

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Problème de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 7 (1842), p. 65-69.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__65_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. PUISEUX,

Ancien Élève de l'École normale.

PROBLÈME. *Trouver la courbe dont la courbure et la torsion sont constantes.*

Prenons pour variable indépendante l'arc s de la courbe qui aboutit au point dont les coordonnées, rapportées à trois axes rectangulaires, sont x, y, z : on sait que le rayon de courbure en ce point est donné par la formule

$$(1) \quad \rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

D'un autre côté les deux plans osculateurs qui répondent aux valeurs s et $s + ds$ de la variable indépendante comprennent entre eux un angle infiniment petit $d\theta$, et si l'on fait

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\omega},$$

on a

$$\omega = \frac{ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)}{A d^3x + B d^3y + C d^3z},$$

en posant, pour abréger,

$$A = dyd^2z - dzd^2y, \quad B = dzd^2x - dxd^2z, \quad C = dxd^2y - dyd^2x.$$

En ayant égard à l'équation (1), on peut mettre cette valeur de ω

sous la forme suivante :

$$(2) \quad \omega = \frac{ds^6}{\rho^2 (A d^3 x + B d^3 y + C d^3 z)}.$$

Le problème à résoudre consiste à intégrer les équations (1) et (2), dans lesquelles ρ et ω sont des constantes, et auxquelles il faut joindre la relation

$$(3) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

En différentiant cette dernière équation, nous trouvons, à cause de $d^2 s = 0$,

$$(4) \quad dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z = 0.$$

De l'équation (1) nous tirons

$$d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 = \frac{1}{\rho^2} ds^4,$$

et en différentiant,

$$(5) \quad d^2 x d^3 x + d^2 y d^3 y + d^2 z d^3 z = 0.$$

L'équation (2) nous donne ensuite

$$A d^3 x + B d^3 y + C d^3 z = \frac{1}{\omega \rho^2} ds^6 :$$

différentions et remarquons que l'on a identiquement

$$dA d^3 x + dB d^3 y + dC d^3 z = 0;$$

il vient

$$A d^4 x + B d^4 y + C d^4 z = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(6) \quad A_1 dx + B_1 dy + C_1 dz = 0,$$

en faisant

$$A_1 = d^2 y d^4 z - d^2 z d^4 y, \quad B_1 = d^2 z d^4 x - d^2 x d^4 z, \quad C_1 = d^2 x d^4 y - d^2 y d^4 x.$$

Si maintenant nous différencions deux fois de suite l'équation (4), nous trouverons, en ayant égard à l'équation (5),

$$dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z = 0,$$

et de cette dernière, jointe à l'équation (4), nous conclurons facilement

$$\frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{B_1} = \frac{dz}{C_1}.$$

Nous pouvons donc, dans l'équation (6), remplacer dx , dy , dz par les quantités proportionnelles A_1 , B_1 , C_1 : il nous vient de cette façon

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 0,$$

et par conséquent

$$(7) \quad A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Les expressions désignées par A_1 , B_1 , C_1 étant des différentielles exactes, on peut intégrer immédiatement les équations (7); on trouve ainsi

$$(8) \quad \begin{cases} d^2 y d^3 z - d^2 z d^3 y = f ds^5, \\ d^2 z d^3 x - d^2 x d^3 z = g ds^5, \\ d^2 x d^3 y - d^2 y d^3 x = h ds^5, \end{cases}$$

f , g , h désignant trois constantes arbitraires.

Si maintenant nous ajoutons les trois équations (8), après les avoir multipliées respectivement par $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$, il nous viendra, en divisant par ds^5 ,

$$f d^2 x + g d^2 y + h d^2 z = 0,$$

et en intégrant, et nommant k une constante,

$$(9) \quad f dx + g dy + h dz = k ds.$$

Faisons

$$\frac{f}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{g}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}} = \cos \beta, \\ \frac{h}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}} = \cos \gamma,$$

et l'équation (9) pourra s'écrire

$$(10) \quad \frac{dx}{ds} \cos \alpha + \frac{dy}{ds} \cos \epsilon + \frac{dz}{ds} \cos \gamma = \frac{k}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}}.$$

Sous cette forme elle exprime que toutes les tangentes à la courbe cherchée font des angles égaux avec une même droite, et cette droite est celle qui fait avec les axes des coordonnées les angles α , ϵ , γ .

Pour simplifier, nous pouvons prendre maintenant l'axe des z parallèle à cette droite : nous aurons alors

$$\frac{dz}{ds} = \frac{k}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}} = \cos \epsilon,$$

en nommant ϵ l'angle constant que font avec cet axe les tangentes à la courbe cherchée.

De cette équation nous tirons $d^2z = 0$, ce qui montre que l'on peut prendre z pour variable indépendante, et $ds = \frac{dz}{\cos \epsilon}$. Substituons cette valeur dans l'équation (3); elle devient

$$dx^2 + dy^2 = dz^2 \tan^2 \epsilon,$$

d'où l'on tire

$$dy = \sqrt{dz^2 \tan^2 \epsilon - dx^2},$$

et en différentiant,

$$d^2y = - \frac{dx d^2x}{\sqrt{dz^2 \tan^2 \epsilon - dx^2}}.$$

Portons dans l'équation (1) les valeurs de ds , d^2z et d^2y ; elle devient, après les réductions,

$$\rho^2 d^2x^2 \sin^2 \epsilon \cos^2 \epsilon = dz^4 \tan^2 \epsilon - dx^2 dz^2 :$$

on en tire

$$dz = \frac{\rho \sin \epsilon \cos \epsilon \frac{d^2x}{dz}}{\sqrt{\tan^2 \epsilon - \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}},$$

et en intégrant et nommant c une constante ,

$$z - c = \pm \rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon. \operatorname{arc} \sin \frac{dx}{dz \operatorname{tang} \varepsilon}.$$

On tire de cette équation

$$dx = \pm dz \operatorname{tang} \varepsilon \sin \frac{z - c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

et par conséquent

$$(11) \quad x - a = \pm \rho \sin^2 \varepsilon \cos \frac{z - c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

a étant une constante.

D'un autre côté l'équation

$$dy = \sqrt{dz^2 \operatorname{tang}^2 \varepsilon - dx^2}$$

devient

$$dy = \pm dz \operatorname{tang} \varepsilon \cos \frac{z - c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

et il en résulte, b désignant une nouvelle constante ,

$$(12) \quad y - b = \pm \rho \sin^2 \varepsilon \sin \frac{z - c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon}.$$

Les équations (11) et (12), d'où l'on déduit encore celle-ci

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2 \sin^4 \varepsilon,$$

appartiennent à une hélice tracée sur un cylindre droit dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z , et dont le rayon est $\rho \sin^2 \varepsilon$.

Ainsi l'hélice est la seule courbe dont la courbure et la torsion soient constantes.

