2B_2; \end{cases}$$

d'où l'on conclut, en ajoutant les deux premières respectivement mul-

multipliées par B_1 et A_1 ,

$$(38) \quad AA_1A_2 + BB_1B_2 = 0.$$

D'après les relations (36), A et B ne contiennent pas ρ , A_1 et B_1 pas ρ_1 , A_2 et B_2 non ρ_2 . Or, les équations (37), ayant lieu pour toutes les valeurs de ρ , ρ_1 , ρ_2 , auront encore lieu lorsque l'on y fera, ou $\rho = 0$, ou $\rho_1 = 0$, ou $\rho_2 = 0$. Désignons ainsi qu'il suit les valeurs que prennent A , B , A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , quand l'une des variables qu'elles contiennent est nulle :

$$(39) \quad \begin{cases} \text{Pour } \rho = 0 : A=A, B=B, A_1=\alpha_2, B_1=b_2, A_2=\alpha_1, B_2=\beta_1; \\ \text{Pour } \rho_1 = 0 : A=\alpha_2, B=\beta_2, A_1=A_1, B_1=B_1, A_2=\alpha, B_2=b; \\ \text{Pour } \rho_2 = 0 : A=\alpha_1, B=b_1, A_1=\alpha, B_1=\beta, A_2=A_2, B_2=B_2. \end{cases}$$

α , α , b , β , ne contiennent que ρ ; α_1 , α_1 , b_1 , β_1 , que ρ_1 ; α_2 , α_2 , b_2 , β_2 , que ρ_2 . Les équations (37) deviendront alors

$$(40) \quad \begin{array}{ccc} \text{Pour } \rho = 0. & \text{Pour } \rho_1 = 0. & \text{Pour } \rho_2 = 0. \\ \left\{ \begin{array}{l} A\alpha_2 + B\beta_1 = AB, \quad \alpha_2A_1 + \beta_2b = \alpha_2\beta_2, \quad \alpha_1a + b_1B_2 = \alpha_1b_1, \\ \alpha_2\alpha_1 + b_2B = \alpha_2b_2, \quad A_1\alpha + B_1\beta_2 = A_1B_1, \quad \alpha A_2 + \beta b_1 = \alpha\beta, \\ \alpha_1A + \beta_1b_2 = \alpha_1\beta_1, \quad \alpha\alpha_2 + bB_1 = \alpha b, \quad A_2\alpha_1 + B_2b_1 = A_2B_2. \end{array} \right. \end{array}$$

Parmi ces neuf équations, celles, au nombre de six, qui ne contiennent qu'une des fonctions A , B , A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , donnent pour les valeurs de ces fonctions

$$(41) \quad \begin{cases} A = \frac{\beta_1}{\alpha_1}(a_1 - b_2), & A_1 = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}(b - a_2), & A_2 = \frac{\beta}{\alpha}(a - b_1), \\ B = -\frac{\alpha_2}{b_2}(a_1 - b_2), & B_1 = \frac{\alpha}{b}(b - a_2), & B_2 = -\frac{\alpha_1}{b_1}(a - b_1), \end{cases}$$

et les trois autres équations (40) sont vérifiées par ces valeurs.

L'équation (38) devant être satisfaite, il faudra que l'on ait

$$(42) \quad \frac{\beta\beta_1\beta_2}{\alpha\alpha_1\alpha_2} = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{bb_1b_2}.$$

§ X.

Les valeurs (41), substituées dans les relations (3), donnent

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\rho_1} = \frac{1}{A} = -\frac{a_1}{(a_1 - b_2)\beta_1}, & \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\rho_2} = \frac{1}{B} = -\frac{b_2}{(a_1 - b_2)\alpha_2}, \\ \frac{1}{Q_1} \frac{dQ_1}{d\rho_2} = \frac{1}{A_1} = -\frac{a_2}{(b - a_2)\beta_2}, & \frac{1}{Q_1} \frac{dQ_1}{d\rho_1} = \frac{1}{B_1} = \frac{b}{(b - a_2)\alpha}, \\ \frac{1}{Q_2} \frac{dQ_2}{d\rho} = \frac{1}{A_2} = -\frac{a}{(a - b_1)\beta}, & \frac{1}{Q_2} \frac{dQ_2}{d\rho_1} = \frac{1}{B_2} = -\frac{b_1}{(a - b_1)\alpha_1}; \end{cases}$$

ce qui conduit aux relations différentielles suivantes, comme conditions d'intégrabilité :

$$\frac{a_1}{\beta_1} \frac{db_2}{d\rho_2} = \frac{b_2}{\alpha_2} \frac{da_1}{d\rho_1}, \quad \frac{a_2}{\beta_2} \frac{db}{d\rho} = \frac{b}{\alpha} \frac{da_2}{d\rho_2}, \quad \frac{a}{\beta} \frac{db_1}{d\rho_1} = \frac{b_1}{\alpha_1} \frac{da}{d\rho};$$

d'où l'on conclut

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{b_2}{\alpha_2} = i \frac{db_2}{d\rho_2}, & \frac{b}{\alpha} = i_1 \frac{db}{d\rho}, & \frac{b_1}{\alpha_1} = i_2 \frac{db_1}{d\rho_1}, \\ \frac{a_1}{\beta_1} = i \frac{da_1}{d\rho_1}, & \frac{a_2}{\beta_2} = i_1 \frac{da_2}{d\rho_2}, & \frac{a}{\beta} = i_2 \frac{da}{d\rho}, \end{cases}$$

i, i_1, i_2 étant nécessairement constants.

De ces valeurs (44) on déduit, par l'intégration des équations (43),

$$(45) \quad Q = (a_1 - b_2)^i, \quad Q_1 = (b - a_2)^{i_1}, \quad Q_2 = (a - b_1)^{i_2};$$

en outre, ces mêmes valeurs (44), combinées avec la relation nécessaire (42), donnent

$$\frac{db}{d\rho} \frac{db_1}{d\rho_1} \frac{db_2}{d\rho_2} = \frac{da}{d\rho} \frac{da_1}{d\rho_1} \frac{da_2}{d\rho_2},$$

équation qui, pour être satisfaite, exige que l'on ait

$$(46) \quad \begin{cases} a = mf, & a_1 = m_1 f_1, & a_2 = m_2 f_2, \\ b = nf, & b_1 = n_1 f_1, & b_2 = n_2 f_2, \end{cases}$$

f ne contenant que ρ, f_1 que ρ_1, f_2 que ρ_2 [*]; m, n, m_1, n_1, m_2, n_2

[*] On pourrait penser que les valeurs (46) ne sont pas les plus générales, et qu'il

