

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CELLÉRIER

Note sur la détermination d'une fonction arbitraire

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 8 (1843), p. 245-254.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8_245_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8_245_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE;

PAR M. CELLÉRIER.

Cette Note a pour objet de déterminer la forme d'une fonction arbitraire soumise aux conditions suivantes :

Désignons par t, x, y, z , quatre variables qui seront, si l'on veut, le temps et les trois coordonnées d'un point quelconque de l'espace; et faisons

$$(1) \quad \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M e^{(ux+vy+wz+st)\sqrt{-1}} du dv dw,$$

en représentant par M une fonction donnée des variables u, v, w , par rapport auxquelles s'effectue l'intégration, et par s une fonction donnée de la quantité

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

que nous désignerons par h .

Nommons φ' une autre fonction de x, y, z, t , de la forme

$$(2) \quad \varphi' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M' e^{(u'x+v'y+w'z+st)\sqrt{-1}} du' dv' dw',$$

en représentant par s une fonction connue de la quantité

$$h' = \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2},$$

mais telle qu'à une même valeur de s dans l'une et l'autre intégrale répondent des valeurs différentes de h et h' . Quant à M' , c'est une fonction inconnue de u', v', w' , qui doit être telle que l'on ait

$$\varphi' = \varphi,$$

quel que soit t , pour toutes les valeurs de x, y, z satisfaisant à l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

ou l désigne une constante donnée. Notre but est précisément de trouver cette fonction M' .

Si l'on fait, dans la formule (1),

$$u = h \cos \alpha, \quad v = h \sin \alpha \cos \epsilon, \quad w = h \sin \alpha \sin \epsilon,$$

et dans la formule (2),

$$u' = h' \cos \alpha, \quad v' = h' \sin \alpha \cos \epsilon, \quad w' = h' \sin \alpha \sin \epsilon;$$

puis, dans l'une et l'autre,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi \cos \theta, \quad z = r \sin \psi \sin \theta,$$

et

$$\cos \psi \cos \alpha + \sin \psi \sin \alpha \cos (\theta - \epsilon) = p.$$

Si, enfin, on considère à présent M et M' comme des fonctions, la première de h, α, ϵ , et la seconde de h', α, ϵ , on devra faire

$$du \, dv \, dw = h^2 \sin \alpha \, dh \, d\alpha \, d\epsilon,$$

$$du' \, dv' \, dw' = h'^2 \sin \alpha \, dh' \, d\alpha \, d\epsilon;$$

puis, étendre les intégrations relatives à h et h' de 0 à l'infini; celles relatives à α de 0 à π , π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et enfin celles relatives à ϵ de 0 à 2π .

On trouvera ainsi

$$\varphi = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} M e^{(hrp+st)\sqrt{-1}} h^2 \sin \alpha \, dh \, d\alpha \, d\epsilon,$$

$$\varphi' = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} M' e^{(h'rp+st)\sqrt{-1}} h'^2 \sin \alpha \, dh' \, d\alpha \, d\epsilon.$$

L'équation

$$\varphi = \varphi'$$

devra avoir lieu, quels que soient t, ψ, θ , et pour la valeur particulière,

$$r = L.$$

Il faut d'abord pour cela que les éléments de φ et φ' correspondant à une même valeur de s soient égaux; et en considérant h, h' comme des fonctions connues de s , et changeant par conséquent dh et dh' en

$$\frac{dh}{ds} ds, \quad \frac{dh'}{ds} ds,$$

sous les signes d'intégration, il en résulte

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} h^2 \frac{dh}{ds} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} M e^{hlp\sqrt{-1}} \sin \alpha d\alpha d\mathcal{E} \\ = h'^2 \frac{dh'}{ds} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} M' e^{h'lp\sqrt{-1}} \sin \alpha d\alpha d\mathcal{E}, \end{array} \right.$$

relation qui doit avoir lieu quels que soient s, ψ, θ .

