

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

**Sur une représentation géométrique des fonctions
elliptiques de première espèce**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 8 (1843), p. 263-264.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8_263_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

DE PREMIÈRE ESPÈCE.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. LIOUVILLE. — 11 avril 1843.)

PAR M. WILLIAM ROBERTS (DE DUBLIN).

« Voici un résultat de géométrie que j'ai trouvé, et qui me semble avoir quelque degré d'intérêt.

» Étant donnée la base d'un triangle, dont le rectangle formé par les côtés est égal au carré de la demi-base, on sait que le lieu du sommet est la lemniscate de Bernoulli, et que sa longueur peut s'exprimer par une fonction elliptique de première espèce, le module étant $\sin 45^\circ$.

» Cherchons donc une courbe sphérique à laquelle appartient une propriété analogue. Soit $2j$ la base commune des triangles sphériques, dont les côtés α et β sont liés par la relation

$$\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta = \sin^2 \frac{1}{2} j,$$

et si l'on appelle θ l'arc d'un grand cercle du milieu de la base au sommet, et ψ l'angle qu'il fait avec la base, on aura, pour l'équation polaire du lieu des sommets,

$$(1 - \sin^2 j \sin^2 \psi) \cos^2 \frac{1}{2} \theta = \cos j.$$

La forme de cette courbe sera semblable à celle de la lemniscate; et son arc, compté depuis l'extrémité du demi-axe, sera aussi exprimé par une fonction de la première espèce, dont le module est toujours plus petit que $\sin 45^\circ$. L'amplitude φ de la fonction sera déter-

minée par l'équation

$$\sqrt{\cos \gamma} \operatorname{tang} \psi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \gamma \cos^2 \varphi}},$$

et $\sqrt{\left(\frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma}\right)}$ sera le module.

» Ceci, avec l'aide des transformations dues à Lagrange et à M. Jacobi, fournit très-simplement une représentation géométrique de la première transcendante elliptique, ce que Legendre a beaucoup désiré.

» J'ai d'autres résultats du même genre, que je serai charmé de vous communiquer, si vous considérez ce que j'ai donné comme digne de votre attention. »