étant des constantes liées entre elles par la relation

$$(47) \quad mm_1m_2 = nn_1n_2.$$

Par ces valeurs (46) les fonctions Q , Q_1 , Q_2 (45) se présentent sous la forme

$$Q = (m_1f_1 - n_2f_2)^i, \quad Q_1 = (nf - m_2f_2)^{i_1}, \quad Q_2 = (mf - n_1f_1)^{i_2};$$

mais, pour que ces valeurs vérifient réellement les équations (9), il faut que $i_2 = i_1 = i$. En effet, lorsqu'on les substitue dans la première (9), par exemple, on trouve

$$i(i_2nn_1n_2 - i_1mm_1m_2)f + i_1(i - i_2)n_1m_1m_2f_1 + i_2(i_1 - i)m_2n_1n_2f_2 = 0;$$

et, comme $nn_1n_2 = mm_1m_2$ (47), cette équation ne peut être satisfaite, quels que soient f , f_1 , f_2 , que si l'on a $i_2 = i_1 = i$.

manque une constante dans chacun des groupes (a, b) (a_1, b_1) , (a_2, b_2) ; mais cette plus grande généralité n'est qu'apparente. En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} a &= mf + r, & a_1 &= m_1f_1 + r, & a_2 &= m_2f_2 + r, \\ b &= nf, & b_1 &= n_1f_1, & b_2 &= n_2f_2, \end{aligned}$$

m, m_1, m_2, n, n_1, n_2 vérifiant nécessairement la relation (47), et les trois autres constantes r, r_1, r_2 étant arbitraires, les valeurs de Q, Q_1, Q_2 (45) deviennent

$$Q = (m_1f_1 - n_2f_2 + r)^i, \quad Q_1 = (nf - m_2f_2 + r_1)^{i_1}, \quad Q_2 = (mf - n_1f_1 + r_2)^{i_2}.$$

Pour que ces valeurs puissent vérifier les trois équations (9), quels que soient f, f_1, f_2 , il faut d'abord, comme le texte le démontre, que les exposants i, i_1, i_2 soient égaux, et ensuite que les constantes r, r_1, r_2 soient liées par les équations

$$m_1n_1r - n_1n_2r_2 + m_2m_2r_2 = 0, \quad m_2mr - mn_2r_1 + n_2nr_2 = 0, \quad nn_1r - mm_1r_1 + m_1nr_2 = 0.$$

Or, on satisfait généralement à ces relations en prenant

$$r = m_1\alpha_1 - n_2\alpha_2, \quad r_1 = n\alpha - m_2\alpha_2, \quad r_2 = m\alpha - n_1\alpha_1,$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ étant trois nouvelles constantes; d'où résulte

$$Q = [m_1(f_1 + \alpha_1) - n_2(f_2 + \alpha_2)]^i, \quad Q_1 = [n(f + \alpha) - m_2(f_2 + \alpha_2)]^i, \quad Q_2 = [m(f + \alpha) - n_1(f_1 + \alpha_1)]^i,$$

ou plus simplement les valeurs (48), puisque, les fonctions f, f_1, f_2 étant indéterminées, on peut supprimer les constantes $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$.

Donc enfin, les formes les plus générales des fonctions Q , Q_1 , Q_2 , qui puissent vérifier les équations (9), sont

$$(48) \quad Q = (m_1 f_1 - n_2 f_2)^i, \quad Q_1 = (n f - m_2 f_2)^i, \quad Q_2 = (m f - n_1 f_1)^i,$$

dans lesquelles m , m_1 , m_2 , n , n_1 , n_2 sont des constantes liées entre elles par la relation (47), f une fonction de ρ , f_1 de ρ_1 , f_2 de ρ_2 .

Il s'agit maintenant de déterminer les fonctions f , f_1 , f_2 , l'exposant i , et les constantes m , m_1 , m_2 , n , n_1 , n_2 , de telle sorte que les valeurs (48) vérifient les équations différentielles (10).

§ XI.

Posons, pour simplifier,

$$(49) \quad \begin{cases} m_1 f_1 - n_2 f_2 = q, & n f - m_2 f_2 = q_1, & m f - n_1 f_1 = q_2; \\ Q = q^i, & Q_1 = q_1^i, & Q_2 = q_2^i; \\ \frac{df}{d\rho} = f', & \frac{d^2 f}{d\rho^2} = f'', & \frac{df_1}{d\rho_1} = f'_1, \quad \frac{d^2 f_1}{d\rho_1^2} = f''_1; \quad \frac{df_2}{d\rho_2} = f'_2, \quad \frac{d^2 f_2}{d\rho_2^2} = f''_2. \end{cases}$$

Les équations (10), développées, deviennent alors

$$(50) \quad \begin{cases} q^{2i} \left(m f'' - \frac{m^2}{q_2} f'^2 - \frac{imn}{q_1} f'^2 \right) - q_1^{2i} \left(n_1 f''_1 + \frac{n_1^2}{q_2} f'^2_1 - \frac{im_1 n_1}{q} f'^2_1 \right) + q_2^{2i+1} \frac{im_2 n_2}{qq_1} f'^2_2 = 0, \\ q^{2i} \left(n f'' - \frac{n^2}{q_1} f'^2 - \frac{imn}{q_2} f'^2 \right) - q_1^{2i+1} \frac{im_1 n_1}{q_2 q} f'^2_1 - q_2^{2i} \left(m_2 f''_2 + \frac{m_2^2}{q_1} f'^2_2 + \frac{im_2 n_2}{q} f'^2_2 \right) = 0, \\ q^{2i+1} \frac{imn}{q_1 q_2} f'^2 + q_1^{2i} \left(m_1 f''_1 - \frac{m_1^2}{q} f'^2_1 + \frac{im_1 n_1}{q_2} f'^2_1 \right) - q_2^{2i} \left(n_2 f''_2 + \frac{n_2^2}{q} f'^2_2 + \frac{im_2 n_2}{q_1} f'^2_2 \right) = 0. \end{cases}$$

On peut poser

$$f'^2 = F, \quad f'^2_1 = F_1, \quad f'^2_2 = F_2,$$

et regarder F comme fonction de f , F_1 de f_1 , F_2 de f_2 , d'où

$$(51) \quad \begin{cases} \rho = \int \frac{df}{\sqrt{F}}, & \rho_1 = \int \frac{df_1}{\sqrt{F_1}}, & \rho_2 = \int \frac{df_2}{\sqrt{F_2}}, \\ f'' = \frac{1}{2} \frac{dF}{df}, & f''_1 = \frac{1}{2} \frac{dF_1}{df_1}, & f''_2 = \frac{1}{2} \frac{dF_2}{df_2}. \end{cases}$$