On sait qu'en désignant par ρ une quantité réelle numériquement inférieure à l'unité, et par P_n le coefficient de ρ^n dans le développement de

$$(1 - 2p\rho + \rho^2)^{-\frac{1}{2}},$$

suivant les puissances ascendantes de ρ , on aura, quelle que soit la fonction de p représentée par $f(p)$,

$$(4) \quad f(p) = \sum \left(\frac{2n+1}{2} \right) P_n \int_{-1}^{+1} f(p) P_n dp,$$

la somme $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier n , depuis 0 jusqu'à l'infini.

Appliquons ce mode de développement à la fonction

$$e^{hlp\sqrt{-1}} = \cos(hlp) + \sqrt{-1} \sin(hlp),$$

on trouvera

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(hlp) = \sum \left(\frac{2n+1}{2} \right) P_n \int_{-1}^{+1} \cos(hlp) P_n dp, \\ \sin(hlp) = \sum \left(\frac{2n+1}{2} \right) P_n \int_{-1}^{+1} \sin(hlp) P_n dp. \end{array} \right.$$

On sait que l'expression P_n est donnée par la formule

$$P_n = \frac{1}{1.2.3\dots n.2^n} \frac{d^n(p^2-1)^n}{dp^n}.$$

D'ailleurs, comme $(p^2-1)^n$ et ses coefficients différentiels des $n-1$ premiers ordres s'annulent par la supposition de $p = \pm 1$, on trouvera en intégrant par partie, et faisant successivement n égal à un nombre pair $2m$ et à un nombre impair $2m+1$,

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \cos(hlp) \frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}} dp &= (-1)^m (hl)^{2m} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m} \cos(hlp) dp, \\ \int_{-1}^{+1} \sin(hlp) \frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}} dp &= (-1)^m (hl)^{2m} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m} \sin(hlp) dp, \\ \int_{-1}^{+1} \cos(hlp) \frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}} dp &= (-1)^m (hl)^{2m+1} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m+1} \sin(hlp) dp, \\ \int_{-1}^{+1} \sin(hlp) \frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}} dp &= (-1)^{m+1} (hl)^{2m+1} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m+1} \cos(hlp) dp. \end{aligned} \right.$$

Il est clair, en outre, que la deuxième et la troisième de ces valeurs sont nulles, parce que les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m} \sin(hlp) dp, \quad \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m+1} \sin(hlp) dp,$$

se composent d'éléments égaux deux à deux et de signes contraires.

En faisant, pour abréger, $hl = \gamma$, on a

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos \gamma p dp = \frac{\sin \gamma}{\gamma};$$

puis, en différentiant $2i$ fois par rapport à γ , i étant un entier quelconque,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p^{2i} \cos \gamma p dp &= (-1)^i \frac{d^{2i} \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \right)}{d\gamma^{2i}} \\ &= \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{2i(2i-1)}{\gamma^3} + \frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)}{\gamma^5} - \dots \right] \sin \gamma \\ &+ \left[\frac{2i}{\gamma} - \frac{2i(2i-1)(2i-2)}{\gamma^3} + \frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)(2i-4)}{\gamma^5} - \dots \right] \frac{\cos \gamma}{\gamma}. \end{aligned}$$

En développant $(p^2 - 1)^n$ dans l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^n \cos \gamma p dp,$$

et calculant chaque terme par la formule précédente, on trouvera

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^n \cos \gamma p dp \\ &= \frac{\sin \gamma}{\gamma} \left[1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots \right] \\ &+ \frac{\cos \gamma}{\gamma^2} \left[2n - \frac{n}{1}(2n-2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(2n-4) - \dots \right] \\ &- \frac{\sin \gamma}{\gamma^3} \left[2n(2n-1) - \frac{n}{1}(2n-2)(2n-3) + \frac{n(n-1)}{1.2}(2n-4)(2n-5) - \dots \right] \\ &- \frac{\cos \gamma}{\gamma^4} \left[2n(2n-1)(2n-2) - \frac{n}{1}(2n-2)(2n-3)(2n-4) + \dots \right] + \dots, \end{aligned}$$

série dont la loi est facile à saisir. Les coefficients de

$$\frac{\sin \gamma}{\gamma}, \quad \frac{\cos \gamma}{\gamma^2}, \quad -\frac{\sin \gamma}{\gamma^3}, \quad -\frac{\cos \gamma}{\gamma^4}, \text{ etc.,}$$

sont les valeurs des expressions

$$(x^2 - 1)^n, \quad \frac{d(x^2 - 1)^n}{dx}, \quad \frac{d^2(x^2 - 1)^n}{dx^2}, \dots$$

quand, après avoir développé $(x^2 - 1)^n$ et effectué les différentiations, on pose $x = 1$.

