

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TCHEBICHEF

Note sur une classe d'intégrales définies multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 8 (1843), p. 235-238.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8_235_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES DÉFINIES MULTIPLES;

PAR M. TCHEBICHEF.

Théorème. « Quelle que soit la forme de la fonction f , on a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \varphi_1(x) \varphi_2(y) \varphi_3(z) \dots f(x^m + y^n + z^p + \dots) dx dy dz \dots \\ = \int_0^\infty \Phi(u) f(u) du,$$

» équation où $\Phi(u)$ se détermine par les fonctions données $\varphi_1(x)$,
» $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(z)$,... au moyen des quadratures, en prenant

$$(1) \quad \Phi(u^2) = \frac{\psi(u\sqrt{-1}) - \psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi u^2 \sqrt{-1}},$$

» et

$$(2) \quad \psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\int_0^\infty \varphi_1(x) e^{-\frac{\alpha x^m}{u^2}} dx \int_0^\infty \varphi_2(y) e^{-\frac{\alpha y^n}{u^2}} dy \int_0^\infty \varphi_3(z) e^{-\frac{\alpha z^p}{u^2}} dz \dots \right] d\alpha. »$$

Ce théorème suppose que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ sont telles que,
1°. $\psi(u)$ et sa dérivée restent finies pour toutes les valeurs réelles et positives de u , ou pour toutes les valeurs imaginaires de u , dont la partie réelle est une quantité positive;

2°. Que la fonction $\psi(u)$ devient zéro pour

$$u = a \pm z\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad u = z \pm a\sqrt{-1},$$

lorsque $a = \infty$, quelle que soit la valeur de z , pourvu qu'elle soit réelle et positive.

30..

Soient, par exemple,

$$1^o. \quad m = n = p = \dots = 1, \\ \varphi_1(x) = x^{a-1}, \quad \varphi_2(y) = y^{b-1}, \quad \varphi_3(z) = z^{c-1}, \dots;$$

dans ce cas, pour trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots f(x+y+z+\dots) dx dy dz \dots,$$

on a d'abord par l'équation (2),

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\int_0^\infty x^{a-1} e^{-\frac{\alpha x}{u}} dx \int_0^\infty y^{b-1} e^{-\frac{\alpha y}{u}} dy \int_0^\infty z^{c-1} e^{-\frac{\alpha z}{u}} dz \dots \right] d\alpha, \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^a \Gamma(a) \left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^b \Gamma(b) \left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^c \Gamma(c) \dots \right] d\alpha \\ &= \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c) \dots u^{2(a+b+c+\dots)} \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{-(a+b+c+\dots)} d\alpha \\ &= \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c) \dots \Gamma(1-a-b-c-\dots) u^{2(a+b+c+\dots)}, \end{aligned}$$

et en substituant cette valeur de $\psi(u)$ dans l'équation (1), on trouve

$$\begin{aligned} \Phi(u^2) &= \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c) \dots \Gamma(1-a-b-c-\dots) \frac{(\sqrt{-1})^{2(a+b+c+\dots)} (-\sqrt{-1})^{2(a+b+c+\dots)}}{2\pi \sqrt{-1}} u^{2(a+b+c+\dots-1)} \\ &= \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c) \dots \Gamma(1-a-b-c-\dots) \frac{\sin \frac{\pi}{2} (a+b+c+\dots)}{\pi} u^{2(a+b+c+\dots-1)}. \end{aligned}$$

Cette équation donne

$$\Phi(u) = \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c) \dots \Gamma(1-a-b-c-\dots) \frac{\sin \frac{\pi}{2} (a+b+c+\dots)}{\pi} u^{a+b+c+\dots-1}.$$

Mais, d'après une propriété connue de la fonction Γ , on a

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} (a+b+c+\dots)}{\pi} \Gamma(1-a-b-c-\dots) = \frac{1}{\Gamma(a+b+c+\dots)};$$

donc l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots f(x+y+z+\dots) dx dy dz \dots \\ = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\dots}{\Gamma(a+b+c+\dots)} \int_0^\infty u^{a+b+c+\dots-1} f(u) du, \end{aligned}$$

ce qui a déjà été démontré par M. Liouville.

2°. Soient

$$m = n = p = \dots = 2,$$

$$\varphi_1(x) = \cos ax, \quad \varphi_2(y) = \cos by, \quad \varphi_3(z) = \cos cz, \dots,$$

on aura, pour trouver l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \cos ax \cos by \cos cz \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) dx dy dz \dots,$$

d'abord

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\int_0^\infty \cos ax e^{-\frac{\alpha x^2}{u^2}} dx \int_0^\infty \cos by e^{-\frac{\alpha y^2}{u^2}} dy \int_0^\infty \cos cz e^{-\frac{\alpha z^2}{u^2}} dz \dots \right] d\alpha \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u e^{-\frac{a^2 u^2}{4\alpha}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u e^{-\frac{b^2 u^2}{4\alpha}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u e^{-\frac{c^2 u^2}{4\alpha}} \times \dots \right] d\alpha \\ &= u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha - \frac{\rho u^2}{4\alpha}}}{\alpha^{\frac{\mu}{2}}} d\alpha, \end{aligned}$$

où μ désigne le nombre des variables $x, y, z, \dots$, et $\rho = a^2 + b^2 + c^2 + \dots$.
Mais on sait que, pour un nombre impair μ , on a

$$\begin{aligned} u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha - \frac{\rho u^2}{4\alpha}}}{\alpha^{\frac{\mu}{2}}} d\alpha &= u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{\left(d \cdot \rho \frac{u^2}{4}\right)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{e^{-u\sqrt{\rho}}}{1} \\ &= u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu+1}{2}}}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}} \left(\frac{4}{u^2}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{e^{-u\sqrt{\rho}}}{1}; \end{aligned}$$

donc

$$\psi(u) = \frac{1}{(-1)^{\mu-1}} \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2} u \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{(dp)^{\frac{\mu-1}{2}}} e^{-u\sqrt{p}},$$

et

$$\Phi(u^2) = \frac{\psi(\sqrt{-1}) - \psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi u^2 \sqrt{-1}} = \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{(dp)^{\frac{\mu-1}{2}}} \cos u\sqrt{p} \frac{1}{\sqrt{u}};$$

d'où

$$\Phi(u) = \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{(dp)^{\frac{\mu-1}{2}}} \cos \sqrt{up} \frac{1}{\sqrt{u}};$$

donc, pour un nombre impair des variables $x, y, z, \dots$, l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \cos ax \cos by \cos cz \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) dx dy dz \dots \\ &= \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \int_0^\infty \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}}{(dp)^{\frac{\mu-1}{2}}} \cos \sqrt{up} f(u) du, \end{aligned}$$

ce qui est le théorème de M. Cauchy (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, XIX^e cahier), d'où il déduit, comme cas particulier, la formule de Poisson.