Les équations (50) deviennent alors

$$(52) \begin{cases} mq^{2i+1} \left(q_1 \frac{dF}{df} - \frac{2mq_1}{q_2} F - 2inF \right) - nq_1^{2i+1} \left(q \frac{dF_1}{df_1} + \frac{2n_1q}{q_2} - 2im_1F_1 \right) + 2im_2n_2q_2^{2i+1}F_2 = 0, \\ nq^{2i+1} \left(q_2 \frac{dF}{df} - \frac{2nq_2}{q_1} F - 2imF \right) - 2im_1n_1q_1^{2i+1}F_1 - m_2q_2^{2i+1} \left(q \frac{dF_2}{df_2} + \frac{2m_2q}{q_1} F_2 + 2in_2F_2 \right) = 0, \\ 2imnq^{2i+1}F + m_1q_1^{2i+1} \left(q_2 \frac{dF_1}{df_1} - \frac{2m_1q_2}{q} F_1 + 2in_1F_1 \right) - n_2q_2^{2i+1} \left(q \frac{dF_2}{df_2} + \frac{2n_2q}{q_1} F_2 + 2im_2F_2 \right) = 0. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces trois équations, après les avoir multipliées, la première par mn_2q_2 , la seconde par $-mn_2q_1$, la troisième par mm_2q , les termes en $\frac{dF}{df}$, $\frac{dF_1}{df_1}$, $\frac{dF_2}{df_2}$ se détruisent; de plus, à l'aide de la relation (47) et de l'identité $mn_2q_1 = mn_2q_2 + mm_2q$, on met facilement le résultat sous la forme

$$(53) \quad 2nm_2(2i-1) \left(m_2q^{2i+2}F + \frac{mm_1}{n} \frac{n_1n_2}{m_2} q_1^{2i+2}F_1 + n_2^2q_2^{2i+2}F_2 \right) = 0.$$

Or, d'après la relation (47),

$$\frac{mm_1}{n} = \frac{n_1n_2}{m_2},$$

et le facteur

$$\left[m^2q^{2i+2}f'^2 + \left(\frac{n_1n_2}{m_2} \right)^2 q_1^{2i+2}f_1'^2 + n_2^2q_2^{2i+2}f_2'^2 \right]$$

est essentiellement positif; l'équation (53) ne peut donc être satisfaite que par l'annulation du facteur $(2i-1)$.

Ainsi $i = \frac{1}{2}$, et l'on a

$$(54) \quad Q = \sqrt{m_1f_1 - n_2f_2}, \quad Q_1 = \sqrt{nf - m_2f_2}, \quad Q_2 = \sqrt{mf - n_1f_1}.$$

Faisant donc $i = \frac{1}{2}$, dans les équations (52), elles deviennent

$$(55) \begin{cases} mq \left[\frac{dF}{df} - \left(\frac{2m}{q_2} + \frac{n}{q_1} \right) F \right] - n_1q_1 \left[\frac{dF_1}{df_1} + \left(\frac{2n_1}{q_2} - \frac{m_1}{q} \right) F_1 \right] + m_2n_2 \frac{q_2}{qq_1} F_2 = 0, \\ nq \left[\frac{dF}{df} - \left(\frac{2n}{q_1} + \frac{m}{q_2} \right) F \right] - m_1n_1 \frac{q_1}{q_2q} F_1 - m_2q_2 \left[\frac{dF_2}{df_2} + \left(\frac{2m_2}{q_1} + \frac{n_2}{q} \right) F_2 \right] = 0, \\ mn \frac{q}{q_1q_2} F + m_1q_1 \left[\frac{dF_1}{df_1} - \left(\frac{2m_1}{q} - \frac{n_1}{q_2} \right) F_1 \right] - n_2q_2 \left[\frac{dF_2}{df_2} + \left(\frac{2n_2}{q} + \frac{m_2}{q_1} \right) F_2 \right] = 0, \end{cases}$$

et l'équation (53) étant maintenant identique, l'une des équations (55) est une conséquence des deux autres.

Le problème se trouve actuellement ramené à l'intégration des équations (55), ou à la détermination des fonctions F de f , F_1 de f_1 , F_2 de f_2 , qui puissent vérifier ces équations (55), dans lesquelles q , q_1 , q_2 ont, en f , f_1 , f_2 , les valeurs (49).

§ XII.

On peut admettre que F_2 , fonction de f_2 , s'annule pour une certaine valeur $f_2 = \varphi_2$, φ_2 étant constant. Par cette valeur φ_2 de f_2 , q devient $(m_1 f_1 - n_2 \varphi_2)$ ou fonction de f_1 seul, q_1 devient $(nf - m_2 \varphi_2)$ ou fonction de f seul, et la première équation (55) donne

$$(56) \quad (mf - n_1 f_1) \left(m \frac{d \frac{F}{nf - m_2 \varphi_2}}{df} - n_1 \frac{d \frac{F_1}{m_1 f_1 - n_2 \varphi_2}}{df_1} \right) = 2m^2 \frac{F}{nf - m_2 \varphi_2} + 2n_1^2 \frac{F_1}{m_1 f_1 - n_2 \varphi_2}.$$

Or la première équation (55) doit être satisfaite pour toute valeur de f_2 ; les fonctions F et F_1 , qui sont indépendantes de cette variable, doivent donc vérifier l'équation (56).

Soit posé, pour simplifier,

$$\frac{d \frac{F}{nf - m_2 \varphi_2}}{df} = \mathcal{F}, \quad \frac{d \frac{F_1}{m_1 f_1 - n_2 \varphi_2}}{df_1} = \mathcal{F}_1;$$

l'équation (56) peut s'écrire ainsi

$$(mf - n_1 f_1) (m \mathcal{F} - n_1 \mathcal{F}_1) = 2m^2 f \mathcal{F} df + 2n_1^2 f_1 \mathcal{F}_1 df_1,$$

et si on la différentie successivement par rapport à f et à f_1 , on trouve

$$\frac{d \mathcal{F}}{df} = - \frac{d \mathcal{F}_1}{df_1} = \frac{m \mathcal{F} + n_1 \mathcal{F}_1}{mf - n_1 f_1};$$

or, la valeur commune de ces trois quantités ne peut être qu'une constante, puisque la première doit être indépendante de f_1 , et la seconde de f ; donc les deux coefficients différentiels

$$\frac{d^2 \frac{F}{nf - m_2 \varphi_2}}{df^2}, \quad \frac{d^2 \frac{F_1}{m_1 f_1 - n_2 \varphi_2}}{df_1^2},$$

sont constants et de signes contraires. D'où il suit que F et F_1 sont des polynômes du troisième degré, l'un en f , l'autre en f_1 , respectivement divisibles par $(nf - m_2\varphi_2)$ et $(m_1f_1 - n_2\varphi_2)$; F_2 l'étant par $(f_2 - \varphi_2)$.