Or la valeur $x = 1$ annule évidemment l'expression

$$(x^2 - 1)^n$$

et ses coefficients différentiels des $n - 1$ premiers ordres.

Si donc l'on fait successivement $n = 2m$ et $n = 2m + 1$, on aura

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^{2m} \cos \gamma p dp \\ &= (-1)^m \left[\frac{\sin \gamma}{\gamma^{2m+1}} \frac{d^{2m}(x^2 - 1)^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{\cos \gamma}{\gamma^{2m+2}} \frac{d^{2m+1}(x^2 - 1)^{2m}}{dx^{2m+1}} - \frac{\sin \gamma}{\gamma^{2m+3}} \frac{d^{2m+2}(x^2 - 1)^{2m}}{dx^{2m+2}} - \dots \right], \\ & \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^{2m+1} \cos \gamma p dp \\ &= (-1)^m \left[\frac{\cos \gamma}{\gamma^{2m+2}} \frac{d^{2m+1}(x^2 - 1)^{2m+1}}{dx^{2m+1}} - \frac{\sin \gamma}{\gamma^{2m+3}} \frac{d^{2m+2}(x^2 - 1)^{2m+1}}{dx^{2m+2}} - \text{etc.} \dots \right], \end{aligned} \right.$$

en faisant toujours $x = 1$ après les différentiations.

En désignant par i, i' deux entiers quelconques, on a

$$\frac{d^i(x^2-1)^n}{dx^i} = \frac{d^i[(x-1)^n(x+1)^n]}{dx^i} = (x+1)^n \frac{d^i(x-1)^n}{dx^i} + \frac{n}{1} \frac{d(x+1)^n}{dx} \frac{d^{i-1}(x-1)^n}{dx^{i-1}} + \dots;$$

puis, faisant successivement $i = n, i = n + i',$ et dans les deux cas $x = 1,$ après les différentiations

$$\begin{aligned} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} &= (x+1)^n \frac{d^n(x-1)^n}{dx^n} = 1.2.3\dots n.2^n, \\ \frac{d^{n+i'}(x^2-1)^n}{dx^{n+i'}} &= \frac{(n+i')(n+i'-1)\dots(n+1)}{1.2.3\dots i'} \frac{d^{i'}(x+1)^n}{dx^{i'}} \frac{d^n(x-1)^n}{dx^n} \\ &= 1.2.3\dots n.2^n \frac{(n+i')(n+i'-1)(n+i'-2)\dots(n-i'+1)}{2.4.6\dots 2i'}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant successivement $i' = 1, 2, 3, \dots$ et substituant les résultats dans les formules (7), elles deviennent

$$8) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m} \cos \gamma p \, dp \\ &= (-1)^n 1.2.3\dots(2m) 2^{2m} \left[\frac{\sin \gamma}{\gamma^{2m+1}} + \frac{(2m+1) 2m \cos \gamma}{2 \gamma^{2m+2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2m+2)(2m+1) 2m(2m-1) \sin \gamma}{2.4 \gamma^{2m+3}} - \dots \right], \\ &\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (p^2-1)^{2m+1} \cos \gamma p \, dp \\ &= (-1)^n 1.2.3\dots(2m+1) 2^{2m+1} \left[\frac{\cos \gamma}{\gamma^{2m+2}} - \frac{(2m+2)(2m+1) \sin \gamma}{2 \gamma^{2m+3}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2m+3)(2m+2)(2m+1) 2m \cos \gamma}{2.4 \gamma^{2m+4}} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Si dans les seconds membres de ces équations, on substituait partout