On démontrerait de la même manière, à l'aide de la seconde équation (55), que F_1 étant divisible par $(f_1 - \varphi_1)$, F_2 et F sont respectivement divisibles par $(m_1\varphi_1 - n_2f_2)$ et $(mf - n_1\varphi_1)$; et, à l'aide de la troisième équation (55), que F étant divisible par $(f - \varphi)$, F_1 et F_2 sont respectivement divisibles par $(m\varphi - n_1f_1)$ et $(n\varphi - m_2f_2)$. De plus, les différentielles secondes des quotients obtenus par ces divisions sont constantes, et l'on doit avoir

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{df^2} \frac{F}{nf - m_2\varphi_2} + \frac{d^2}{df_1^2} \frac{F_1}{m_1f_1 - n_2\varphi_2} = 0, \\ \frac{d^2}{df_2^2} \frac{F_2}{m_1\varphi_1 - n_2f_2} + \frac{d^2}{df^2} \frac{F}{mf - n_1\varphi_1} = 0, \\ \frac{d^2}{df_1^2} \frac{F_1}{m\varphi - n_1f_1} + \frac{d^2}{df_2^2} \frac{F_2}{n\varphi - m_2f_2} = 0. \end{cases}$$

Les fonctions F , F_1 , F_2 sont donc nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} F &= A (f - \varphi) (mf - n_1\varphi_1) (nf - m_2\varphi_2), \\ F_1 &= A_1 (f_1 - \varphi_1) (m_1f_1 - n_2\varphi_2) (m\varphi - n_1f_1), \\ F_2 &= A_2 (f_2 - \varphi_2) (n\varphi - m_2f_2) (m_1\varphi_1 - n_2f_2), \end{aligned}$$

et, pour que les relations (57) soient satisfaites, il faut que les constantes A , A_1 , A_2 soient telles que

$$Am = A_1n_1, \quad A_2m_2 = An, \quad A_1m_1 = A_2n_2,$$

conditions qui seront remplies en prenant

$$A = n_1n_2\lambda, \quad A_1 = mn_2\lambda, \quad A_2 = mm_1\lambda;$$

la constante λ qui disparaîtrait comme facteur commun, lors de la vérification des équations (55), peut être prise égale à l'unité.

Ainsi les valeurs générales de F , F_1 , F_2 , ou les intégrales des équations

tions (55), doivent être

$$(58) \quad \begin{cases} F = n_1 n_2 (f - \varphi) (m f - n_1 \varphi_1) (n f - m_2 \varphi_2), \\ F_1 = m n_2 (f_1 - \varphi_1) (m_1 f_1 - n_2 \varphi_2) (m \varphi - n_1 f_1), \\ F_2 = m m_1 (f_2 - \varphi_2) (n \varphi - m_2 f_2) (m_1 \varphi_1 - n_2 f_2); \end{cases}$$

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ étant les trois constantes introduites par l'intégration. On peut supposer que ces constantes sont les limites inférieures des intégrales (51), en sorte qu'elles correspondent respectivement aux valeurs zéro des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 .

§ XIII.

Mais il est nécessaire de vérifier que les fonctions (58) rendent identiques les équations (55). Pour faire plus commodément cette vérification, posons

$$f - \varphi = p, \quad f_1 - \varphi_1 = p_1, \quad f_2 - \varphi_2 = p_2,$$

d'où

$$\begin{aligned} m f - n_1 \varphi_1 &= q_2 + n_1 p_1, & n f - m_2 \varphi_2 &= q_1 + m_2 p_2, \\ m_1 f_1 - n_2 \varphi_2 &= q + n_2 p_2, & m \varphi - n_1 f_1 &= q_2 - m p, \\ n \varphi - m_2 f_2 &= q_1 - n p, & m_1 \varphi_1 - n_2 f_2 &= q - m_1 p_1; \end{aligned}$$

les fonctions (58) pourront s'écrire ainsi

$$(59) \quad \begin{cases} F = n_1 n_2 p (q_2 + n_1 p_1) (q_1 + m_2 p_2), \\ F_1 = m n_2 p_1 (q + n_2 p_2) (q_2 - m p), \\ F_2 = m m_1 p_2 (q_1 - n p) (q - m_1 p_1), \end{cases}$$

et l'on déduira aisément

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{dF}{df} = n_1 n_2 [(q_2 + n_1 p_1) (q_1 + m_2 p_2) + m p (q_1 + m_2 p_2) + n p (q_2 + n_1 p_1)], \\ \frac{dF_1}{df} = m n_2 [(q + n_2 p_2) (q_2 - m p) + m_1 p_1 (q_2 - m p) - n_1 p_1 (q + n_2 p_2)], \end{cases}$$

Les valeurs (59) et (60) étant substituées dans la première des équations (55), on trouve, après plusieurs réductions et la suppression du

facteur commun mn_2p_2 .

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} & m_2 n_1 q \left[q_2 + n_1 p_1 - mp - \frac{2 \cdot mp \cdot n_1 p_1}{q_2} - \frac{np(q_2 + n_1 p_1)}{q_1} \right] \\ & - n_1 n_2 q_1 \left[q_2 + n_1 p_1 - mp - \frac{2 \cdot mp \cdot n_1 p_1}{q_2} - \frac{m_1 p_1 (q_2 - mp)}{q} \right] \\ & + m_1 m_2 q_2^2 \frac{(q_1 - np)(q - m_1 p_1)}{qq_1} = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut remplacer, dans le dernier terme, $m_1 m_2 q_2$ par sa valeur identique $(n_1 n_2 q_1 - m_2 n_1 q)$, le produit $\frac{(q_1 - np)(q - m_1 p_1)}{qq_1}$ par son développement $\left(1 - \frac{np}{q_1} - \frac{m_1 p_1}{q} + \frac{np \cdot m_1 p_1}{qq_1}\right)$; puis, réduisant, s'aidant de la relation (47) et supprimant le facteur commun $n_1 p p_1$, l'équation (61) devient

$$(62) \quad 2m \left(\frac{n_1 n_2 q_1 - m_2 n_1 q}{q_2} \right) = m_2 \left(\frac{n n_1 q + n m_1 q_2}{q_1} \right) + n_2 \left(\frac{m m_1 q_1 - n m_1 q_2}{q} \right).$$

Mais l'on a identiquement, par les valeurs (49) de q, q_1, q_2 ,

$$\frac{n_1 n_2 q_1 - m_2 n_1 q}{q_2} = m_1 m_2, \quad \frac{n n_1 q + n m_1 q_2}{q_1} = m m_1, \quad \frac{m m_1 q_1 - n m_1 q_2}{q} = n n_1,$$

ce qui réduit l'équation (62) à $2m m_1 m_2 = m m_1 m_2 + n n_1 n_2$, ou à la relation (47). Ainsi les fonctions (58) vérifient la première des équations (55), et l'on s'assurerait de la même manière qu'elles vérifient les deux autres.

§ XIV.

En résumé, on a les intégrales complètes des équations (9) et (10) en prenant

$$Q = \sqrt{mf - n_2 f_2}, \quad Q_1 = \sqrt{nf - m_2 f_2}, \quad Q_2 = \sqrt{mf - n_1 f_1}, \quad (m m_1 m_2 = n n_1 n_2,$$

$$63 \quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \int_{\varphi_2}^f \frac{df}{\sqrt{n_1 n_2 (f - \varphi_1) (mf - n_1 \varphi_1) (nf - m_2 \varphi_2)}}, \\ \rho_1 &= \int_{\varphi_1}^{f_1} \frac{df_1}{\sqrt{m n_2 (f_1 - \varphi_1) (m_1 f_1 - n_2 \varphi_2) (m \varphi_1 - n_1 f_1)}}, \\ \rho_2 &= \int_{\varphi_2}^{f_2} \frac{df_2}{\sqrt{m m_1 (f_2 - \varphi_2) (n \varphi_1 - m_1 f_2) (m_1 \varphi_1 - n_1 f_2)}}. \end{aligned} \right.$$

d'où l'on conclut, pour les paramètres différentiels du premier ordre des surfaces orthogonales toutes isothermes,

$$(64) \quad \begin{cases} h = \frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{\sqrt{nf-m_2f_2}\sqrt{mf-n_1f_1}}, \\ h_1 = \frac{d\rho_1}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{mf-n_1f_1}\sqrt{m_1f_1-n_2f_2}}, \\ h_2 = \frac{d\rho_2}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{m_1f_1-n_2f_2}\sqrt{nf-m_2f_2}}, \end{cases}$$

ds , ds_1 , ds_2 étant pris sur les intersections, ou sur les lignes de courbure des surfaces conjuguées.

D'après l'ordre de grandeur adopté, f_2 est numériquement moindre que f_1 , qui est lui-même plus petit que f ; la limite inférieure φ_2 peut donc être prise égale à zéro, et l'on aura

$$\begin{aligned} \rho &= \int_{\varphi}^f \frac{k df}{\sqrt{\frac{nn_1n_2m}{k} k f (k f - k \varphi) \left(k f - k \frac{n_1}{m} \varphi \right)}}, \\ \rho_1 &= \int_{\varphi_1}^f \frac{k_1 df_1}{\sqrt{\frac{mm_1n_1n_2}{k_1} k_1 f_1 (k_1 f_1 - k_1 \varphi_1) \left(k_1 \frac{m}{n_1} \varphi - k_1 f_1 \right)}}, \\ \rho_2 &= \int_0^{f_2} \frac{k_2 df_2}{\sqrt{\frac{mm_1m_2n_2}{k_2} k_2 f_2 \left(k_2 \frac{n}{m_2} \varphi - k_2 f_2 \right) \left(k_2 \frac{m_1}{n_2} \varphi_1 - k_2 f_2 \right)}}; \end{aligned}$$

k , k_1 , k_2 étant des indéterminées, dont on peut disposer de telle sorte que les trois coefficients de φ soient égaux, ainsi que ceux de φ_1 .

En effet, ces conditions sont

$$k = k_1 \frac{m}{n_1} = k_2 \frac{n}{m_2}, \quad k \frac{n_1}{m} = k_1 = k_2 \frac{m_1}{n_2};$$

le second groupe pouvant se mettre sous la forme $k = k_1 \frac{m}{n_1} = k_2 \frac{mm_1}{n_1 n_2}$, ne diffère pas du premier, puisque, d'après la relation (47), on a

$$\frac{mm_1}{n_1 n_2} = \frac{n}{m_2};$$

et il suffira de prendre

$$k = m m_1, \quad k_1 = m_1 n_1, \quad k_2 = n_1 n_2,$$

pour vérifier à la fois les deux groupes. On aura, en adoptant ces valeurs des indéterminées k, k_1, k_2 :

$$\begin{aligned} \rho &= \int_{\varphi}^f \frac{m m_1 df}{\sqrt{m m_2 m m_1 f (m m_1 f - m m_1 \varphi) (m m_1 f - m_1 n_1 \varphi)}}, \\ \rho_1 &= \int_{\varphi_1}^{f_1} \frac{m_1 n_1 df_1}{\sqrt{m n_2 m_1 n_1 f_1 (m_1 n_1 f_1 - m_1 n_1 \varphi_1) (m m_1 \varphi - m_1 n_1 f_1)}}, \\ \rho_2 &= \int_0^{f_2} \frac{n_1 n_2 df_2}{\sqrt{n n_2 n_1 n_2 f_2 (m m_1 \varphi - n_1 n_2 f_2) (n_1 m_1 \varphi_1 - n_1 n_2 f_2)}}. \end{aligned}$$

Si l'on pose maintenant

$$(65) \quad \begin{cases} m m_1 f = \lambda^2 p^2, & m_1 n_1 f_1 = \lambda^2 p_1^2, & n_1 n_2 f_2 = \lambda^2 p_2^2, \\ m m_1 \varphi = \lambda^2 c^2, & m_1 n_1 \varphi_1 = \lambda^2 b^2, \end{cases}$$

λ étant constant et indéterminé, il vient

$$(66) \quad \begin{cases} \frac{\lambda \sqrt{m m_2}}{2} \rho = \int_c^p \frac{dp}{\sqrt{p^2 - c^2} \sqrt{p^2 - b^2}}, \\ \frac{\lambda \sqrt{m n_2}}{2} \rho_1 = \int_b^{p_1} \frac{dp_1}{\sqrt{c^2 - p_1^2} \sqrt{p_1^2 - b^2}}, \\ \frac{\lambda \sqrt{n n_2}}{2} \rho_2 = \int_0^{p_2} \frac{dp_2}{\sqrt{c^2 - p_2^2} \sqrt{b^2 - p_2^2}}. \end{cases}$$

et les mêmes valeurs de f, f_1, f_2 (65), substituées dans les formules (64), donnent

$$(67) \quad \begin{cases} \lambda^2 \sqrt{\frac{m_2}{n_1 n_2 m_1}} \frac{dp}{ds} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - p_1^2} \sqrt{p^2 - p_2^2}}, \\ \lambda^2 \sqrt{\frac{1}{n_1 m_1}} \frac{dp_1}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - p_1^2} \sqrt{p_1^2 - p_2^2}}, \\ \lambda^2 \sqrt{\frac{n}{n_1 m m_1}} \frac{dp_2}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - p_1^2} \sqrt{p_1^2 - p_2^2}}. \end{cases}$$