$$\sin(2\gamma - \gamma'), \quad \cos(2\gamma - \gamma'),$$

à $\sin \gamma$ et $\cos \gamma$, en désignant par γ' une constante indéterminée, ils coïncideraient évidemment avec les valeurs des expressions

$$(9) \quad 1.2.3\dots(2m) \frac{d^{2m} \left[\frac{\sin(2\gamma - \gamma')}{\gamma^{2m+1}} \right]}{d\gamma^{2m}}, \quad 1.2.3\dots(2m+1) \frac{d^{2m+1} \left[\frac{\sin(2\gamma - \gamma')}{\gamma^{2m+2}} \right]}{d\gamma^{2m+1}},$$

obtenues en regardant γ' comme constante dans les différentiations

relatives à γ . Mais si l'on fait $\gamma' = \gamma$ après les différentiations, comme

$$\sin(2\gamma - \gamma'), \text{ et } \cos(2\gamma - \gamma'),$$

se réduisent à $\sin \gamma$ et $\cos \gamma$, la substitution d'une de ces valeurs à l'autre sera permise dans cette hypothèse, et les deux formules (8) pourront être réduites à une seule, savoir

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^n \cos \gamma p dp = 1.2.3 \dots n \frac{d^n \left[\frac{\sin(2\gamma - \gamma')}{\gamma^{n+1}} \right]}{d\gamma^n},$$

en posant $\gamma' = \gamma$ après les différentiations.

Comme d'ailleurs on a

$$\frac{d^n \left[\frac{\sin(2\gamma - \gamma')}{\gamma^{n+1}} \right]}{d\gamma^n} = \cos \gamma' \frac{d^n \left(\frac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}} \right)}{d\gamma^n} - \sin \gamma' \frac{d^n \left(\frac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}} \right)}{d\gamma^n},$$

valeur où γ' ne se trouve qu'en dehors des signes de la différentiation, on trouve, en y faisant immédiatement $\gamma' = \gamma$,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^n \cos \gamma p dp = 1.2.3 \dots n \left[\cos \gamma \frac{d^n \left(\frac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}} \right)}{d\gamma^n} - \sin \gamma \frac{d^n \left(\frac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}} \right)}{d\gamma^n} \right].$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$\cos \gamma \frac{d^n \left(\frac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}} \right)}{d\gamma^n} - \sin \gamma \frac{d^n \left(\frac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}} \right)}{d\gamma^n} = f(\gamma, n),$$

les formules (6) deviendront

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos(hlp) \frac{d^{2m}(p^2 - 1)^{2m}}{dp^{2m}} dp &= (-1)^m 1.2.3 \dots (2m) (hl)^{2m} f(hl, 2m), \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sin(hlp) \frac{d^{2m}(p^2 - 1)^{2m}}{dp^{2m}} dp &= 0, \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos(hlp) \frac{d^{2m+1}(p^2 - 1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}} dp &= 0, \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sin(hlp) \frac{d^{2m+1}(p^2 - 1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}} dp &= (-1)^{m+1} 1.2.3 \dots (2m+1) (hl)^{2m+1} f(hl, 2m+1). \end{aligned}$$

Ces valeurs étant substituées dans les formules (5), il en résultera

$$(10) \quad \begin{cases} \cos(hlp) = \sum (-1)^m (4m+1) \left(\frac{hl}{2}\right)^{2m} f(hl, 2m) P_{2m}, \\ \sin(hlp) = \sum (-1)^{m+1} (4m+3) \left(\frac{hl}{2}\right)^{2m+1} f(hl, 2m+1) P_{2m+1}, \end{cases}$$

les sommes $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de m depuis zéro jusqu'à l'infini. Ces séries sont rapidement convergentes, car l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^n \cos \gamma p dp = 1.2.3 \dots n f(\gamma, n),$$

décroissant évidemment quand n augmente, l'expression $f(\gamma, n)$ décroît aussi et même plus rapidement que

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n}.$$

Les équations (10) donnent ensuite

$$(11) \quad e^{hlp\sqrt{-1}} = \sum (-\sqrt{-1})^n (2n+1) \left(\frac{hl}{2}\right)^n f(hl, n) P_n.$$

On trouverait, de même,

$$(12) \quad e^{h'l p\sqrt{-1}} = \sum (-\sqrt{-1})^n (2n+1) \left(\frac{h'l}{2}\right)^n f(h'l, n) P_n.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), et qu'on fasse, en même temps,

$$U_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi M P_n \sin \alpha d\alpha d\epsilon,$$

$$U'_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi M' P_n \sin \alpha d\alpha d\epsilon,$$

on aura

$$(13) \quad \begin{cases} h^2 \frac{dh}{ds} \sum (-\sqrt{-1})^n \left(\frac{hl}{2}\right)^n f(hl, n) U_n \\ = h'^2 \frac{dh'}{ds} \sum (-\sqrt{-1})^n \left(\frac{h'l}{2}\right)^n f(h'l, n) U'_n. \end{cases}$$

D'après les propriétés connues des fonctions de ψ , θ , représentées par U_n , U'_n , on a, pour deux nombres entiers quelconques n' et n , pourvu qu'ils soient différents l'un de l'autre,

$$(14) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_{n'} U_n \sin \psi d\psi d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_{n'} U'_n \sin \psi d\psi d\theta = 0,$$

et pour $n' = n$,

$$(15) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n U_n \sin \psi d\psi d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} V_n, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n U'_n \sin \psi d\psi d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} V'_n, \end{cases}$$

en indiquant par V_n , V'_n ce que deviennent U_n , U'_n quand on y change ψ , θ en α , β ; de sorte qu'en désignant par N ce que devient M par le changement inverse de α , β en ψ , θ , on aura

$$(16) \quad V_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N P_n \sin \psi d\psi d\theta.$$

En outre, M et M' seront données par les développements convergents

$$M = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots,$$

$$M' = V'_0 + V'_1 + V'_2 + V'_3 + \dots$$

Maintenant, l'équation (13) ayant lieu par hypothèse, pour toutes les valeurs de ψ , θ , si on la multiplie par

$$P_m \sin \psi d\psi d\theta,$$

où m est un entier quelconque, et qu'on intègre par rapport à ψ et θ entre les limites

$$\psi = 0, \quad \psi = \pi; \quad \theta = 0, \quad \theta = 2\pi;$$

tous les termes de $\sum$ disparaîtront dans les deux membres, sauf celui où $n=m$. En vertu des équations (14) et (15), on aura donc

$$h^{m+2} \frac{dh}{ds} f(hl, m) V_m = h'^{m+2} \frac{dh'}{ds} f(h'l, m) V'_m.$$

Cette relation donne la valeur de V'_m au moyen de V_m qui se tire de l'équation (16). Il en résulte donc

$$\begin{aligned}
 M' &= V'_0 + V'_1 + V'_2 + \dots \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{dh}{dh'} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N \sum \left\{ (2m+1) \frac{h^{m+2}}{h'^{m+2}} \frac{f(hl, m)}{f(h'l, m)} P_m \right\} \sin \psi d\psi d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{dh}{dh'} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N \sum \left\{ (2m+1) \left(\frac{h'}{h} \right)^{m+1} \frac{\cos hl \frac{d^m \left(\frac{\sin 2hl}{l^{m+1}} \right)}{dl^m} - \sin hl \frac{d^m \left(\frac{\cos 2hl}{l^{m+1}} \right)}{dl^m}}{\cos h'l \frac{d^m \left(\frac{\sin 2h'l}{l^{m+1}} \right)}{dl^m} - \sin h'l \frac{d^m \left(\frac{\cos 2h'l}{l^{m+1}} \right)}{dl^m}} P_m \right\} \sin \psi d\psi d\theta.
 \end{aligned}$$

De la sorte M' se trouve entièrement déterminé en fonction de α, ϵ , puisque N se déduit de la fonction donnée M par un simple changement des lettres α, ϵ en ψ, θ .