Or il existe une valeur de la constante λ , telle que les coefficients

de ρ et $d\rho$, de ρ_1 et $d\rho_1$, de ρ_2 et $d\rho_2$, sont respectivement égaux dans les équations (66) et (67); cette valeur est

$$(68) \quad \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{n_1 n_2 m m_1},$$

car elle donne identiquement

$$\lambda \sqrt{\frac{m_2}{n_1 n_2 m_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{m m_2}, \quad \lambda \sqrt{\frac{1}{n_1 m_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{m n_2}, \quad \lambda \sqrt{\frac{n}{m m_1 n_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{n n_2} :$$

si donc on prend pour nouveaux paramètres les anciens, respectivement multipliés par $\frac{\lambda \sqrt{m m_2}}{2}$, $\frac{\lambda \sqrt{m n_2}}{2}$, $\frac{\lambda \sqrt{n n_2}}{2}$, λ ayant la valeur (68), on aura définitivement

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_c^p \frac{dp}{\sqrt{p^2 - b^2} \sqrt{p^2 - c^2}} &= \rho, & \int_b^{p_1} \frac{dp_1}{\sqrt{p_1^2 - b^2} \sqrt{c^2 - p_1^2}} &= \rho_1, & \int_0^{p_2} \frac{dp_2}{\sqrt{b^2 - p_2^2} \sqrt{c^2 - p_2^2}} &= \rho_2, \\ \frac{d\rho}{ds} &= h = \frac{1}{\sqrt{p^2 - p_1^2} \sqrt{p^2 - p_2^2}}, & \frac{d\rho_1}{ds_1} &= h_1 = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 - p_2^2} \sqrt{p^2 - p_1^2}}, & \frac{d\rho_2}{ds_2} &= h_2 = \frac{1}{\sqrt{p^2 - p_2^2} \sqrt{p_1^2 - p_2^2}}, \end{aligned} \right.$$

pour représenter tous les systèmes de surfaces orthogonales et isothermes.

§ XV.

Il ne s'agit plus que d'obtenir les équations des mêmes surfaces en coordonnées rectilignes. Les valeurs (69) substituées dans les formules (3) donnent

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c} &= \frac{p_1 \sqrt{p_1^2 - b^2} \sqrt{c^2 - p_1^2}}{\sqrt{p^2 - p_2^2} (p^2 - p_1^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{1}{c_1} &= \frac{p_2 \sqrt{b^2 - p_2^2} \sqrt{c^2 - p_2^2}}{\sqrt{p^2 - p_1^2} (p_1^2 - p_2^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{1}{c_2} &= -\frac{p \sqrt{p^2 - b^2} \sqrt{p^2 - c^2}}{\sqrt{p_1^2 - p_2^2} (p^2 - p_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{1}{\gamma} &= \frac{p_2 \sqrt{b^2 - p_2^2} \sqrt{c^2 - p_2^2}}{\sqrt{p^2 - p_1^2} (p^2 - p_2^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{1}{\gamma_1} &= -\frac{p \sqrt{p^2 - b^2} \sqrt{p^2 - c^2}}{\sqrt{p_1^2 - p_2^2} (p_1^2 - p_2^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{1}{\gamma_2} &= -\frac{p_1 \sqrt{p_1^2 - b^2} \sqrt{c^2 - p_1^2}}{\sqrt{p^2 - p_2^2} (p_1^2 - p_2^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Or les deux courbures $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{c_1}$ des surfaces ρ_2 sont nulles, quels que soient p et p_1 , pour $p_2 = 0$; les deux courbures $\frac{1}{\gamma_2}$, $\frac{1}{c}$ des surfaces ρ_1 sont nulles, quels que soient p_2 et p , pour $p_1 = b$; les deux cour-

bures $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ des surfaces ρ sont nulles, quels que soient ρ_1 et ρ_2 , pour $p=c$. Les surfaces conjuguées isothermes comprennent donc trois plans, correspondant aux valeurs zéro des paramètres, ou à $\rho_2=0$, $\rho_1=b$, $p=c$. Ces plans sont nécessairement orthogonaux, et on peut les prendre respectivement pour plans coordonnés des γz , zx , xy , dont les équations sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

c'est-à-dire que x devra être nul, quels que soient ρ et ρ_1 , pour $\rho_2=0$ ou $p_2=0$; que y devra être nul, quels que soient ρ_2 et ρ , pour $\rho_1=0$, $p_1=b$; enfin que z devra être nul, quels que soient ρ_1 et ρ_2 , pour $\rho=0$, ou $p=c$.

Cela posé, les trois premières équations (5), transformées en p, p_1, p_2 , à l'aide des valeurs (6g), deviennent

$$(71) \quad \begin{cases} (p^2 - p_1^2) \frac{d^2 \varphi}{dp \, dp_1} + p_1 \frac{d\varphi}{dp} - p \frac{d\varphi}{dp_1} = 0, \\ (p^2 - p_2^2) \frac{d^2 \varphi}{dp_2 \, dp} - p \frac{d\varphi}{dp_2} + p_2 \frac{d\varphi}{dp} = 0, \\ (p_1^2 - p_2^2) \frac{d^2 \varphi}{dp_1 \, dp_2} + p_2 \frac{d\varphi}{dp_1} - p_1 \frac{d\varphi}{dp_2} = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose $\varphi = PP_1P_2$, P, P_1, P_2 étant respectivement fonctions de p, p_1, p_2 , les trois équations (71) exigent que

$$p^2 - \frac{pP}{\left(\frac{dP}{dp}\right)} = p_1^2 - \frac{p_1P_1}{\left(\frac{dP_1}{dp_1}\right)} = p_2^2 - \frac{p_2P_2}{\left(\frac{dP_2}{dp_2}\right)};$$

et comme la première de ces trois quantités ne pourrait contenir que p , la seconde que p_1 , la troisième que p_2 , leur valeur commune est nécessairement une constante A ; on a donc séparément

$$\frac{dP}{P} = \frac{p \, dp}{p^2 - A}, \quad \frac{dP_1}{P_1} = \frac{p_1 \, dp_1}{p_1^2 - A}, \quad \frac{dP_2}{P_2} = \frac{p_2 \, dp_2}{p_2^2 - A},$$

d'où

$$P = \sqrt{p^2 - A}, \quad P_1 = \sqrt{p_1^2 - A}, \quad P_2 = \sqrt{p_2^2 - A}.$$

Il suit de là que l'intégrale générale des équations (71) peut être mise sous la forme

$$(72) \quad \varphi = \Sigma \sqrt{B(p^2 - A)(p_1^2 - A)(p_2^2 - A)},$$

les deux constantes A et B variant d'un terme à l'autre de la série. Il faut maintenant déterminer ces constantes, de telle sorte que φ donne successivement les fonctions cherchées x, y, z , en p, p_1, p_2 .

§ XVI.

Pour x , il faut que $p_2=0$ l'annule, quels que soient p et p_1 ; ce qui exige que, dans l'équation (72), toutes les constantes A soient nulles; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul de la forme $pp_1p_2\Sigma\sqrt{B}$; et l'on a, en représentant $\Sigma\sqrt{B}$ par $\frac{1}{g_2}$,

$$x = \frac{1}{g_2} pp_1p_2;$$

or, si l'on substitue cette valeur de x à la place de φ dans la quatrième équation (5), qui, transformée en p, p_1, p_2 , est

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p_1^2 - p_2^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2) \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \\ + (p^2 - p_2^2)(p_1^2 - b^2)(c^2 - p_1^2) \left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)^2 \\ + (p^2 - p_1^2)(b^2 - p_2^2)(c^2 - p_2^2) \left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right)^2 \\ = (p_1^2 - p_2^2)(p^2 - p_2^2)(p^2 - p_1^2) : \end{array} \right.$$

sa vérification exige que $g_2 = bc$; on a donc

$$(74) \quad bcx = pp_1p_2.$$

Pour y , il faut que $p_1=b$ l'annule, quels que soient p_2 et p ; ce qui exige que, dans φ (72), toutes les constantes A soient égales à b^2 ; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul; et l'on a, en représentant $\Sigma\sqrt{-B}$ par $\frac{1}{g_1}$,

$$y = \frac{1}{g_1} \sqrt{p^2 - b^2} \sqrt{p_1^2 - b^2} \sqrt{b^2 - p_2^2};$$

or, cette valeur de φ ne vérifie l'équation (73) que si l'on prend

$$g_1 = b \sqrt{c^2 - b^2};$$

on a donc

$$(75) \quad b \sqrt{c^2 - b^2} \cdot y = \sqrt{p^2 - b^2} \sqrt{p_1^2 - b^2} \sqrt{b^2 - p_2^2}.$$

Enfin, pour z , il faut que $p = c$ l'annule, quels que soient p_1 et p_2 ; ce qui exige que, dans φ (72), toutes les constantes A soient égales à c^2 ; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul; et l'on a, en représentant $\Sigma \sqrt{B}$ par $\frac{1}{g}$,

$$z = \frac{1}{g} \sqrt{p^2 - c^2} \sqrt{c^2 - p_1^2} \sqrt{c^2 - p_2^2};$$

or, cette valeur de φ ne vérifie l'équation (73) que si l'on prend

$$g = c \sqrt{c^2 - b^2};$$

on a donc

$$(76) \quad c \sqrt{c^2 - b^2} \cdot z = \sqrt{p^2 - c^2} \sqrt{c^2 - p_1^2} \sqrt{c^2 - p_2^2}.$$

Si entre les équations (74), (75), (76), on élimine successivement p_1 et p_2 , p_2 et p , p et p_1 , on obtient, en coordonnées rectilignes, pour les équations séparées des systèmes conjugués,

$$(77) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2 - b^2} + \frac{z^2}{p^2 - c^2} = 1, \\ \frac{x^2}{p_1^2} + \frac{y^2}{p_1^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - p_1^2} = 1, \\ \frac{x^2}{p_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - p_2^2} - \frac{z^2}{c^2 - p_2^2} = 1. \end{cases}$$

D'où il résulte, enfin, que les seules surfaces toutes isothermes, qui ne sont ni cylindriques, ni coniques, ni de révolution, sont des surfaces du second degré homofocales.

§ XVII.

Les propriétés du système de surfaces orthogonales représenté par les équations (69) ou (77) ont été suffisamment étudiées dans le Mémoire sur les surfaces isothermes, déjà cité. Les constantes ou les demi-distances focales b et c sont les seules indéterminées dont on puisse disposer. On peut, par exemple, faire en sorte qu'un ellipsoïde donné, ayant pour demi-axes A, B, C , fasse partie du système : il suffira de prendre

$$b^2 = A^2 - B^2, \quad c^2 = A^2 - C^2,$$

et l'ellipsoïde proposé sera représenté par la première équation (77) quand le paramètre p atteindra la valeur particulière A . Si l'ellipsoïde donné a deux axes égaux, ou même s'il se réduit à une sphère, les équations (69) ou (77) peuvent pareillement le comprendre; c'est-à-dire que ces équations s'étendent aux deux systèmes de révolution représentés par les groupes (28) et (30), et même au système de surfaces coniques signalé au § III.

En effet, pour déduire des équations générales (69) et (77) le système de surfaces de révolution représenté par les équations (20) et (28), il faut d'abord poser

$$p_2 = b \sin c \theta,$$

puis, après cette transformation, faire $b = 0$. S'il s'agit de reproduire le système des surfaces de révolution (35) et (30), il faut poser

$$p_1 = \sqrt{b^2 + (c^2 - b^2) \sin^2 c \theta},$$

puis faire $b = c$, et à l'aide de quelques changements de notation, on retrouve les équations (35) et (30).

Enfin, pour passer au système de surfaces sphériques et coniques qui correspond aux équations (12) et (13), il faut poser d'abord

$$\begin{aligned} b &= \varepsilon \beta, & c &= \varepsilon \gamma, & p &= -r, & p_1 &= \varepsilon \varpi_1, & p_2 &= \varepsilon \varpi_2, \\ \varepsilon \rho_1 &= \varepsilon_1, & \varepsilon \rho_2 &= \varepsilon_2, & \varepsilon h_1 &= \eta_1, & \varepsilon h_2 &= \eta_2; \end{aligned}$$

par cette transformation, les équations (69) et (77) deviennent

$$78 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \int \frac{-dr}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2 \beta^2} \sqrt{r^2 - \varepsilon^2 \gamma^2}}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2 \alpha_1^2} \sqrt{r^2 - \varepsilon^2 \alpha_2^2}}, \\ \varepsilon_1 = \int \frac{d\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 - \beta^2} \sqrt{\gamma^2 - \alpha_1^2}}, \quad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2 \alpha_1^2} \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}}, \\ \varepsilon_2 = \int \frac{d\alpha_2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha_2^2} \sqrt{\gamma^2 - \alpha_2^2}}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2 \alpha_2^2} \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}}, \\ \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - \varepsilon^2 \beta^2} + \frac{z^2}{r^2 - \varepsilon^2 \gamma^2} = 1, \\ \frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\alpha_1^2 - \beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2 - \alpha_1^2} = \varepsilon_1^2, \\ \frac{x^2}{\alpha_2^2} - \frac{y^2}{\beta^2 - \alpha_2^2} - \frac{z^2}{\gamma^2 - \alpha_2^2} = \varepsilon_2^2, \end{array} \right.$$

et si l'on fait $\varepsilon = 0$, on trouve

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{r}, \quad h = \frac{1}{r^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \\ \varepsilon_1 = \int_{\beta}^{\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 - \beta^2} \sqrt{\gamma^2 - \alpha_1^2}}, \quad \eta_1 = \frac{1}{r \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}}, \quad \frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\alpha_1^2 - \beta^2} = \frac{z^2}{\gamma^2 - \alpha_1^2}, \\ \varepsilon_2 = \int_0^{\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{\sqrt{\beta^2 - \alpha_2^2} \sqrt{\gamma^2 - \alpha_2^2}}, \quad \eta_2 = \eta_1, \quad \frac{x^2}{\alpha_2^2} = \frac{y^2}{\beta^2 - \alpha_2^2} + \frac{z^2}{\gamma^2 - \alpha_2^2}, \end{array} \right.$$

équations qui représentent des sphères concentriques, conjuguées à des cônes du second degré orthogonaux. Les constantes β et γ restent indéterminées, en sorte qu'une même famille de sphères concentriques peut être conjuguée à une infinité de doubles familles de cônes isothermes. En faisant

$$\beta = 0, \quad \text{ou} \quad \beta = \gamma,$$

on obtient particulièrement le système sphérique orthogonal, dont les paramètres sont le rayon, la latitude et la longitude.

§ XVIII.

Les lieux géométriques du second ordre, dont le centre est à l'infini, possèdent aussi leurs surfaces orthogonales toutes isothermes; pour déduire ce système des équations générales (69) et (77), il faut

poser d'abord

$$(80) \left\{ \begin{array}{l} p^2 - m^2 = m\lambda, \quad p_1^2 - m^2 = m\lambda_1, \quad p_2^2 - m^2 = m\lambda_2; \\ b^2 - m^2 = m\beta, \quad c^2 - m^2 = m\gamma, \quad x = m + x'; \\ m\rho = \varepsilon, \quad m\rho_1 = \varepsilon_1, \quad m\rho_2 = \varepsilon_2, \\ mh = \eta, \quad mh_1 = \eta_1, \quad mh_2 = \eta_2; \end{array} \right.$$

m étant une constante indéterminée. Par cette transformation les équations (69) et (77) deviennent

$$(81) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{m}} \sqrt{\lambda - \beta} \sqrt{\lambda - \gamma}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda_1} \sqrt{\lambda - \lambda_2}}, \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_1}{m}} \sqrt{\lambda_1 - \beta} \sqrt{\gamma - \lambda_1}}, \quad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\lambda - \lambda_1}}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_2}{m}} \sqrt{\beta - \lambda_2} \sqrt{\gamma - \lambda_2}}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda_2} \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}; \\ \frac{2x'}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda - \beta)} + \frac{z^2}{\lambda(\lambda - \gamma)} + \frac{1}{m} \left(\frac{x'^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - \beta} + \frac{z^2}{\lambda - \gamma} \right) = 1, \\ \frac{2x'}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1(\lambda_1 - \beta)} - \frac{z^2}{\lambda_1(\gamma - \lambda_1)} + \frac{1}{m} \left(\frac{x'^2}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1 - \beta} - \frac{z^2}{\gamma - \lambda_1} \right) = 1, \\ \frac{2x'}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\lambda_2(\beta - \lambda_2)} - \frac{z^2}{\lambda_2(\gamma - \lambda_2)} + \frac{1}{m} \left(\frac{x'^2}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\beta - \lambda_2} - \frac{z^2}{\lambda_2 - \gamma} \right) = 1; \end{array} \right.$$

et si l'on fait $\frac{1}{m} = 0$, on obtient

$$(82) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - \beta} \sqrt{\lambda - \gamma}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda_1} \sqrt{\lambda - \lambda_2}}, \quad \frac{2x'}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda - \beta)} + \frac{z^2}{\lambda(\lambda - \gamma)} = 1, \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1 - \beta} \sqrt{\gamma - \lambda_1}}, \quad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\lambda - \lambda_1}}, \quad \frac{2x'}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1(\lambda_1 - \beta)} - \frac{z^2}{\lambda_1(\gamma - \lambda_1)} = 1, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\beta - \lambda_2} \sqrt{\gamma - \lambda_2}}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda - \lambda_2} \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}, \quad \frac{2x'}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\lambda_2(\beta - \lambda_2)} - \frac{z^2}{\lambda_2(\gamma - \lambda_2)} = 1. \end{array} \right.$$

Les surfaces conjuguées sont alors trois familles de paraboloides,

ayant mêmes foyers, et leurs axes sur la même droite. Les paraboloides aux paramètres ε et ε_2 sont elliptiques, et dirigés en sens contraires; ceux au paramètre ε_1 sont hyperboliques.

Les fonctions λ , λ_1 , λ_2 , déterminées par les procédés ordinaires du calcul intégral, de telle sorte que $\lambda = \gamma$ pour $\varepsilon = 0$, $\lambda_1 = \beta$ pour $\varepsilon_1 = 0$, et $\lambda_2 = 0$ pour $\varepsilon_2 = 0$, sont

$$(83) \quad \begin{cases} \lambda = \gamma \left(\frac{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}}{2} \right)^2 - \beta \left(\frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2} \right)^2, \\ \lambda_1 = \beta \cos^2 \varepsilon_1 + \gamma \sin^2 \varepsilon_1, \\ \lambda_2 = 2\sqrt{\beta\gamma} \left(\frac{e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1}}{2} \right) \left(\frac{e^{\varepsilon_2} - e^{-\varepsilon_2}}{2} \right) - (\beta + \gamma) \left(\frac{e^{\varepsilon_2} - e^{-\varepsilon_2}}{2} \right)^2. \end{cases}$$

Les fonctions x' , y , z , en λ , λ_1 , λ_2 , obtenues, soit par l'élimination, à l'aide des relations (82), troisième colonne, soit mieux en substituant les valeurs (80) dans les équations (74), (75) et (76), et faisant $\frac{1}{m} = 0$, sont

$$(84) \quad \begin{cases} 2x' = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 - \beta - \gamma, \\ y\sqrt{\gamma - \beta} = \sqrt{\lambda} - \beta\sqrt{\lambda_1} - \beta\sqrt{\beta} - \lambda_2, \\ z\sqrt{\gamma - \beta} = \sqrt{\lambda} - \gamma\sqrt{\gamma - \lambda_1}\sqrt{\gamma - \lambda_2}. \end{cases}$$

Le nouveau système de surfaces orthogonales du second ordre, toutes isothermes, qui vient d'être défini, se distingue de celui qui comprend les ellipsoïdes, en ce que les fonctions qui expriment les températures sont ici plus simples, ou d'une transcendance moins élevée : en effet, dans le système paraboloidal, comme pour les ellipsoïdes de révolution, ces fonctions sont exponentielles et circulaires, tandis qu'elles sont elliptiques pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux.