JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F.-E. NEUMANN

Recherche théorique des lois d'après lesquelles la lumière est réfléchie et réfractée à la limite commune de deux milieux complètement transparents

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 369-510.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__369_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

RECHERCHE THÉORIQUE

DES LOIS D'APRÈS LESQUELLES LA LUMIÈRE EST RÉFLÉCHIE ET RÉFRACTÉE

A LA LIMITE COMMUNE DE DEUX MILIEUX COMPLÉTEMENT TRANSPARENTS ;

PAR M. F.-E. NEUMANN [*].

(Traduction de M. CABART.)

La théorie de la réflexion et de la réfraction comprend deux questions bien distinctes : la question de direction, la question d'intensité. Elle s'est en conséquence partagée en deux parties, dont l'une a atteint une haute perfection par les travaux de Newton, de Laplace, d'Huyghens et de Fresnel. Dans la plupart des cas, la théorie newtonienne a donné les lois que suivent les directions des rayons après leur réflexion ou leur réfraction. La doctrine des ondulations a appliqué ses principes à tous les faits que l'observation a jusqu'ici rencontrés ; elle ne serait amenée à les modifier que s'il existait des milieux dans lesquels les mouvements lumineux se transmettraient d'après des lois nouvelles et encore inobservées, circonstance qui ne paraît pas vraisemblable.

Quant à la seconde partie, celle qui recherche les intensités des rayons réfléchis et réfractés, elle est d'une origine bien plus récente. Avant Lambert, on ne s'en était pas pas occupé, et l'étude expérimentale des phénomènes qu'elle présente avait paru, dit ce géomètre, si difficile, qu'aucun physicien n'avait osé l'aborder. Les essais que Lambert lui-même publia sur ce sujet, dans sa Photométrie, ne pouvaient guère avancer une question dont la clef manquait encore : je veux parler de la découverte de la polarisation par réflexion. La science avait à s'enrichir en outre de la découverte de MM. Arago et Fresnel relative à l'interférence de deux rayons polarisés, avant que Fresnel pût attaquer le problème jusque-là inabordable des intensités de la lumière ; ses efforts luttèrent heureusement contre les obstacles, et les résultats qu'ils obtinrent ne sont pas le témoignage le moins éclatant du talent ingénieux et élevé de celui qui fonda pour l'optique une ère nouvelle.

Fresnel résolut le problème de l'intensité de la lumière après sa réflexion et sa réfraction à la surface d'un milieu transparent non cristallisé. Comme conséquences de la solution à laquelle il parvint, se développèrent à lui les déterminations théoriques d'une grande classe de phénomènes qui avaient depuis longtemps excité l'attention

[*] Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 7 décembre 1835.

des physiciens, et qui étaient en partie expérimentalement appréciés, sans que rien eût fait entrevoir le lien qui les unissait. A cette classe de phénomènes se rattachaient la polarisation complète par réflexion sous l'angle de polarisation, la polarisation partielle par réflexion sous des angles quelconques et son accroissement par des réflexions répétées, la polarisation partielle par réfraction et son accroissement par des réfractions successives, la rotation du plan de polarisation quand la lumière incidente est polarisée, etc.

Le point le plus remarquable des travaux de Fresnel est sans contredit l'heureuse interprétation de ses formules pour le cas de la réflexion totale, interprétation qui le mena à la découverte des lois d'une classe de phénomènes qui étaient encore pour bien longtemps abandonnés aux tâtonnements de l'expérience, des lois d'après lesquelles la lumière réfléchie se polarise circulairement ou elliptiquement.

Lorsque les travaux de Fresnel furent publiés, le cercle des expériences avait déjà dépassé les limites que ce grand physicien avait atteintes dans sa théorie de la réfraction et de la réflexion; depuis lors il a continué à s'étendre. Seebeck a poursuivi avec succès les recherches commencées par Brewster sur l'influence des surfaces cristallines sur la lumière réfléchie. Brewster a fait connaître plus exactement une classe de phénomènes qui dépendent de l'action des surfaces métalliques sur la lumière polarisée, phénomènes qui ont une liaison intime avec les faits observés par M. Arago, et plus tard étendus par les observations de Nobili et d'Airy. Ces modifications qu'exercent les surfaces métalliques sur la lumière réfléchie se rattacheraient, d'après la remarque d'Airy touchant la réflexion de la lumière à la surface du diamant, aux propriétés que présente la lumière réfléchie à la surface des corps transparents.

J'ai déduit des observations de Brewster (*Pogg. Ann.*, Bd. XXVI) la loi mathématique de ces phénomènes; mais on ne peut pas en espérer une théorie rigoureuse avant qu'on soit arrivé à une définition optique exacte de la transparence des corps et des causes qui la modifient à des degrés si différents : ce qui, nonobstant les travaux préparatoires sur l'absorption de la lumière, notamment ceux d'Herschel et de Brewster, semble devoir manquer encore longtemps.

De l'autre côté, la voie se présente tout ouverte, et l'on peut espérer compléter la théorie de Fresnel en l'étendant aux cas où la réflexion et la réfraction sont produites par des corps transparents cristallisés. Dans cette vue un essai a déjà été tenté. Seebeck a cherché à déduire, pour des angles observés par lui, la loi de la polarisation complète par la réflexion à la surface des cristaux. Il s'est appuyé sur des principes théoriques semblables à ceux que Fresnel avait adoptés comme base de ses travaux. Cette extension des formules de Fresnel souffre néanmoins encore quelques difficultés, et ne s'applique pas à l'explication de tous les phénomènes jusqu'ici connus.

Les questions posées par le progrès des recherches expérimentales sont à peu près les suivantes :

La loi générale de l'angle de polarisation, quelle que soit la position de la surface réfléchissante par rapport aux axes optiques, et dans quelque azimut qu'ait lieu la réflexion ;

La loi pour la rotation du plan de polarisation dans le rayon réfléchi, rotation qui résulte de la réflexion par les corps cristallisés quand le rayon incident est polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan de réflexion;

La loi pour la déviation du plan de polarisation quand la lumière naturelle est réfléchie sous l'angle de polarisation ;

La loi d'après laquelle la lumière réfractée se divise en deux rayons, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire: cette loi doit faire connaître à la fois la position du plan de polarisation de la lumière incidente pour laquelle l'un ou l'autre des rayons disparaît;

La loi d'après laquelle, à la réflexion intérieure dans un cristal, un faisceau de lumière produit deux faisceaux réfléchis et un faisceau réfracté. La connaissance des deux dernières lois rendra possible une théorie des couleurs que présentent les cristaux à la lumière polarisée.

On voit que le nombre des phénomènes et des faits qui attendent leur explication du développement de la théorie de la réflexion et de la réfraction est assez grand pour rendre ce développement désirable. Tel est le but spécial de ce Mémoire; il aura encore pour objet d'expliquer tous les phénomènes de lumière qui dépendent de la différence des vitesses de propagation des ondes lumineuses.

Quand on examine avec soin toutes les circonstances qui rapprochent la réflexion par des corps transparents non cristallisés de la réflexion produite par des milieux cristallins, on ne peut douter qu'une même théorie puisse les comprendre toutes deux; car on ne voit pas entre elles de ces différences caractéristiques qui séparent la réflexion sur les corps transparents de la réflexion sur les métaux. S'il en est ainsi, les principes sur lesquels on s'appuie pour calculer l'intensité de la lumière réfléchie et l'intensité de la lumière réfractée à la surface des milieux non cristallisés doivent se prêter à une généralisation qui leur permette de s'adapter avec la même rigueur à la théorie des quantités de lumière réfléchies et réfractées par les surfaces transparentes cristallisées. Les principes admis par Fresnel ne sont pas susceptibles d'une pareille généralisation, car ils supposent que dans tous les milieux cristallisés l'éther possède une égale élasticité. Les doutes que j'avais conçus autrefois sur l'exactitude de ces principes se sont encore fortifiés par cette circonstance. Ils m'étaient venus à l'occasion de la définition du plan de polarisation que Fresnel définit : le plan conduit par la direction du rayon perpendiculairement à la direction du mouvement des molécules éthérées. Cette définition est le fondement sur lequel il a appuyé sa théorie des intensités réfléchies et réfractées. Mais la théorie de la double réfraction (*Pogg. Ann.*, Bd. XXV), que j'ai déduite d'une manière rationnelle des principes sur lesquels Fresnel fondait la sienne, conduit à une définition tout autre du plan de polarisation. Ce plan serait celui qui passe par la direction du rayon, et par la direction du mouvement vibratoire.

La théorie que je vais développer dans les pages suivantes sera fondée sur des principes d'une généralité telle, qu'ils sont non-seulement applicables aux corps transparents non cristallisés, mais encore aux milieux cristallisés à un axe ou à deux axes, et même à des milieux dont l'action sur la lumière serait d'une nature toute nouvelle et encore inconnue. La même théorie comprendra comme corollaire la définition du plan de polarisation qu'exige la théorie de la double réfraction.

§ Ier.

Avant d'exposer les principes sur lesquels je m'appuie, je présenterai sommairement les résultats du travail de Fresnel sur les intensités des rayons réfléchis et réfractés à la surface des corps transparents non cristallisés. Ces résultats ont reçu la sanction d'expériences exactes, et peuvent ainsi servir à confirmer la justesse des vues théoriques qui m'ont conduit, malgré le désaccord entre ces vues et les principes qui les ont d'abord produits.

Représentons-nous un faisceau de lumière, polarisée dans un azimut quelconque, tombant à la surface d'un milieu transparent. Soient S^2 l'intensité de la composante de ce faisceau suivant le plan d'incidence, P^2 l'intensité de la composante perpendiculaire à ce plan. Décomposons pareillement la lumière réfléchie (R^2) en deux parties R_s^2, R_p^2, et la lumière réfractée (T^2) en deux parties T_s^2, T_p^2. R_s^2, T_s^2 sont polarisées suivant le plan d'incidence; R_p^2, T_p^2 perpendiculairement au même plan. Ces composantes satisfont aux égalités

$$R^2 = R_s^2 + R_p^2, \qquad T^2 = T_s^2 + T_p^2,$$

et, en appelant 1 l'intensité de la lumière incidente,

$$S^2 + P^2 = 1.$$

Les formules principales de la théorie de Fresnel sont les suivantes :

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (1) & R_s^2 = \left[\dfrac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}\right]^2 S^2, \\ (2) & R_p^2 = \left[\dfrac{\tang(\varphi - \varphi')}{\tang(\varphi + \varphi')}\right]^2 P^2, \\ (3) & T_s^2 = \dfrac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi + \varphi')} S^2, \\ (4) & T_p^2 = \dfrac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi + \varphi') \cos^2(\varphi - \varphi')} P^2. \end{array} \right.$$

φ désigne l'angle d'incidence, φ' l'angle de réfraction.

On a vérifié la justesse de ces expressions de plusieurs manières.

1. Par des expériences très-précises sur l'angle de polarisation, Seebeck a mis hors de doute la loi de Brewster, qui elle-même est une conséquence de la formule (2). En posant $R_p = 0$, on déduit $\tang \varphi = n$, n étant l'indice de réfraction de la substance.

2. De très-nombreuses expériences sur la rotation du plan de polarisation par réflexion ont été faites par Fresnel (*Pogg. Ann.*, Bd. XXII), et surtout par Brewster

(*Pogg. Ann.*, Bd. XIX). La tangente de l'azimut du plan de polarisation dévié par réflexion est

$$\frac{R_p}{R_s} = \frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\frac{P}{S};$$

$\frac{P}{S}$ désigne la tangente de l'azimut du plan de polarisation du rayon incident.

3. Brewster a fait pareillement des observations sur l'azimut du plan de polarisation dans le rayon réfracté (*Pogg. Ann.*, Bd. XIX).

Elles ont donné pour cet azimut

$$\frac{T_p}{T_s} = \frac{1}{\cos(\varphi-\varphi')}\frac{P}{S}.$$

4. M. Arago a fait deux observations directes sur l'intensité de la lumière réfléchie non polarisée. Elles sont relatives aux angles d'incidence pour lesquels la réflexion donne le *tiers* et le *quart* de la lumière incidente.

Dans le cas de la lumière non polarisée, quand

$$S^2 + P^2 = 1,$$

on doit poser

$$S^2 = P^2 = \tfrac{1}{2},$$

et l'intensité que présente la lumière naturelle réfléchie est

$$R_s^2 + R_p^2 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(\varphi-\varphi')}{\sin^2(\varphi+\varphi')} + \frac{\operatorname{tang}^2(\varphi-\varphi')}{\operatorname{tang}^2(\varphi+\varphi')}\right].$$

Toutes ces observations s'accordent si complétement avec les formules ci-dessus rapportées, qu'on ne peut douter que ces formules n'en expriment les véritables lois, autant du moins que la conception d'un milieu transparent peut se trouver réalisée dans la nature.

On doit surtout attacher une grande importance aux observations de Fresnel et de Brewster, citées nos **2** et **3**, non pas tant à cause de leur étendue, qu'à cause de la preuve directe qu'elles apportent de l'exactitude des formules (A). Chacune de ces séries d'observations vérifie seulement, il est vrai, l'exactitude des rapports $\frac{R_s}{R_p}$, $\frac{T_s}{T_p}$; mais, prises ensemble, elles prouvent l'exactitude des valeurs absolues R_s, R_p, T_s, T_p.

L'observation a donné les angles que les plans de polarisation de la lumière réfléchie et de la lumière réfractée font avec le plan d'incidence. On peut déduire de leurs valeurs l'intensité de la lumière réfléchie aussi bien que celle de la lumière réfractée pour le cas où le rayon incident déjà polarisé tombe à la surface d'un milieu transparent non cristallisé. L'hypothèse d'un corps transparent non cristallisé donne, en effet,

$$T_s^2 = S^2 - R_s^2, \quad \text{et} \quad T_p^2 = P^2 - R_p^2,$$

d'où l'on tire, en désignant par α et β les azimuts observés des plans de polarisation du rayon réfléchi et du rayon réfracté,

$$\frac{R_p}{R_s} = \text{tang}\,\alpha, \quad \frac{P^2 - R_p^2}{S^2 - R_s^2} = \text{tang}^2\,\beta.$$

R_p^2, R_s^2 seront par-là déterminés.

Une théorie de la réflexion et de la réfraction qui ne donne pas pour les intensités des rayons lumineux les valeurs que les hypothèses rationnelles de Fresnel ont fournies en (A) doit être abandonnée; mais une théorie qui se résume dans les mêmes formules doit être regardée comme déjà confirmée.

§ II.

Les hypothèses que j'adopte et sur lesquelles je fonde la nouvelle théorie sont les suivantes.

1. La différence des vitesses de propagation de la lumière dans différents milieux, ou la réfraction de la lumière, résulte uniquement d'une inégale élasticité de l'éther dans ces milieux; la densité de l'éther est dans tous la même. Dans la théorie de Fresnel, il est essentiel d'admettre dans tous les milieux transparents non cristallisés une élasticité uniforme, et de faire dépendre la réfringence d'une densité variable. Une de ces deux suppositions est indispensable; on ne peut supposer (le principe posé n° 3 de ce paragraphe le fera clairement comprendre) que l'élasticité et la densité varient ensemble, si, comme l'observation paraît l'apprendre, les phénomènes de la réflexion et de la réfraction dans les corps transparents ne sont dépendants que de l'indice de réfraction de ces milieux. Mais on doit se décider pour l'une ou pour l'autre, et l'incertitude me semble difficile. On peut bien, dans les milieux cristallisés, se figurer une élasticité variable suivant les directions, mais une densité variable?... Ces principes ne regardent, au reste, que les milieux à transparence parfaite; rien ne nous dit que, dans les métaux et les autres corps à transparence incomplète, la variation de densité n'accompagne pas la variation d'élasticité.

2. La lumière incidente résulte de vibrations transversales : ce sont des vibrations de la même espèce qui produisent la réflexion et la réfraction.

3. La direction de ces mouvements vibratoires est partout, dans les milieux cristallisés comme dans les autres, comprise dans le plan de l'onde.

Ces deux hypothèses sont empruntées à la théorie de Fresnel. La première sert de base à sa théorie, si souvent citée, des intensités de la lumière; la seconde se déduit comme un résultat de sa théorie de la double réfraction. D'après la théorie de la double réfraction que j'ai donnée, les molécules oscilleraient suivant une direction légèrement inclinée à la surface de l'onde.

4. Le plan de polarisation d'une onde est déterminé par la normale à cette onde et

par la direction de son mouvement. Cette définition, contraire à la définition de Fresnel, est une conséquence forcée de mes recherches sur la double réfraction. (*Pogg. Ann.*, Bd. XXV.)

J'appelle plan de polarisation d'un rayon le plan conduit par ce rayon et par la direction du mouvement de ses éléments. Je prouverai plus tard que le rayon est toujours perpendiculaire à la direction du mouvement de ses molécules.

3. Touchant la réflexion et la réfraction à la surface des corps complétement transparents, je m'appuie sur les considérations qui suivent.

A. Soit AB, *fig.* 1re, une onde incidente à la limite commune GG de deux milieux transparents que, pour plus de généralité, je prendrai cristallisés; BC représentant l'onde réfractée, BD l'onde réfléchie. Ces trois plans d'ondes coupent le plan réfringent GG suivant la même droite. Chacune de ces trois ondes AB, BC, BD se propage parallèlement à elle-même avec une vitesse propre qui dépend de la direction de son plan de polarisation, et de sa position par rapport à l'axe optique. J'indique par des lignes ponctuées une quelconque des positions que prennent ces plans dans leur mouvement de progression; *ils sont liés entre eux de manière à atteindre en même temps le point* B'. Cette condition détermine la position relative des trois plans de ce système. En effet, soient l'angle d'incidence du plan d'ondes ABG $= i$, l'angle de réflexion DBG $= r$ et l'angle de réfraction CBG $= s$, les vitesses de propagation respectives n, m et u; la condition que le point B, quel que soit le plan d'ondes auquel il appartienne, se meuve avec une vitesse identique, est exprimée par les deux équations

$$\frac{1}{n}\sin i = \frac{1}{m}\sin r, \quad \frac{1}{n}\sin i = \frac{1}{u}\sin s.$$

Les quantités n, m et u dépendent des positions des plans d'onde auxquels elles conviennent, et sont par conséquent, pour des plans de réfringence et d'incidence déterminés, des fonctions connues des angles i, r et s qui fixent la position des plans d'onde. De ces deux équations, une donne l'angle r, l'autre l'angle s. En y mettant à la place de n, m et u les valeurs données par Fresnel en fonction des angles i, r, s, chacune d'elles conduit à une équation du 4e degré. Nous verrons que la première a deux racines négatives par le moyen desquelles on déterminera deux plans d'ondes réfléchies; la seconde, deux racines positives qui correspondront au système des deux ondes réfractées.

B. Toutes les molécules des mêmes ondes ont le même mouvement, tant en vitesse qu'en direction; cette uniformité dans l'intérieur de chaque onde s'étend jusqu'à la ligne d'intersection des différents plans en B. Le mouvement des molécules en B est la somme des mouvements qui leur sont communiqués par les ondes du premier milieu, l'onde incidente, l'onde réfléchie, ou la somme des mouvements produits par les ondes du second milieu, les ondes réfractées. Ces deux sommes sont égales. *Les composantes du mouvement imprimé aux molécules en* B *par l'onde incidente et l'onde réfléchie sont égales aux composantes du mouvement imprimé aux mêmes molécules par les ondes ré-*

fractées. Fresnel admettait seulement l'égalité des deux composantes parallèles au plan de réfringence. L'hypothèse que je fais s'appuie sur la considération suivante.

Quand, à l'aide des équations de la Mécanique, on veut résoudre rigoureusement le problème de la réflexion et de réfraction des ondes lumineuses à la surface de séparation de deux milieux transparents, on est forcé de poser les deux conditions suivantes, qui déterminent l'état de la limite commune des deux milieux : 1° que, suivant cette surface, ces deux milieux sont intimement unis; 2° que la pression produite par le mouvement des molécules en B dans l'un d'eux est égale à la pression produite par le même déplacement dans l'autre. Ces deux principes servent à établir six équations de condition au moyen desquelles on détermine les fonctions arbitraires comprises dans l'intégrale générale. La première de ces deux conditions, que les deux milieux sont solidaires à leur limite commune, combinée avec l'hypothèse d'un mouvement commun à toutes les molécules d'un même plan d'onde, est exactement la supposition que j'ai faite; car de l'égalité des vitesses des molécules en B suit l'égalité de leurs déplacements.

6. La force vive que possède l'onde incidente est égale à la somme des forces vives de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée.

Fresnel avait déjà fait usage du même principe, et j'avoue que, du côté théorique, ce principe peut être contesté; car on ne comprend pas comment une partie de la force vive de l'onde incidente n'est pas dépensée à produire des ondes à vibrations longitudinales dont l'effet optique est nul : une partie de la lumière devrait donc toujours disparaître, puisque son intensité est mesurée par la force vive des ondes à vibrations transversales, et qu'il n'existe, à proprement parler, aucun corps complétement transparent. Ce principe ne peut donc être adopté qu'à la suite des expériences qui prouvent qu'il y a effectivement des corps pour lesquels l'intensité de la lumière incidente est égale à la somme des intensités que possèdent la lumière réfléchie et la lumière réfractée.

§ III.

Je vais appliquer, dans ce paragraphe, les principes que je viens de développer au cas où le milieu réfléchissant et réfringent n'est pas cristallisé. La lumière incidente peut être polarisée ou ne pas l'être, mais on peut toujours la supposer décomposée en deux parties, l'une qui est polarisée suivant le plan d'incidence, l'autre qui s'est polarisée perpendiculairement au même plan. La première produit une onde réfléchie et une onde réfractée qui sont encore polarisées suivant le plan d'incidence; la seconde donne à la réflexion comme à la réfraction, des ondes polarisées perpendiculairement au plan d'incidence. Ces deux portions de lumière peuvent être considérées séparément. Je m'occuperai d'abord de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence. Soient AB, *fig.* 2, une onde plane incidente, polarisée perpendiculairement au plan d'incidence; FB l'onde réfléchie, BD l'onde réfractée : dans ces trois ondes le mouvement s'opère parallèlement au plan réfringent. Les vitesses de mouvement seront respectivement, dans l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde réfractée, désignées par P, R_p, D_p. On a alors, par le principe de l'égalité des composantes, § II, n° 5, B,

$$P + R_p = D_p. \tag{1}$$

L'équation de la conservation des forces vives fournira une seconde relation pour déterminer R_p et D_p. A cause de l'égalité de densité, § II, n° 1, on peut, dans l'équation des forces vives, prendre les produits des vitesses au carré par les rapports des espaces qu'ébranlent les mouvements d'une même ondulation dans les trois ondes. Les rapports de ces trois espaces sont, si l'on désigne par d et d' les longueurs d'ondulation dans le milieu où se meut l'onde incidente et dans le milieu où elle se réfracte,

$$AC \times d : BF \times d : BD \times d'.$$

Mais AC = BF, et, si l'on désigne par φ l'angle d'incidence CAB, et par φ' l'angle de réfraction ABD, on a

$$AC : BD = \cos\varphi : \cos\varphi'.$$

D'ailleurs

$$d : d' :: \sin\varphi : \sin\varphi';$$

donc, pour les rapports des trois espaces, il vient

$$\sin\varphi\cos\varphi : \sin\varphi\cos\varphi : \sin\varphi'\cos\varphi' :: 1 : 1 : \frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

L'équation donnée par le principe de la conservation des forces vives est donc

$$P^2 = R_p^2 + D_p^2\,\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}. \tag{2}$$

Si l'on fait passer R_p^2 dans le premier membre, et si l'on divise cette équation par (1), on obtient

$$P - R_p = D_p\,\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation, réunie à l'équation (1), nous donne

$$R_p = P\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi'\cos\varphi'} = P\,\frac{\operatorname{tang}(\varphi-\varphi')}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')},$$

$$D_p = \frac{2P\sin\varphi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}.$$

Si l'on désigne par P^2 l'intensité de la lumière incidente, R_p^2 sera l'intensité de la lumière réfléchie, et $D_p^2\,\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}$ l'intensité de la lumière réfractée; on aura donc, en posant $D_p^2\,\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi} = T_p^2$,

$$\left\{\begin{aligned} R_p^2 &= P^2\,\frac{\operatorname{tang}^2(\varphi-\varphi')}{\operatorname{tang}^2(\varphi+\varphi')},\\ T_p^2 &= P^2\,\frac{\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos^2(\varphi-\varphi')}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ce sont les formules que j'ai rappelées au § I^er (A), et dont la justesse a été démontrée.

Soit l'onde incidente AC polarisée parallèlement au plan d'incidence. Le mouvement de cette onde, aussi bien que les mouvements de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée, se feront parallèlement au plan d'incidence. Les vitesses de ces mouvements dans l'onde incidente, dans l'onde réfléchie et dans l'onde réfractée, seront respectivement S, R_s, D_s. La conservation des forces vives donne l'équation

$$(4) \qquad S^2 = R_s^2 + D_s^2 \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

Si l'on imagine les mouvements S, R_s, D_s, décomposés suivant des directions parallèle et perpendiculaire au plan de réfringence, on déduit du principe de l'égalité des composantes les deux équations qui suivent :

$$(5) \qquad \begin{cases} S \sin\varphi + R_s \sin\varphi = D_s \sin\varphi', \\ S \cos\varphi - R_s \cos\varphi = D_s \cos\varphi'. \end{cases}$$

Nous avons ainsi trois équations et seulement deux inconnues R_s et D_s ; mais on voit facilement que la troisième équation est une conséquence des deux autres, et qu'elle n'exprime rien de contradictoire. On doit être porté à voir, dans cette circonstance, une confirmation des considérations développées au § II, savoir, qu'une transparence complète ne peut exister sans une densité uniforme dans les deux milieux vibrants, car l'équation de la conservation des forces vives serait tout autre si la densité changeait.

Des équations (5) on tire

$$R_s = - S \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}, \quad D_s = 2S \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')},$$

et si l'on désigne encore $D_s^2 \dfrac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\sin\varphi \cos\varphi}$ par T_s^2,

$$R_r^2 = - S \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}, \quad T_r^2 = S^2 \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi + \varphi')},$$

valeurs qui sont identiques avec celles que j'ai citées au § I^er (A).

La nouvelle théorie donne donc les valeurs vraies des intensités que possèdent la lumière réfléchie et la lumière réfractée à la limite commune de deux corps transparents non cristallisés.

§ IV.

Je vais présentement appliquer les mêmes principes au cas où la réflexion et la réfraction se passent à la surface de séparation d'un milieu non cristallisé et d'un milieu cristallisé à un axe. Je développerai d'abord quelques relations générales, en partie connues, qui trouveront leur emploi dans la suite.

La position des différentes lignes et des différents plans doit être exprimée par les angles que forment ces divers éléments avec les trois axes rectangulaires d'élasticité du milieu cristallin à la surface duquel ont lieu les phénomènes de réflexion et de réfraction.

Soient A, B, C les cosinus des angles que la normale à la surface réfringente fait avec ces axes.

Les normales aux ondes planes, incidente, réfléchie, réfractée ordinairement, réfractée extraordinairement, auront respectivement pour cosinus a, b, c, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''.

La normale au plan d'incidence sera fixée par les angles dont les cosinus sont

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3;$$

la trace du plan d'incidence sur le plan réfringent par

$$F_1, \quad F_2, \quad F_3;$$

la *ligne principale* du plan réfringent par

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3;$$

les angles que le plan réfringent fait avec l'onde plane incidente, l'onde réfractée ordinairement, et l'onde réfractée extraordinairement, seront

$$\varphi, \quad \varphi', \quad \varphi''.$$

L'angle que la ligne principale (H_1, H_2, H_3) forme avec la trace du plan d'incidence et du plan réfringent (F_1, F_2, F_3), c'est-à-dire l'azimut du plan d'incidence, sera désigné par ω. Enfin soient μ', μ'' les vitesses de propagation de l'onde ordinaire et de l'onde extraordinaire, la vitesse de propagation dans le milieu environnant non cristallisé étant $= 1$.

Pour déterminer E_1, E_2, E_3, on a

$$E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = 1,$$

et

$$(1) \qquad \begin{cases} AE_1 + BE_2 + CE_3 = 0, \\ aE_1 + bE_2 + cE_3 = 0; \end{cases}$$

pour F_1, F_2, F_3, on a

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1,$$

et

$$(2) \qquad \begin{cases} AF_1 + BF_2 + CF_3 = 0, \\ E_1F_1 + E_2F_2 + E_3F_3 = 0; \end{cases}$$

pour la détermination de H_1, H_2, H_3, on a

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = 1,$$

et

$$(3) \qquad \begin{cases} AH_1 + BH_2 + CH_3 = 0, \\ XH_1 + YH_2 + ZH_3 = 0. \end{cases}$$

X, Y, Z désignent les cosinus de la normale au plan qui est mené par la ligne principale perpendiculairement au plan de réfringence ; ils sont définis par les équations

$$X^2 + Y^2 = 1,\quad Z = 0,\quad AX + BY = 0. \tag{4}$$

Pour les angles φ et ω, enfin, on a

$$\cos\varphi = Aa + Bb + Cc, \tag{5}$$

$$\cos\omega = H_1F_1 + H_2F_2 + H_3F_3. \tag{6}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), (4) on peut exprimer F_1, F_2, F_3, et H_1, H_2, H_3, au moyen de a, b, c, et, en portant ces valeurs dans l'équation (6), qu'on combinera avec l'équation (5), exprimer a, b, c par les angles φ et ω, en observant la condition

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Pour éviter les longueurs, on peut supposer $B = 0$, car dans les cristaux optiques à un axe, il n'y a qu'une seule des directions des axes d'élasticité qui soit déterminée.

Il vient alors

$$\left\{\begin{aligned} a &= A\cos\varphi - C\sin\varphi\cos\omega,\\ b &= \sin\varphi\sin\omega,\\ c &= C\cos\varphi + A\sin\varphi\cos\omega; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} F_1 &= C\cos\omega,\\ F_2 &= -\sin\omega,\\ F_3 &= -A\cos\omega; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\left\{\begin{aligned} E_1 &= C\sin\omega,\\ E_2 &= \cos\omega,\\ E_3 &= -A\sin\omega. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

On obtient les valeurs des cosinus α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' en changeant dans l'équation (7) φ en $-\varphi$, φ', φ'', les normales que ces cosinus déterminent étant toutes placées dans le plan des normales fixées par A, B, C et a, b, c, c'est-à-dire dans le plan d'incidence.

Soient G_1, G_2, G_3 les cosinus des angles que la trace du plan de l'onde incidente sur le plan d'incidence fait avec les trois axes d'élasticité, et I_1, I_2, I_3 les cosinus des angles de la ligne commune au plan d'incidence et à l'onde réfléchie avec les mêmes axes; on a

$$aG_1 + bG_2 + cG_3 = 0,$$

$$E_1G_1 + E_2G_2 + E_3G_3 = 0,$$

et

$$\alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3 = 0,$$

$$E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3 = 0.$$

On déduit de là, en mettant pour a, b, c, α, β, γ, E_1, E_2, E_3, leurs valeurs tirées des équations (7) et (9),

$$\left\{\begin{aligned} G_1 &= A\sin\varphi + C\cos\varphi\cos\omega,\\ G_2 &= -\cos\varphi\sin\omega,\\ G_3 &= C\sin\varphi - A\cos\varphi\cos\omega; \end{aligned}\right. \tag{10}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} I_1 &= A\sin\varphi - C\cos\varphi\cos\omega,\\ I_2 &= \cos\varphi\cos\omega,\\ I_3 &= C\sin\varphi + A\cos\varphi\cos\omega. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Pour exprimer φ' et φ'' au moyen de φ, on a

$$\mu' \sin\varphi = \sin\varphi', \quad \text{et} \quad \mu'' \sin\varphi = \sin\varphi'',$$

équations dans lesquelles μ' est une constante μ, exprimant la valeur commune des vitesses de propagation des deux systèmes d'ondes, quand tous les deux sont perpendiculaires à l'axe. La première équation ne réclame donc aucune étude ultérieure. Quant à μ'', c'est une fonction de l'angle que la normale à l'onde extraordinaire fait avec l'axe, c'est-à-dire une fonction de γ'' que voici d'ailleurs,

$$(12) \qquad \mu''^2 = \pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)\gamma''^2 :$$

π désigne la vitesse de propagation de l'onde extraordinaire, quand elle est parallèle à l'axe. Pour déterminer φ'' on a ainsi, en remplaçant γ'' par sa valeur exprimée en φ'', l'équation suivante

$$(13) \qquad \sin^2\varphi\,[\pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)(\mathrm{C}\cos\varphi'' + \mathrm{A}\sin\varphi''\cos\omega)^2] = \sin^2\varphi''.$$

La racine positive de cette équation du deuxième degré convient à la question qui nous occupe; quant à la racine négative, elle n'a de signification que pour la réflexion à l'intérieur d'un milieu cristallin.

Il faut encore trouver les directions du mouvement dans l'onde ordinaire et dans l'onde extraordinaire.

Soient R'_a, R'_b, R'_c les cosinus des angles que la direction du mouvement ordinaire fait avec les axes d'élasticité; R''_a, R''_b, R''_c les cosinus des angles que la direction du mouvement extraordinaire fait avec les mêmes axes.

La direction désignée par R'_a, R'_b, R'_c est l'intersection du plan d'ondes, dont la normale a pour cosinus α', β', γ', avec le plan mené par cette normale et par l'axe; l'autre direction, indiquée par R''_a, R''_b, R''_c, est perpendiculaire au plan mené par l'axe et par la normale dont les cosinus sont α'', β'', γ''.

Cette dernière direction doit donc satisfaire aux conditions

$$\alpha''\mathrm{R}''_a + \beta''\mathrm{R}''_b + \gamma''\mathrm{R}''_c = 0, \quad \mathrm{R}''_c = 0,$$

ou

$$(14) \qquad \mathrm{R}''_a = \frac{\beta''}{\sqrt{\alpha''^2 + \beta''^2}}, \quad \mathrm{R}''_b = -\frac{\alpha''}{\sqrt{\alpha''^2 + \beta''^2}}, \quad \mathrm{R}''_c = 0.$$

On obtient les cosinus de la normale au plan conduit par $(\alpha', \beta', \gamma')$ et l'axe, en remplaçant α'', β'' par α', β'. On a ainsi

$$\alpha'\mathrm{R}'_a + \beta'\mathrm{R}'_b + \gamma'\mathrm{R}'_c = 0,$$
$$\beta'\mathrm{R}'_a - \alpha'\mathrm{R}'_b = 0,$$

d'où

$$(15) \qquad \mathrm{R}'_a = \frac{\alpha'\gamma'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}, \quad \mathrm{R}'_b = \frac{\beta'\gamma'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}, \quad \mathrm{R}'_c = -\frac{\alpha'^2 + \beta'^2}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}.$$

De la position donnée du plan d'ondes, on doit déduire la direction du rayon qui lui appartient. Pour l'onde plane ordinaire le rayon est dirigé suivant la normale à cette onde; pour l'onde extraordinaire le rayon a la direction du rayon vecteur mené du centre de l'ellipsoïde

$$\mu^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \pi^2 z^2 = \mu^2 \pi^2,$$

dont l'ordonnée z est parallèle à l'axe optique, au point où cette surface est touchée par le plan de l'onde. L'équation de ce plan est

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0.$$

Le rayon vecteur, mené au point de contact, forme avec les trois axes des angles dont les cosinus sont X, Y, Z; sa direction est donnée par les équations

$$x = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}} z, \quad y = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}} z.$$

Pour le point de contact commun à l'ellipsoïde et au plan, à l'extrémité de ce rayon vecteur, on a

$$-\frac{dx}{dz} = +\frac{\pi^2}{\mu^2}\frac{z}{x} = +\frac{\gamma''}{\alpha''},$$

$$-\frac{dy}{dz} = +\frac{\pi^2}{\mu^2}\frac{z}{y} = +\frac{\gamma''}{\beta''};$$

tirant de là les valeurs de $\frac{x}{z}$ et de $\frac{y}{z}$, et les portant dans les équations qui précèdent, et observant que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = 1$, on trouve

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{\pi^2 \alpha''}{\mathrm{T}}, \\ \mathrm{Y} &= \frac{\pi^2 \beta''}{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{T} = \sqrt{\alpha''^2 \pi^4 + \beta''^2 \pi^4 + \gamma''^2 \mu^4}, \\ \mathrm{Z} &= \frac{\mu^2 \gamma''}{\mathrm{T}}; \end{aligned}\right.$$

si l'on appelle ω'' l'azimut de ce rayon par rapport au plan d'incidence, et δ'' son inclinaison sur la normale au plan réfringent,

$$(17)\quad \tang \omega'' = \frac{\mathrm{A}\gamma'' \sin \omega \dfrac{\mu^2 - \pi^2}{\pi^2}}{\sin \varphi'' + \mathrm{A}\gamma'' \cos \omega \dfrac{\mu^2 - \pi^2}{\pi^2}},$$

$$(18)\quad \cos \delta'' = \frac{\cos \varphi'' + \dfrac{\mu^2 - \pi^2}{\pi^2} \mathrm{C}\gamma''}{\sqrt{1 + \dfrac{\mu^2 - \pi^2}{\pi^2} \gamma''^2}}.$$

§ V.

Nous allons présentement former les équations qui résultent du principe de l'égalité des composantes. Le plan d'incidence est à l'azimut ω, l'angle d'incidence est φ, les angles de réfraction sont φ' et φ''. Soient ensuite S la vitesse du mouvement dans la lumière incidente, parallèlement au plan d'incidence; P perpendiculairement au même plan; R_s, R_p les deux composantes correspondantes dans la lumière réfléchie; D' la vitesse du mouvement dans l'onde ordinaire; D'' la quantité analogue dans l'onde extraordinaire. Nous décomposons ces six mouvements dans leurs composantes parallèles aux trois axes coordonnés, et nous obtenons, par le principe susnommé, les trois équations

$$\begin{aligned}
PE_1 + SG_1 + R_pE_1 + R_sI_1 &= D'R'_a + D''R''_a,\\
PE_2 + SG_2 + R_pE_2 + R_sI_2 &= D'R'_b + D''R''_b,\\
PE_3 + SG_3 + R_pE_3 + R_sI_3 &= D'R'_c + D''R''_c.
\end{aligned}$$

Si l'on multiplie la première, la seconde et la troisième de ces équations, d'abord par E_1, E_2, E_3, puis par F_1, F_2, F_3, et enfin par A, $B = 0$, C, et qu'à chaque fois on ajoute les trois produits, en ayant égard aux relations

$$F_1G_1 + F_2G_2 + F_3G_3 = \cos\varphi = F_1I_1 + F_2I_2 + F_3I_3,$$

et

$$AG_1 + CG_3 = \sin\varphi = -(AI_1 + CI_3),$$

on transforme ces trois équations dans les trois suivantes

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
P + R_p &= D'(R'_a E_1 + R'_b E_2 + R'_c E_3) + D''(R''_a E_1 + R''_b E_2 + R''_c E_3),\\
(S + R_s)\cos\varphi &= D'(R'_a F_1 + R'_b F_2 + R'_c F_3) + D''(R''_a F_1 + R''_b F_2 + R''_c F_3),\\
(S - R_s)\sin\varphi &= D'(R'_a A + R'_c C) + D''(R''_a A + R''_c C).
\end{aligned}\right.$$

Si des équations (13), (12), (8), (7) du précédent paragraphe on déduit les valeurs de R'_a, R''_a,..., E_1,..., F_1,..., et qu'à la place de α', β', γ', α'', β'', γ'' on mette les valeurs qui se déduisent des équations (6), § IV, quand dans ces équations on substitue à φ les angles φ' et φ'', on trouve, après réductions convenables,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
R'_a E_1 + R'_b E_2 + R'_c E_3 &= +\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}},\\
R''_a E_1 + R''_b E_2 + R''_c E_3 &= \frac{C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\
R'_a F_1 + R'_b F_2 + R'_c F_3 &= -\frac{\cos\varphi'(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}},\\
R''_a F_1 + R''_b F_2 + R''_c F_3 &= +\frac{A\cos\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\
R'_a A + R'_c C &= -\frac{\sin\varphi'(C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}},\\
R''_a A + R''_c C &= \frac{A\sin\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.
\end{aligned}\right.$$

Par là les équations (1) se changent dans les suivantes

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&a. &\mathrm{P}+\mathrm{R}_p &= +\mathrm{D}'\,\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}+\mathrm{D}''\,\frac{\mathrm{C}\sin\varphi''-\mathrm{A}\cos\omega\cos\varphi''}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\
&b. &(\mathrm{S}-\mathrm{R}_s)\cos\varphi &= -\mathrm{D}'\,\frac{\cos\varphi'(\mathrm{C}\sin\varphi'-\mathrm{A}\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}}+\mathrm{D}''\,\frac{\mathrm{A}\cos\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\
&c. &(\mathrm{S}+\mathrm{R}_s)\sin\varphi &= -\mathrm{D}'\,\frac{\sin\varphi'(\mathrm{C}\sin\varphi'-\mathrm{A}\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}}+\mathrm{D}''\,\frac{\mathrm{A}\sin\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.
\end{aligned}\right.$$

Je vais actuellement développer l'équation qui se déduit du principe de la conservation des forces vives, et dans ce but chercher d'abord le rapport d'un volume de l'onde incidente aux volumes des ondes réfléchie et réfractée qui se partagent, après la réflexion et la réfraction, la vitesse du premier.

Soient, *fig.* 3, ab l'intersection d'un plan d'ondes avec le plan d'incidence qui est le plan de la figure, et AB l'intersection du plan consécutif avec le même plan; qu'on imagine en a une ligne perpendiculaire au plan d'incidence, figurant l'intersection de l'onde incidente avec la surface réfringente, et qu'on suppose cette ligne prolongee en a'. Les trois lignes ab, aA, aa' représenteront les trois côtés d'un parallélipipède rectangle égal au volume primitif de l'onde incidente auquel nous cherchons à comparer les volumes qui reçoivent les vitesses du premier dans les ondes réfractées et dans l'onde réfléchie.

Les extrémités des côtes du parallélipipède primitif parallèles à aa', et partant des points A, B, b, sont désignées par A′, B′, b'. Le côté Bb rencontre en C le plan réfringent; le côté B′b' en C′.

D'après l'hypothèse que les ondes incidentes se meuvent dans un milieu non cristallisé, je n'aurai à déterminer que le volume de l'onde réfractée extraordinairement; car le volume de l'onde ordinaire se déterminera comme dans un milieu non cristallisé, et le volume de l'onde réfléchie est égal au volume de l'onde incidente. Soient CD le plan des ondes extraordinairement réfractées qui correspond à AB, et cd celui qui dérive de ab; toutes les vitesses qui proviennent du parallélipipède primitif Aaa' sont renfermées entre les deux plans CD et cd, dont l'écartement, mesuré sur la normale aH, est Gg. Soient aS et CT les rayons appartenant à ces plans d'ondes, savoir, aS rayon réfracté de aE, et CT rayon réfracté de CF. Ces rayons réfractes ne sont pas en général dans le plan de la figure, c'est-à-dire dans le plan d'incidence; les lettres D, d, c dans la figure doivent se rapporter à l'intersection réelle du plan des ondes avec les rayons aS et CT. Figurons-nous, en outre, par les points a', C′, deux autres rayons parallèles à aE et CF, a'E′, C′F′, et représentons les rayons réfractes qui leur correspondent par a'S′, C′T′, et par D′, d', c' leurs intersections avec l'onde. Les mouvements qui ont lieu d'abord dans le prisme rectangulaire ABabA′B′$a'b'$ passent dans un prisme oblique CDcdC′D′$c'd'$; le rapport de ces deux prismes est donc le rapport des deux volumes qui se correspondent dans l'onde incidente et dans l'onde extraordinairement réfractée.

Pour déterminer la capacité du prisme C'DD'd, nous allons calculer l'aire de la base CC'DD'; cette base est figurée *fig.* 4, et désignée par les lettres qui lui conviennent; G est le pied d'une perpendiculaire à cette base abaissée de a, et G' le pied d'une normale menée de a'. Désignons par W l'aire de cette base, par ψ l'angle DGC; l'angle DCG par ξ et la ligne CC' par a. aC étant $= 1$,

$$GC' = \cos\varphi'', \quad aG = \sin\varphi''.$$

L'angle que le rayon aD fait avec la normale aG étant q, on a

$$GD = \sin\varphi'' \operatorname{tang} q,$$

et

$$W = DC \times CC' \times \cos\xi = a\cos\xi \times CD;$$

mais

$$CD\cos\xi = CG - GD\cos\psi = \cos\varphi'' - \sin\varphi'' \operatorname{tang} q \cos\psi;$$

d'où

$$(4) \qquad W = a(\cos\varphi'' - \sin\varphi''\cos\psi \operatorname{tang} q).$$

On doit, dans cette équation, à la place de tang q, substituer sa valeur.

Les cosinus des angles que le rayon forme avec les trois axes coordonnés ont été désignés, (16), § IV, par X, Y, Z, et les cosinus de la normale à l'onde par α'', β'', γ''.

$$\cos q = \alpha''X + \beta''Y + \gamma''Z,$$

et, en substituant pour X, Y, Z, leurs valeurs tirées de (16), § IV,

$$\cos q = \frac{\pi^2\alpha''^2 + \pi^2\beta''^2 + \mu^2\gamma''^2}{\sqrt{\pi^4\alpha''^2 + \pi^4\beta''^2 + \mu^4\gamma''^2}} = \frac{\pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)\gamma''^2}{\sqrt{\pi^4 + (\mu^4 - \pi^4)\gamma''^2}},$$

par conséquent

$$(5) \qquad \operatorname{tang} q = + \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''\sqrt{1 - \gamma''^2}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2}.$$

Au lieu de prendre le double signe, on ne prend que le signe déterminé +, parce que, dans les cristaux à un axe, tang q a toujours une valeur positive, en admettant, comme pour le spath calcaire, que l'axe de l'ellipsoïde optique est le plus petit rayon de cet ellipsoïde. Pour l'uniformité, nous admettrons toujours cette hypothèse dans la discussion sur le choix des signes.

De plus, on doit substituer dans l'expression de W la valeur de cos ψ; ψ est l'angle que le plan d'incidence fait avec le plan déterminé par la normale à l'onde et la direction du rayon. Ce dernier plan forme, avec les trois axes coordonnés x, y, z, des angles dont les sinus sont $\pm \frac{\beta''}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$, $\mp \frac{\alpha''}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}$, o; quant aux sinus des angles du plan d'incidence avec les trois axes, nous les avons désignés ci-dessus par E_1, E_2, E_3. En employant ces différentes valeurs, on obtient, pour cos ψ,

$$\cos\psi = \frac{\pm E_1\beta'' \mp E_2\alpha''}{\sqrt{1 - \gamma''^2}},$$

et en substituant les valeurs de E_1, E_2, tirées du § IV (9),

$$\cos\psi = \frac{\pm C\beta''\sin\omega \mp \alpha''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.$$

Pour décider le choix du signe, posons $\omega = 0$, ce qui nous donne

$$\cos\psi = \frac{\mp\alpha''}{\sqrt{1-\gamma''^2}},$$

et en remplaçant α'' et γ'' par leurs valeurs (7), § IV,

$$\cos\psi = \frac{\mp\sin(\lambda-\varphi'')}{+\sqrt{\sin^2(\lambda-\varphi'')}}.$$

Dans cette équation on a posé $A = \sin\lambda$, $C = \cos\lambda$, ce qui donne $90° - \lambda$ pour l'inclinaison du plan réfringent sur l'axe optique.

Si l'on prend maintenant, comme cela est déjà indiqué par la formule (3), l'angle $\psi = 0$, dans le cas où le rayon forme avec la normale au plan de réfringence un plus grand angle que la normale au plan d'ondes avec la même ligne, et inversement $\psi = 180°$ quand le rayon fait avec la normale un angle plus petit, on doit, puisque dans le premier cas λ est plus petit que φ'', et dans le second cas λ est plus grand que φ'', prendre le signe supérieur. On a, par conséquent,

$$\cos\psi = \frac{+C\beta''\sin\omega - \alpha''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.$$

En mettant dans cette équation les valeurs que l'on déduit de l'équation (7), § IV, en y changeant φ en φ'', on trouve

$$\cos\psi\sqrt{1-\gamma''^2} = C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega,$$

et par suite

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos\psi\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi'' &= +C - (C\cos\varphi'' + A\sin\varphi''\cos\omega)\cos\varphi'' \\ &= +C - \gamma''\cos\varphi''. \end{aligned} \right.$$

Portant, dans l'équation (4), la valeur de tang q (5), on aura

$$W = a\left[\cos\varphi'' - \sin\varphi''\,\frac{\cos\psi\,\gamma''\sqrt{1-\gamma''^2}\,(\pi^2-\mu^2)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2}\right];$$

mettant dans W, au lieu de $\cos\psi\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi''$, sa valeur (6), on obtiendra

$$(7)\quad W = a\left[\cos\varphi'' - \frac{\gamma''(C-\gamma''\cos\varphi'')(\pi^2-\mu^2)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2}\right].$$

Le volume du prisme oblique CC'DD', que je désignerai par Z'', est donc, Gg représentant la hauteur de ce prisme,

$$Z'' = Gg \times W.$$

Or, cette hauteur Gg est à la hauteur Aa du prisme rectangulaire correspondant $AA'Ca$ de l'onde incidente dans le rapport de la vitesse μ'' à la vitesse V.

La hauteur Aa étant représentée par H, on a

$$Gg = \frac{\mu''}{V} H = \frac{\sin\varphi''}{\sin\varphi} H,$$

et l'on obtient enfin, pour la solidité du prisme,

$$(8) \qquad Z'' = aH \frac{\sin\varphi'' \cos\varphi''}{\sin\varphi} \left[1 - (\pi^2 - \mu^2) \frac{\gamma'' \left(\frac{C}{\cos\varphi''} - \gamma'' \right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2} \right].$$

Telle est l'expression du volume ébranlé dans l'onde extraordinaire; le volume correspondant dans l'onde ordinaire sera désigné par Z', et le volume dans l'onde réfléchie, qui est égal au volume dans l'onde incidente, par Z. On obtient ces volumes en posant dans l'équation (8) $\pi^2 - \mu^2 = 0$, et changeant successivement φ'' en φ' pour obtenir Z', et φ'' en φ pour Z. Ainsi

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} Z' &= aH \frac{\sin\varphi' \cos\varphi'}{\sin\varphi}, \\ Z &= aH \cos\varphi. \end{aligned} \right.$$

L'équation qui découle du principe de la conservation des forces vives est

$$(P^2 + S^2 - R_p^2 - R_s^2) Z = D'^2 Z' + D''^2 Z'';$$

elle se change dans la suivante quand on y porte les valeurs trouvées pour Z, Z', Z'', et qu'on supprime le facteur commun aH,

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(P^2 + S^2 - R_p^2 - R_s^2) \sin\varphi \cos\varphi = D'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' \\ &\quad + D''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi'' \left[1 - \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma'' \left(\frac{C}{\cos\varphi''} - \gamma'' \right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

§ VI.

Pour déterminer les inconnues R_s, R_p, D', D'', on a, dans (3) et (10) du § V, le nombre suffisant d'équations; mais il semble à la première vue que ces quantités vont dépendre d'équations carrées, d'où devrait résulter une ambiguïté qui n'est pas dans la nature du sujet. Je montrerai cependant que le système des équations (3) et (10) se résout en quatre équations du premier degré.

Multiplions l'une par l'autre les équations (b) et (c), (3), § V; nous obtenons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(S^2 - R_s^2) \sin\varphi \cos\varphi = D'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' \left(\frac{C \sin\varphi' - A \cos\varphi' \cos\omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}} \right)^2 \\ &+ D''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi'' \left(\frac{A \sin\omega}{\sqrt{1 - \gamma''^2}} \right)^2 - D' D'' \frac{(C \sin\varphi' - A \cos\varphi' \cos\omega) A \sin\omega \sin(\varphi' + \varphi'')}{\sqrt{1 - \gamma'^2} \sqrt{1 - \gamma''^2}}. \end{aligned} \right.$$

Si à la place de γ' et γ'' on met leurs valeurs exprimées au moyen des angles φ', φ'' et ω, (7), § IV, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &1-\left(\frac{C\sin\varphi'-A\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\right)^2=\frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^2},\\ &1-\left(\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\right)^2=\frac{(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)^2}{1-\gamma''^2},\end{aligned}\right.$$

ce qui donne, en retranchant l'équation (1) de l'équation des forces vives (10), § V,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(P^2-R_p^2)\sin\varphi\cos\varphi = D'^2\sin\varphi'\cos\varphi'\,\frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^2}\\ &+D''^2\sin\varphi''\cos\varphi''\left[\frac{(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)^2+\Delta(1-\gamma''^2)}{1-\gamma''^2}\right]\\ &+D'D''A\,\frac{(C\sin\varphi'-A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin\omega\sin(\varphi'+\varphi'').\end{aligned}\right.$$

Δ remplace

$$\frac{(\mu^2-\pi^2)\gamma''\left(\dfrac{C}{\cos\varphi''}-\gamma''\right)}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2}.$$

Je vais prouver maintenant que la partie de cette équation qui est à la droite du signe d'égalité peut se décomposer en deux facteurs M et N,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &M = D'\,\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}+D''\,\frac{(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\ &N = D'\sin\varphi'\cos\varphi'\,\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\ &\quad+D''\left[\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma''^2}}+\frac{\Delta\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi''\cos\varphi''}{C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega}\right].\end{aligned}\right.$$

Multipliant ces deux facteurs l'un par l'autre, et comparant leur produit au second membre de l'équation (3), on voit que la décomposition est exacte, si

$$\frac{A\sin\omega(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)(\sin\varphi'\cos\varphi'+\sin\varphi''\cos\varphi'')+\dfrac{A\sin\omega\Delta(1-\gamma''^2)\sin\varphi''\cos\varphi''}{C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega}}{\sqrt{1-\gamma'^2}\sqrt{1-\gamma''^2}}$$

$$=\frac{A\sin\omega(C\sin\varphi'-A\cos\varphi'\cos\omega)\sin(\varphi'+\varphi'')}{\sqrt{1-\gamma'^2}\sqrt{1-\gamma''^2}}.$$

Cette relation est donc à vérifier. Supprimant les facteurs communs, on la réduit à

$$(5)\quad \begin{cases} (C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega)\sin(\varphi'+\varphi'')\cos(\varphi'-\varphi'') + \dfrac{\sin\varphi''\cos\varphi''(1-\gamma''^2)\Delta}{C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega} \\ = (C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega)\sin(\varphi'+\varphi''). \end{cases}$$

Rappelons d'ailleurs que

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{(\mu^2-\pi^2)\gamma''(C-\gamma''\cos\varphi'')}{\cos\varphi''[\pi^2+(\mu^2-\pi^2)\gamma''^2]}, \\ C-\gamma''\cos\varphi'' = \sin\varphi''(C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos\omega), \\ \sin^2\varphi\,[\pi^2+(\mu^2-\pi^2)\gamma''^2] = \sin^2\varphi'', \quad \text{et} \quad \mu^2\sin^2\varphi = \sin^2\varphi', \end{cases}$$

et que des équations de la dernière ligne on peut tirer

$$(7)\qquad \mu^2-\pi^2 = \frac{\sin^2\varphi'-\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi(1-\gamma''^2)} = \frac{\sin(\varphi'-\varphi'')\sin(\varphi'+\varphi'')}{\sin^2\varphi(1-\gamma''^2)},$$

$$(8)\qquad \pi^2+(\mu^2-\pi^2)\gamma''^2 = \frac{\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'expression de Δ, elle se change dans la suivante :

$$(9)\qquad \Delta = \frac{\sin(\varphi'-\varphi'')\sin(\varphi'+\varphi'')(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)\gamma''}{\sin\varphi''\cos\varphi''(1-\gamma''^2)}.$$

Cette valeur de Δ, introduite dans l'équation (5) qu'on débarrassera du facteur commun $\sin(\varphi'+\varphi'')$, donne

$$(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)\cos(\varphi'-\varphi'')+\sin(\varphi'-\varphi'')\gamma'' = C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega,$$

équation dont il est facile de reconnaître l'exactitude, en observant que

$$C[\sin\varphi''\cos(\varphi'-\varphi'') - \sin\varphi'] = -C\cos\varphi''\sin(\varphi'-\varphi''),$$
$$A\cos\omega\,[\cos\varphi''\cos(\varphi'-\varphi'') - \cos\varphi'] = A\cos\omega\sin\varphi''\sin(\varphi'-\varphi''),$$

et que

$$\gamma'' = A\sin\varphi\cos\omega + C\cos\varphi''.$$

La possibilité de la décomposition de la seconde partie de l'équation (3) en deux facteurs M et N (4) est donc démontrée ; le premier membre de cette équation se résout aussi dans les deux facteurs $P+R_p$, $(P-R_p)\sin\varphi\cos\varphi$. Si l'on compare les facteurs de chacun des membres de l'équation (3) avec les deux parties de l'équation (3), *a*, § V, on voit que l'équation (3) peut être divisée par celle-ci, et peut être remplacée par l'équation suivante,

$$(P-R_p)\sin\varphi\cos\varphi = D'\sin\varphi'\cos\varphi'\,\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}$$
$$+D''\left[\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)+\dfrac{\sin\varphi''\cos\varphi''(1-\gamma''^2)\Delta}{C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega}}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\right],$$

ou, à la place de Δ mettant sa valeur (9),

$$(10)\left\{\begin{aligned}&(P-R_p)\sin\varphi\cos\varphi = D'\frac{\sin\varphi'\cos\varphi' A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\\ &+D''\left[\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)+\gamma''\sin(\varphi'+\varphi'')\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\right].\end{aligned}\right.$$

Mettant, à la place de γ'', dans le facteur de D'', sa valeur

$$\gamma'' = C\cos\varphi'' + A\sin\varphi''\cos\omega,$$

et remarquant que

$$\sin(\varphi'+\varphi'')\sin(\varphi'-\varphi'') = \sin^2\varphi' - \sin^2\varphi'',$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\sin\varphi''\cos\varphi''(C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega)+\gamma''\sin(\varphi'+\varphi'')\sin(\varphi'-\varphi'')\\ &= C\cos\varphi''\sin^2\varphi' - A\sin\varphi''\cos^2\varphi'\cos\omega.\end{aligned}$$

Cette valeur substituée dans l'équation (10), la rend un peu plus simple.

Les quatre équations du premier degré qui déterminent les vitesses R_s, R_p, D', D'', sont donc les suivantes :

$$(11)\left\{\begin{aligned}&a.\quad P+R_p = D'\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}+D''\frac{C\sin\varphi''-A\cos\varphi''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\ &b.\quad (P-R_p)\sin\varphi\cos\varphi = D'\frac{\sin\varphi'\cos\varphi' A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}+D''\frac{C\cos\varphi''\sin^2\varphi'-A\sin\varphi''\cos^2\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\ &c.\quad (S+R_s)\sin\varphi = -D'\frac{\sin\varphi'(C\sin\varphi'-A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}}+D''\frac{A\sin\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}},\\ &d.\quad (S-R_s)\cos\varphi = -D'\frac{\cos\varphi'(C\sin\varphi'-A\cos\varphi'\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}}+D''\frac{A\cos\varphi''\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}.\end{aligned}\right.$$

§ VII.

En éliminant R_p entre les équations a et b du paragraphe précédent et R_s entre c et d, on trouve

$$(1)\left\{\begin{aligned}&2P\sin\varphi\cos\varphi = \frac{D'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')A\sin\omega\\ &+\frac{D''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}[C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')-A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi''\cos^2\varphi')],\\ &2S\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{D'}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\\ &+\frac{D''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi'+\varphi'')A\sin\omega.\end{aligned}\right.$$

En éliminant P et S entre les mêmes équations, on obtient

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&2R_p \sin\varphi\cos\varphi = \frac{D'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\,A\sin\omega\\
&+\frac{D''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\left[C(\sin\varphi''\cos\varphi\sin\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')-A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi''\cos^2\varphi')\right],\\
&2R_s\sin\varphi\cos\varphi = \frac{D'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi-\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\\
&-\frac{D''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\varphi-\varphi'')\,A\sin\omega.
\end{aligned}\right.$$

Des équations (1) on peut déduire les vitesses dans le rayon ordinaire et dans le rayon extraordinaire.

Posant, pour abréger,

$$N = \sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\begin{bmatrix} C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\ -A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{bmatrix}$$
$$+A\sin^2\omega\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi''),$$

on obtient

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&D' = 2\,\frac{\sqrt{1-\gamma'^2}\sin\varphi\cos\varphi}{N}\\
&\times\left\{P\sin(\varphi+\varphi')A\sin\omega - S\begin{bmatrix} C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\ -A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{bmatrix}\right\},\\
&D'' = 2\,\frac{\sqrt{1-\gamma''^2}\sin\varphi\cos\varphi}{N}\\
&\times\begin{bmatrix} P\sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\\ +S\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')A\sin\omega\end{bmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs étant portées dans les équations (2), on voit que les expressions des vitesses dans les deux rayons réfléchis polarisés parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence ont la forme

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned} R_p &= pP + sS,\\ R_s &= p'P + s'S.\end{aligned}\right.$$

On trouve, pour p et s, les valeurs suivantes :

$$Np = \sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\begin{bmatrix} C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\ -A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{bmatrix}$$
$$+A^2\sin^2\omega\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi''),$$

$$Ns = -\sin(\varphi-\varphi')(C\sin\varphi'-A\cos\omega\cos\varphi')\begin{bmatrix} C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi)\\ -A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{bmatrix}$$
$$-A^2\sin^2\omega\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi-\varphi''),$$

et pour p' et s', après quelques réductions,

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}p' &= -\mathrm{A}\sin\omega\,(\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi''),\\
\mathrm{N}s' &= -\mathrm{A}\sin\omega\,(\mathrm{C}\sin\varphi' + \mathrm{A}\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'').
\end{aligned}$$

Si l'on fait dans ces formules, qui donnent D', D'', R_p, R_s, $\varphi' = \varphi''$, c'est-à-dire si l'on admet que la réfraction simple seulement est produite, elles se changent dans les valeurs trouvées ci-dessus au § III, pour la réflexion dans les milieux non cristallisés. s' et p' deviennent alors simultanément nulles, et

$$(a) \qquad p = \frac{\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}, \quad s = -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (4), on trouve pour R_p et R_s les valeurs rapportées au § III pour les mouvements réfléchis dans les rayons lumineux polarisés perpendiculairement et parallèlement au plan d'incidence.

On tire en outre de l'équation (3), en ayant égard à la relation

$$1-\gamma'^2 = \mathrm{A}^2\sin^2\omega + (\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\omega\cos\varphi')^2,$$

$$\mathrm{D}' = 2\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi[\mathrm{PA}\sin\omega\sin(\varphi'+\varphi) - \mathrm{S}(\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\omega\cos\varphi')\sin(\varphi'+\varphi)\cos(\varphi'-\varphi)]}{\sin^2(\varphi'+\varphi)\cos(\varphi'-\varphi)\sqrt{1-\gamma'^2}},$$

$$\mathrm{D}'' = 2\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi[\mathrm{P}(\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\omega\cos\varphi')\sin(\varphi+\varphi') + \mathrm{SA}\sin\omega\sin(\varphi'+\varphi)\cos(\varphi'-\varphi)]}{\sin^2(\varphi'+\varphi)\cos(\varphi'-\varphi)\sqrt{1-\gamma'^2}}.$$

D'où l'on déduit, en multipliant la première équation par $\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$, la seconde par $\frac{\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$, et ajoutant; la première équation par $\frac{\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$, et la seconde par $\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}$, et retranchant:

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{D}'\,\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + \mathrm{D}''\,\frac{\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = \frac{2\mathrm{P}\sin\varphi\cos\varphi}{\sin(\varphi'+\varphi)\cos(\varphi'-\varphi)},\\
&-\mathrm{D}'\,\frac{\mathrm{C}\sin\varphi' - \mathrm{A}\cos\omega\cos\varphi'}{\sqrt{1-\gamma'^2}} + \mathrm{D}''\,\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = \frac{2\mathrm{S}\sin\varphi\cos\varphi}{\sin(\varphi'+\varphi)}.
\end{aligned}\right.$$

Si χ désigne l'angle formé par le plan d'incidence avec le plan mené par l'axe et la normale à l'onde réfractée sous l'angle φ' ou φ'', le mouvement D'' a lieu dans l'azimut $90^\circ - \chi$ et le mouvement D' dans l'azimut $180^\circ - \chi$, l'azimut étant compté à partir du plan d'incidence. Si donc on décompose les mouvements D' et D'' suivant le plan d'incidence et perpendiculairement à ce plan, et qu'on appelle D_s et D_p les composantes respectives, on obtient

$$(c) \qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{D}_s &= -\mathrm{D}'\cos\chi + \mathrm{D}''\sin\chi,\\
\mathrm{D}_p &= \mathrm{D}'\sin\chi + \mathrm{D}''\cos\chi.
\end{aligned}\right.$$

Mais on trouve

$$\cos\chi = \frac{C \sin\varphi' - A \cos\varphi' \cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \quad \text{et} \quad \sin\chi = \frac{A \sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}};$$

et si l'on combine (b) et (c) l'une avec l'autre, on obtient

$$D_p = \frac{2P \sin\varphi \cos\varphi}{\sin(\varphi'+\varphi)\cos(\varphi'-\varphi)}, \quad D_s = \frac{2S \sin\varphi \cos\varphi}{\sin(\varphi'+\varphi)}.$$

Ce sont les valeurs que nous avons trouvées ci-dessus, au § III, pour D_p et D_s.

§ VIII.

Des équations (4) et (5) on peut déduire les lois de la polarisation de la lumière par réflexion à la surface des milieux cristallins. Je m'occupe de cette recherche avec d'autant plus d'intérêt que les précieuses observations du docteur Seebeck sont là pour servir de pierre de touche à mes résultats théoriques, et qu'elles leur fournissent une belle confirmation.

On peut, en partant des phénomènes de réflexion sur des surfaces non cristallines, donner une double définition de l'angle de polarisation :

1°. On peut le définir l'angle d'incidence que doit faire avec la surface réfléchissante, un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence pour ne pas fournir de rayon réfléchi ; 2° ou encore l'angle sous lequel la lumière naturelle doit être réfléchie, pour que le rayon réfléchi ne soit composé que de lumière polarisée parallèlement au plan de réflexion. Mais ces deux définitions ne sont point, rigoureusement et généralement parlant, applicables aux surfaces cristallines.

En effet, si nous admettons que la lumière incidente soit polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, nous avons pour la lumière réfléchie, d'après (4),

$$R_p = pP, \quad \text{et} \quad R_s = p'P,$$

et, pour l'intensité de la lumière réfléchie,

$$R_p^2 + R_s^2 = (p^2 + p'^2)P^2.$$

Ces deux composantes ne peuvent s'éteindre pour une valeur convenable de l'angle φ, que dans le cas où p' est nul indépendamment de l'angle φ, ce qui a toujours lieu pour les surfaces non cristallisées, mais n'existe que dans certains cas particuliers pour les surfaces cristallines.

Mais on peut concevoir la première définition d'une manière plus générale, qui la rend applicable aux corps cristallisés et non cristallisés. Il suffit de dire que l'angle de polarisation est l'angle sous lequel un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence doit être réfléchi pour qu'aucune portion de lumière polarisée perpendiculairement au plan de réflexion ne fasse partie du rayon réfléchi. Cette définition de l'angle de polarisation étant adoptée, nous obtenons cet angle en résolvant l'équation $p = 0$.

En mettant pour p sa valeur, et négligeant le facteur commun $\frac{1}{N}$, cette équation est

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = A^2 \sin^2\omega \cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'') \\ + \sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\left[\begin{array}{l} C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi''\sin^2\varphi') \\ -A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{array}\right]; \end{array}\right.$$

équation dans laquelle φ, φ', φ'' sont liés par les relations suivantes :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\varphi' = \mu\sin\varphi, \\ \tang^2\varphi''\left(\dfrac{1-\pi^2\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right) = \mu^2(C + A\cos\omega\tang\varphi'')^2 + \pi^2(A^2 - C\cos\omega\tang\varphi'')^2. \end{array}\right.$$

Je vais prouver maintenant que la seconde définition de l'angle de polarisation est pareillement insuffisante dans le cas de la réflexion sur les surfaces cristallines, et, dans ce but, je donnerai l'expression de l'intensité de la lumière réfléchie dans le cas où la lumière incidente n'est pas polarisée.

La lumière naturelle peut se représenter par une suite de mouvements vibratoires se succédant dans toutes les directions avec une rapidité telle que l'on peut supposer que, pendant la courte durée nécessaire pour produire dans l'œil l'impression lumineuse, un même nombre d'oscillations ont lieu dans chaque azimut.

Soit I^2 l'intensité totale de la lumière incidente; l'intensité de la lumière qui produira ses oscillations dans l'azimut β sera $\frac{I^2}{2\pi}d\beta$; cette partie donne en lumière réfléchie

$$(R_p^2) = (p\cos\beta + s'\sin\beta)^2\frac{I^2}{2\pi}d\beta,$$

$$(R_s^2) = (p'\cos\beta + s\sin\beta)^2\frac{I^2}{2\pi}d\beta.$$

L'intensité de la lumière réfléchie polarisée perpendiculairement, et l'intensité de la lumière réfléchie polarisée parallèlement, s'obtiennent en faisant la somme des intensités partielles (R_p^2) et (R_s^2) pour toutes les valeurs de β,

$$R_p^2 = (p^2 + s'^2)\frac{I^2}{2},$$

$$R_s^2 = (p'^2 + s^2)\frac{I^2}{2}.$$

La lumière réfléchie sera complétement polarisée suivant le plan d'incidence si $p^2 + s'^2 = 0$, et l'angle d'incidence φ, déterminé par cette équation, sera l'angle de polarisation, conformément à la seconde définition.

Mais, comme on le voit, cette équation ne suffit pas en général; elle convient seulement dans les cas particuliers où s' est nulle indépendamment de φ; alors l'angle de polarisation est déterminé par $p = 0$.

Mais on peut donner à cette seconde définition une forme assez générale pour qu'elle puisse s'appliquer tant aux corps cristallisés qu'à ceux qui ne le sont pas, en disant : *L'angle de polarisation est l'angle d'incidence sous lequel la lumière naturelle doit être réfléchie pour être complétement polarisée.* Pour les corps non cristallisés, le plan de polarisation de la lumière complétement polarisée par réflexion coïncide toujours avec le plan de réflexion; ceci n'a plus lieu pour les corps cristallisés. C'est le docteur Seebeck qui a le premier fait connaître ce fait remarquable (*Pogg. Ann. de Phys.*, Bd. XXI), quoique Brewster (*Philos. Trans.*, 1819) l'eût déjà précédemment observé dans des circonstances particulières pour lesquelles l'écart entre le plan de polarisation et le plan de réflexion est singulièrement augmenté. Il est facile de déduire des équations (4), § VII, l'angle défini *de polarisation complète*, et l'azimut dans lequel a lieu cette polarisation. J'appellerai cet azimut *la déviation du plan de polarisation.*

Les deux mouvements R_s et R_p, dont le premier a lieu dans le plan de réflexion, le second perpendiculairement au même plan, peuvent se décomposer en deux, l'un parallèle au plan mené par le rayon réfléchi, et faisant avec le plan de réflexion l'angle α; l'autre perpendiculaire. Soient R'_s la première composante, R'_p la seconde; elles satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} R'_s &= R_p \sin\alpha + R_s \cos\alpha = P(p\sin\alpha + p'\cos\alpha) + S(s'\sin\alpha + s\cos\alpha), \\ R'_p &= R_p \cos\alpha - R_s \sin\alpha = P(p\cos\alpha - p'\sin\alpha) + S(s'\cos\alpha - s\sin\alpha). \end{aligned}$$

Le rayon réfléchi sera complétement polarisé dans l'azimut α si $R'_p = 0$, indépendamment de P et de S. On a donc, pour qu'une polarisation complète de la lumière naturelle puisse avoir lieu par réflexion, à satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} p\cos\alpha - p'\sin\alpha &= 0, \\ s'\cos\alpha - s\sin\alpha &= 0, \end{aligned}$$

ce qui peut toujours être pour un choix convenable de α et de l'angle d'incidence φ. L'angle α est l'azimut que nous avons appelé déviation du plan de polarisation. Si l'on élimine α entre ces équations, on aura, pour déterminer l'angle de polarisation,

$$ps - p's' = 0, \tag{3}$$

et la déviation du plan de polarisation est

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{s'}{s}. \tag{4}$$

J'appellerai dans la suite l'angle de polarisation complète déterminé par (3), *angle de polarisation*. Cette désignation sera plus brève, et l'angle qu'elle indique est celui qui me paraît présenter le plus d'analogie avec l'angle de polarisation des surfaces non cristallines; c'est le même angle que Seebeck a complétement déterminé par l'observation dans le spath calcaire pour différentes faces et différentes directions du plan de réflexion, et qu'il a aussi nommé angle de polarisation. Au reste, les différences entre les angles d'incidence déterminés par l'équation (3) et ceux déterminés par l'équation (1), où $p = 0$, sont du second ordre par rapport à la différence $(\pi^2 - \mu^2)$; ce n'est que dans les cristaux fortement réfringents, comme le spath calcaire, que des différences de cet ordre n'échappent pas à l'observation.

Dans le cas particulier où le plan de réflexion est parallèle à la section principale, c'est-à-dire, $\omega = 0$, on a $s' = 0$ et aussi conséquemment $\alpha = 0$, et l'angle de la polarisation complète dépend de $p = 0$, c'est-à-dire de l'équation

$$(5)\qquad C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi''\cos^2\varphi') = 0,$$

dans laquelle

$$\sin\varphi' = \mu\sin\varphi,$$

$$(6)\qquad \tang^2\varphi'' = \sin^2\varphi[\mu^2(C + A\tang\varphi'')^2 + \pi^2(A - C\tang\varphi'')^2];$$

de (5) on tire

$$\tang\varphi'' = \frac{A\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi'}{C\sin\varphi\cos\varphi + A\cos^2\varphi'},$$

et de là

$$A - C\tang\varphi'' = \frac{A^2\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi'}{A\cos^2\varphi' + C\sin\varphi\cos\varphi},\quad A\tang\varphi' + C = \frac{AC + \sin\varphi\cos\varphi}{A\cos^2\varphi' + C\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Avec ces trois équations on peut éliminer φ'' de l'équation (6), et obtenir :

$$\left(\frac{A\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi'}{\sin\varphi}\right)^2 - \mu^2(AC + \sin\varphi\cos\varphi)^2 = \pi^2(A^2\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi')^2.$$

Le premier membre de cette équation revient, comme il est facile de le voir, au produit suivant :

$$(A^2 - \sin^2\varphi')\ (1 - \mu^2C^2 - \sin^2\varphi),$$

d'où résulte que l'équation est linéaire par rapport à $\sin^2\varphi$. En ayant égard à la relation

$$A^2\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi' = A^2 - \sin^2\varphi',$$

elle devient

$$[1 - \mu^2C^2 - \pi^2A^2 - (1 - \pi^2\mu^2)\sin^2\varphi]\ (A^2 - \sin^2\varphi') = 0.$$

Le premier facteur est seul à considérer; il fournit l'angle de polarisation pour le cas où la section principale coïncide avec le plan de réflexion :

$$(7)\qquad \sin^2\varphi = \frac{(1 - \pi^2)A^2 + (1 - \mu^2)C^2}{1 - \pi^2\mu^2}.$$

C'est la même formule que Seebeck a déduite précédemment de considérations théoriques, et dont il a justifié l'exactitude par des observations. (*Pogg. Ann.*, Bd. XXII.)

Je vais maintenant examiner le cas qui, après celui que je viens de traiter, est le plus simple, celui où le plan de réflexion est perpendiculaire à la section principale ($\omega = 90°$). Si l'on porte dans (3) les valeurs de p, s, p', s', tirées de l'équation (5), § VII, qu'on développe les multiplications indiquées, et qu'on néglige les facteurs communs $\sin(\varphi - \varphi')$, $\sin(\varphi + \varphi')$ et N^2, dont le premier n'a de signification que dans le cas particulier où $\varphi = \varphi'$, c'est-à-dire où le milieu cristallisé est entouré d'un milieu non cristallisé dont l'indice de réfraction est égal à son indice *ordinaire* (cas particulier que j'étudierai spécialement plus tard), on obtient

$$\begin{aligned}
&A^2\cos(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')\sin(\varphi-\varphi'')\\
&+C^2\sin^2\varphi'(\sin^2\varphi''\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\cos^2\varphi''\sin^2\varphi'')\\
&+A^2C^2\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')\\
&+A^2C^2\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')=0.
\end{aligned}$$

Cette équation se résout en deux facteurs,

$$\begin{aligned}
&[A^2\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')+C^2\sin\varphi'(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi''\sin^2\varphi')]\\
&[A^2\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')+C^2\sin\varphi'(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')]=0,
\end{aligned}$$

dont le premier n'a aucune racine utile à la question actuelle, comme on s'en assure quand on pose $\varphi'=\varphi''$, c'est-à-dire quand on applique cette équation au cas d'un milieu non cristallisé. L'angle de polarisation est donc ainsi déterminé par le second facteur seulement,

$$(8)\qquad A^2\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')+C^2\sin\varphi'(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi''\sin^2\varphi')=0.$$

Il est facile d'éliminer φ'' au moyen de l'équation (2), que, dans ce cas, où $\cos\omega=0$, on peut écrire

$$\operatorname{tang}\varphi''=\frac{\mu\sin\varphi\sqrt{1+\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}A^2}}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi-\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}\mu^2\sin^2\varphi}},$$

ou avec la condition $\sin\varphi'=\mu\sin\varphi$,

$$(9)\qquad \operatorname{tang}\varphi''=\operatorname{tang}\varphi'\sqrt{\frac{1+\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}A^2}{1-\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}\operatorname{tang}^2\varphi'}}.$$

Si l'on fait,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
&A^2\cos(\varphi+\varphi')\sin\varphi-C^2\sin^2\varphi'=M,\\
&A^2\cos(\varphi+\varphi')\cos\varphi-C^2\sin\varphi'\sin\varphi\cos\varphi=N,
\end{aligned}\right.$$

on tire des équations (8) et (9) :

$$M^2\cos^2\varphi'-N^2\sin^2\varphi'=(M^2+N^2A^2)\sin^2\varphi'\,\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}.$$

A l'aide des équations (10), qui donnent

$$\begin{aligned}
&M\cos\varphi'-N\sin\varphi'=(A^2+C^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'),\\
&M\cos\varphi'+N\sin\varphi'=A^2\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi')-C^2\sin^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'),
\end{aligned}$$

cette équation devient :

$$(11)\ \cos(\varphi+\varphi')=\frac{(M^2+A^2N^2)\sin^2\varphi'\,\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}}{\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')(A^2+C^2\sin^2\varphi')[A^2\cos(\varphi+\varphi')-C^2\sin^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')]}.$$

On trouve ensuite, en mettant pour M et N leurs valeurs, que $M^2 + A^2N^2$ a pour facteur $A^2 + C^2\sin^2\varphi'$; d'ailleurs

$$\sin(\varphi - \varphi')\sin(\varphi + \varphi') = \frac{1-\mu^2}{\mu^2}\sin^2\varphi';$$

toutes ces relations transforment l'équation (11) en

$$(12)\qquad \cos(\varphi+\varphi') = \frac{(A^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi')^2 + A^2\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')\dfrac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}}{A^2\cos(\varphi+\varphi') - C^2\sin^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}.$$

Cette équation ne peut se résoudre que d'une manière approximative, car elle est du quatrième degré; pour plus de simplicité, on la met sous la forme des équations algébriques par la substitution suivante:

$$\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi} = x,$$

d'où

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{x^2-1}{x^2-\mu^2}, & \sin^2\varphi' &= \frac{\mu^2(x^2-1)}{x^2-\mu^2},\\ \cos^2\varphi &= \frac{1-\mu^2}{x^2-\mu^2}, & \cos^2\varphi' &= \frac{x^2(1-\mu^2)}{x^2-\mu^2}.\end{aligned}\right.$$

Elle se transforme par là dans l'équation suivante,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &A^2(x+\mu)^2(1-\mu x)^2 + C^2\mu^2(1-x^2)(1-\mu^2x^2)\\ &-\{[A^2(1-\mu^2)-\mu^2(x^2-1)]^2 + A^2(1-\mu^2)(x^2-1)(1-\mu x)^2\}\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}\end{aligned}\right\} = 0.$$

Des quatre racines, celle qui convient à la question doit être déterminée, en raison des relations (13), par la condition que si μ est plus petit que 1, x soit plus grande que 1, et réciproquement, si μ est plus grand que 1, x soit plus petite, tout en restant toujours positive.

La forme de l'équation (12) est très-propre au développement de $\sin^2\varphi$ suivant les puissances de $\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}$; en multipliant les deux membres par $\cos(\varphi-\varphi')$, et écrivant dans le premier, à la place de $\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')$, $1-(1+\mu^2)\sin^2\varphi$, on obtient

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}\left[1 - \frac{(A^2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi')^2 + A^2\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')}{A^2\cos(\varphi+\varphi') - C^2\sin^2\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}\cos(\varphi-\varphi')\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}\right],$$

et de là l'on tire

$$(15)\quad \sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}\left\{1 + \mu^2C^2\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4} + \frac{1}{4}[4\mu^4-(1-5\mu^2-\mu^4+\mu^6)A^2]C^2\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\right)^2 + \dots\right\}.$$

Pour essayer l'équation (12), j'ai calculé l'angle de polarisation du spath calcaire dans l'hypothèse d'un azimut $\omega = 90°$, et pour les faces sur lesquelles Seebeck l'avait déterminé par l'observation. Je rassemble les résultats du calcul et de l'observation dans le tableau suivant :

INCLINAISON de la surface réfléchissante sur l'axe.	ANGLES de polarisation calculés.	ANGLES de polarisation observés.	DIFFÉRENCES.
0° 12′	58° 54′,9	58° 56′	+ 1′,1
0 23	58. 54,9	58 56,1	+ 1,2
27. 2	59. 19,1	59. 3,9	− 15,2
45. 23,5	59. 53,4	59 50,9	− 2,5
45. 29	59. 53,5	59. 47,7	− 5,8
45 43,5	59. 54,1	59. 46,7	− 7,4
64. 1,5	60 26,3	60 14,8	− 11,7
89. 47,5		60. 33,4	

Pour développer l'équation générale de l'angle de polarisation, je pose

$$C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi''\cos^2\varphi') = M,$$
$$C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos^2\varphi') = M',$$
$$C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi' = N.$$

Par là l'équation (3) se change en la suivante, après lui avoir fait éprouver quelques réductions faciles à voir, et avoir supprimé le facteur commun $\frac{\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')}{N}$,

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'')A^4\sin^4\omega + N^2MM' \\ + \cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi')A^2\sin^2\omega NM' + \cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')A^2\sin^2\omega MN\end{array}\right\} = 0,$$

et celle-ci se décompose en deux facteurs

$$[\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')A^2\sin^2\omega + NM'],$$
$$[\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')A^2\sin^2\omega + NM],$$

dont le dernier contient seul les racines qui conviennent à la question. On s'en assure en faisant comme ci-dessus $\varphi' = \varphi''$. Si l'on y replace les valeurs de N et de M, on obtient l'équation suivante, qui détermine généralement l'angle de polarisation :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'')A^2\sin^2\omega + (C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi') \\ \times[C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi''\sin^2\varphi')] - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi''\cos^2\varphi')\end{array}\right\} = 0.$$

de laquelle on éliminera φ'' au moyen de l'équation

$$(17)\quad \tang^2\varphi''\left(\frac{1-\pi^2\sin^2\omega\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right) = \mu^2(C + A\cos\omega\tang\varphi'')^2 + \pi^2(A - C\cos\omega\tang\varphi'')^2.$$

M. Seebeck a entrepris une série d'observations sur l'angle de polarisation à la surface naturelle du spath calcaire dans différents azimuts. Pour ces mêmes azimuts, j'ai calculé les angles de polarisation d'après (16) et (17) et j'en présente les valeurs dans le tableau suivant, en regard de celles qu'a données l'observation.

	ANGLES DE P calculés.	ANGLES DE P observés.	DIFFÉRENCES.
0° 0′	57° 20′,1	57° 19′,7	− 0′,4
22.30	57.42,9	57.45,9	+ 3,0
45. 0	58.34,9	58 33,9	− 1,0
67.30	59.30,1	59.29,1	− 1,0
90. 0	59.53,4	59.50,9	− 2,5

Je ne crois pas qu'on puisse atteindre une concordance plus parfaite entre l'observation et la théorie; elle prouve à la fois et la justesse des principes qui ont été adoptés, et la grande habileté de l'observateur.

Comme le cas particulier que nous avons traité ($\omega = 90^\circ$) nous a conduits à une équation du quatrième degré, on ne peut pas espérer que les racines des équations (16) et (17) puissent s'exprimer autrement que par une série.

Il est facile de mettre ces équations sous une forme semblable à celle de (12), et de développer ensuite les racines suivant les puissances de $\frac{\pi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}$.

A l'inspection immédiate des équations (16) et (17), on voit que l'angle de polarisation est le même pour $+\omega$ et $-\omega$; mais on ne peut voir de même, et sans un examen attentif, que l'angle de polarisation ne change pas pour ω et $180^\circ - \omega$, comme Brewster l'a observé le premier, et comme Seebeck l'a confirmé.

Pour le reconnaître, je développai les racines de l'équation (16) suivant les puissances de $\pi^2 - \mu^2$, et je les trouvai jusqu'à la troisième puissance inclusivement indépendantes des puissances impaires de $\cos\omega$. D'après cela il me parut vraisemblable que le développement en était généralement indépendant. L'élimination de φ'' dans l'équation (16) me confirma dans cette opinion; mais mon calcul est trop long pour l'inscrire ici, d'autant plus qu'on m'a communiqué le calcul suivant, qui est plus court.

De (16) on tire la valeur

$$\tang \varphi'' = \frac{l + m\cos\omega}{n + p\cos\omega};$$

l, m, n, p, doivent seulement contenir des puissances paires de $\cos\omega$,

$$\begin{aligned}
l &= A^2\sin^2\omega\sin\varphi\cos(\varphi+\varphi') - C^2\sin^3\varphi' + A^2\cos^2\omega\cos\varphi'\sin\varphi\cos\varphi,\\
n &= A^2\sin^2\omega\cos\varphi\cos(\varphi+\varphi') - C^2\sin\varphi'\sin\varphi\cos\varphi + A^2\cos^2\omega\cos^3\varphi',\\
m &= AC\sin\varphi'(\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi),\\
p &= AC\cos\varphi'(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi'\cos\varphi').
\end{aligned}$$

Si l'on substitue partout dans ces expressions à $\sin\varphi\cos\varphi$ sa valeur

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi'\cos\varphi' + \cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
l &= A^2\cos(\varphi+\varphi')\,[\sin^2\omega\sin\varphi + \cos^2\omega\cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + \sin\varphi' M,\\
n &= \cos(\varphi+\varphi')\,[A^2\sin^2\omega\cos\varphi - C^2\sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + \cos\varphi' M,\\
m &= -\ AC\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'),\\
p &= \quad AC\cos\varphi'\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'),
\end{aligned}$$

où l'on pose pour abréger

$$M = A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi'.$$

Si l'on remplace en outre, dans les valeurs l, n, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par les valeurs

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= \sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi'),\\
\cos\varphi &= \cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - \sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi'),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
l &= A^2\cos(\varphi+\varphi')\,[\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + \sin\varphi' M,\\
n &= \cos(\varphi+\varphi')\,[A^2\sin^2\omega\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - (C^2+A^2\sin^2\omega)\sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + \cos\varphi' M.
\end{aligned}$$

Soient maintenant

$$\begin{aligned}
C + A\cos\omega\,\mathrm{tang}\,\varphi'' &= \frac{l'+m'\cos\omega}{n+p\cos\omega},\\
A - C\cos\omega\,\mathrm{tang}\,\varphi'' &= \frac{l''+m''\cos\omega}{n+p\cos\omega},\\
l' = Cn + C\cos^2\omega\, m, &\qquad m' = Cp + Al,\\
l'' = An + C\cos^2\omega\, m, &\qquad m'' = Ap - Cl,
\end{aligned}$$

ou, si l'on substitue les valeurs précédemment données pour l, m, n, p,

$$\begin{aligned}
l' &= C\cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - \sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + C\cos\varphi' M,\\
m' &= A\cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + A\sin\varphi' M;\\
l'' &= A\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')[A^2\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - \sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi')] + A\cos\varphi' M,\\
m'' &= -\ A^2C\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - C\sin\varphi' M.
\end{aligned}$$

Qu'à l'aide de ces expressions on forme les valeurs

$$\begin{aligned}
l \pm l'\sin\varphi, &\qquad m \pm l'\sin\varphi',\\
l\sin\omega \pm \sqrt{-1}\,.\,l'', &\qquad m\sin\omega \pm \sqrt{-1}\,.\,m'',
\end{aligned}$$

et qu'on pose pour abréger

$$\begin{aligned}
&\cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + (\cos\varphi'+C)\sin(\varphi-\varphi')] + \sin\varphi' M = D,\\
&\cos(\varphi+\varphi')[A^2\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + (\cos\varphi'-C)\sin(\varphi-\varphi')] + \sin\varphi' M = D',\\
&A\sin\omega\cos(\varphi+\varphi')\left[A\sin\omega\cos(\varphi-\varphi') - \sqrt{-1}\sin(\varphi-\varphi')\right] + M = E,\\
&A\sin\omega\cos(\varphi+\varphi')\left[A\sin\omega\cos(\varphi-\varphi') + \sqrt{-1}\sin(\varphi-\varphi')\right] + M = E',
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
-\ l'\sin\varphi' = (1-C\cos\varphi')D, &\qquad l + l'\sin\varphi' = (1+\cos\varphi')D',\\
m - m'\sin\varphi' = -\ A\sin\varphi' D, &\qquad m + m'\sin\varphi' = +\ A\sin\varphi' D'.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
l\sin\omega + \sqrt{-1}\;\; l'' &= \left(\sin\omega\sin\varphi' + \sqrt{-1}\,\mathrm{A}\cos\varphi'\right)\mathrm{E},\\
l\sin\omega - \sqrt{-1}\,.\,l'' &= \left(\sin\omega\sin\varphi' - \sqrt{-1}\,\mathrm{A}\cos\varphi'\right)\mathrm{E}',\\
m\sin\omega + \sqrt{-1}\,.\,m'' &= -\,\mathrm{C}\sqrt{-1}\sin\varphi'.\mathrm{E},\\
m\sin\omega - \sqrt{-1}\,.\,m'' &= \mathrm{C}\sqrt{-1}\sin\varphi'.\mathrm{E}'.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
&(n + p\cos\omega)[\operatorname{tang}\varphi'' - \sin\varphi'(\mathrm{C} + \mathrm{A}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')]\\
&\qquad = l + m\cos\omega - \sin\varphi'(l' + m'\cos\omega),\\
&(n + p\cos\omega)[\operatorname{tang}\varphi'' + \sin\varphi'(\mathrm{C} + \mathrm{A}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')]\\
&\qquad = l + m\cos\omega + \sin\varphi'(l' + m'\cos\omega),\\
&(n + p\cos\omega)\left[\sin\omega\operatorname{tang}\varphi'' + \sqrt{-1}\,(\mathrm{A} - \mathrm{C}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad = \sin\omega(l + m\cos\omega) + \sqrt{-1}\,(l'' + m''\cos\omega),\\
&(n + p\cos\omega)\left[\sin\omega\operatorname{tang}\varphi'' - \sqrt{-1}\,(\mathrm{A} - \mathrm{C}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad = \sin\omega(l + m\cos\omega) - \sqrt{-1}\,(l'' + m''\cos\omega),
\end{aligned}$$

et par conséquent, si l'on pose $n + p\cos\omega = \mathrm{N}$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}[\operatorname{tang}\varphi'' - \sin\varphi'(\mathrm{C} + \mathrm{A}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')] = (1 - \mathrm{C}\cos\varphi' - \mathrm{A}\cos\omega\sin\varphi')\,\mathrm{D},\\
&\mathrm{N}[\operatorname{tang}\varphi'' + \sin\varphi'(\mathrm{C} + \mathrm{A}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')] = (1 + \mathrm{C}\cos\varphi' + \mathrm{A}\cos\omega\sin\varphi')\,\mathrm{D}'.\\
&\qquad \mathrm{N}\left[\sin\omega\operatorname{tang}\varphi'' + \sqrt{-1}\,(\mathrm{A} - \mathrm{C}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad\qquad = \left[\sin\omega\sin\varphi' + \sqrt{-1}\,(\mathrm{A}\cos\varphi' - \mathrm{C}\cos\omega\sin\varphi')\right]\mathrm{E},\\
&\qquad \mathrm{N}\left[\sin\omega\operatorname{tang}\varphi'' - \sqrt{-1}\,(\mathrm{A} - \mathrm{C}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')\right]\\
&\qquad\qquad = \left[\sin\omega\sin\varphi' - \sqrt{-1}\,(\mathrm{A}\cos\varphi' - \mathrm{C}\cos\omega\sin\varphi')\right]\mathrm{E}'.
\end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (17), que l'on peut présenter ainsi,

$$\operatorname{tang}^2\varphi'' - \sin^2\varphi'(\mathrm{C} + \mathrm{A}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')^2 = \pi^2\sin^2\varphi\,[\sin^2\omega\operatorname{tang}^2\varphi'' + (\mathrm{A} - \mathrm{C}\cos\omega\operatorname{tang}\varphi'')^2],$$

on obtient, en tenant compte de la condition

$$1 - (\mathrm{C}\cos\varphi' + \mathrm{A}\cos\omega\sin\varphi')^2 = \sin^2\omega\sin^2\varphi' + (\mathrm{A}\cos\varphi' - \mathrm{C}\cos\omega\sin\varphi')^2,$$

l'équation

$$0 = [1 - (\mathrm{C}\cos\varphi' + \mathrm{A}\cos\omega\sin\varphi')^2]\,[\mathrm{DD}' - \pi^2\sin^2\varphi\,\mathrm{EE}'],$$

qui se réduit à la suivante, le premier facteur ne pouvant disparaître pour une valeur réelle de φ',

$$(18) \qquad 0 = \mathrm{DD}' - \pi^2\sin^2\varphi\,\mathrm{EE}',$$

dans laquelle se trouvent seulement des puissances paires de $\cos\omega$.

C'est là l'équation à l'aide de laquelle on détermine généralement l'angle de polarisation après avoir éliminé φ''. Si l'on met pour D, D', E, E', leurs valeurs, on arrive à l'équation

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\begin{aligned}&\cos(\varphi+\varphi')(A^2\sin^2\omega\sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi')+\cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi'))\\ &\quad+\sin\varphi'(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi')\end{aligned}\right]^2\\ &\quad=\pi^2\sin^2\varphi\left[\begin{aligned}&A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\\ &\quad+A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi'\end{aligned}\right]^2\\ &\quad+\pi^2\sin^2\varphi A^2\sin^2\omega\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')\\ &\quad+C^2\sin^2(\varphi-\varphi')\cos^2(\varphi+\varphi').\end{aligned}\right.$$

Si l'on met pour $\pi^2\sin^2\varphi$ sa valeur

$$\pi^2\sin^2\varphi = \sin^2\varphi' + (\pi^2-\mu^2)\sin^2\varphi,$$

et si l'on donne à (19) la forme

$$(20)\qquad R = S(\pi^2-\mu^2)\sin^2\varphi,$$

on trouve

$$R = \cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')\left[\begin{aligned}&A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\\ &+(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\end{aligned}\right],$$

$$S = \left\{\begin{aligned}&[A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')+A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi']^2\\ &\quad+A^2\sin^2\omega\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')\end{aligned}\right\};$$

on a donc, si, au lieu de $\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')$, on écrit sa valeur $(1-\mu^2)\sin^2\varphi$,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}&\cos(\varphi+\varphi') = \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}\\ &\times\frac{[A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')+A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi']^2+A^2\sin^2\omega\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')}{A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')+(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\end{aligned}\right\}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $\cos(\varphi-\varphi')$, et qu'à la place de $\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')$ on écrive sa valeur $1-(1+\mu^2)\sin^2\varphi$, on obtient

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}&\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}-\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\\ &\times\left\{\frac{[A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')+A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi']^2+A^2\sin^2\omega\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')}{A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')+(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\right\}\cos(\varphi-\varphi'),\end{aligned}\right.$$

forme très-convenable pour le développement de $\sin^2\varphi$, suivant les puissances de $\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}$. Comme $\cos(\varphi+\varphi')$ disparaît en même temps que $\pi^2-\mu^2$, on obtient immédiatement le terme de $\sin^2\varphi$ qui dépend de la première puissance de $\pi^2-\mu^2$, en posant $\cos(\varphi+\varphi')=0$:

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin^2\varphi = \dfrac{1}{1+\mu^2} - \dfrac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\,(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi'), \\ \text{ou} \\ \sin^2\varphi = \dfrac{1}{1+\mu^2} - \dfrac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\left(\dfrac{A^2\cos^2\omega - C^2\mu^2}{1+\mu^2}\right). \end{array}\right.$$

Si l'on veut encore obtenir le terme suivant qui dépend de $(\pi^2-\mu^2)^2$, on peut poser dans l'équation (22) $\cos^2(\varphi+\varphi')=0$, et l'on obtient alors

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}$$
$$\times\left\{(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi)\left\{\frac{[A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi' + 2A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')]\cos(\varphi-\varphi')}{(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')}\right\}\right\},$$

ou bien

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1-\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\cos(\varphi+\varphi')\,A^2\sin^2\omega\,\frac{\cos 2(\varphi-\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}.$$

Si l'on porte dans le second membre de cette équation la valeur de $\sin^2\varphi$ de l'équation (23), et si l'on néglige la troisième puissance de $\pi^2-\mu^2$, on trouve

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin^2\varphi = \dfrac{1}{1+\mu^2} - \dfrac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^3}\left(\dfrac{A^2\cos^2\omega - C^2\mu^2}{1+\mu^2}\right) \\ -\left(\dfrac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\right)^2 (A^2\cos^2\omega - C^2\mu^2)\left\{\dfrac{(A^2\cos^2\omega + C^2)}{1+\mu^2}\mu^2 + A^2\sin^2\omega\left[1-\left(\dfrac{1-\mu^2}{2\mu^2}\right)^2\right]\right\}. \end{array}\right.$$

On voit que $\sin^2\varphi = \dfrac{1}{1+\mu^2}$ dans l'azimut ω', pour lequel $\cos\omega' = \pm\dfrac{C}{A}\mu$. Dans ces quatre azimuts la surface cristalline se comporte donc comme la surface d'un corps non cristallisé à l'indice de réfraction $\dfrac{1}{\mu}$, et $\cos(\varphi+\varphi')$ est nul ; et ceci n'a pas lieu seulement approximativement, mais rigoureusement, comme on le voit par l'équation (21). D'où résulte que, si $\cos(\varphi+\varphi')=0$, $A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi' = 0$, et réciproquement.

Il peut être intéressant d'avoir l'équation (19) dans la forme ordinaire de l'équation algébrique. On y parvient de la manière la plus simple, à l'aide de la substitution précédemment employée, savoir :

$$\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi} = x,$$

ce qui donne l'équation

$$\begin{array}{l} [\mu(A^2\sin^2\omega + \mu^2C^2) + (1-\mu^2)x - \mu(1-A^2\cos^2\omega)x^2]^2 \\ -\pi^2[A^2\sin^2\omega + \mu^2C^2 - (\mu^2 - A^2\cos^2\omega)x^2]^2 \\ +(1-\mu^2)[\pi^2A^2\sin^2\omega + \mu^2C^2 - (\pi^2A^2\sin^2\omega + C^2)x^2](1-\mu x)^2 = 0, \end{array}$$

dont je ne m'arrêterai pas à donner le développement suivant les puissances de x

§ IX.

Je vais m'occuper maintenant de l'équation (4) du précédent paragraphe, équation qui détermine la *déviation du plan de polarisation* par réflexion. L'angle désigné par φ dans cette équation représente l'angle de polarisation. La valeur de s' est, d'après l'équation (5), § VII,

$$s' = -\frac{1}{N} A \sin\omega \sin(\varphi' - \varphi'') (C \sin\varphi' + A \cos\omega \cos\varphi') \sin 2\varphi,$$

et la valeur de s se change par là même, quand on y met à la place du produit

$$A^2 \sin^2\omega \times \sin(\varphi - \varphi')$$

sa valeur déduite de l'équation (16), § VIII, dans l'expression suivante :

$$s = -\frac{1}{N} \frac{(C^2 \sin^2\varphi' - A^2 \cos^2\omega \cos^2\varphi') \sin(\varphi' - \varphi'') \sin 2\varphi}{\cos(\varphi + \varphi')};$$

on obtient d'après cela, pour la déviation du plan de polarisation α,

$$\tag{1} \tang \alpha = \frac{A \sin\omega \cos(\varphi + \varphi')}{C \sin\varphi' - A \cos\omega \cos\varphi'}.$$

Ce résultat simple et élégant se traduit dans le théorème suivant :

La tangente de la déviation du plan de polarisation est égale à la tangente de l'angle que le plan de polarisation de l'onde ordinaire fait avec le plan d'incidence, multipliée par le cosinus de la somme des angles de polarisation complète et de réfraction ordinaire qui lui correspondent.

Quant à l'expression $\frac{A \sin\omega}{C \sin\varphi' - A \cos\omega \cos\varphi'}$, prise pour la tangente de l'angle que le plan d'incidence fait avec la direction du mouvement dans l'onde réfractée ordinairement, c'est-à-dire avec son plan de polarisation, il est facile de se convaincre qu'elle est exacte d'après les équations (2), § V, 2, dans lesquelles le sinus de cet angle est, d'après les notations expliquées aux paragraphes IV et V, exprimé par

$$R'_a E' + R'_b E'' + R'_c E''' = \frac{A \sin\omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}.$$

Si l'on veut savoir dans quel azimut la déviation de la polarisation disparaît, on se servira de l'observation faite ci-dessus que $\cos(\varphi + \varphi')$ disparaît en même temps que $(C^2 \sin^2\varphi' - A^2 \cos^2\omega \cos^2\varphi')$, et s'annulle seulement dans ce cas. La déviation du plan de polarisation sera donc nulle si

$$\tag{2} A \sin\omega (C \sin\varphi' + A \cos\varphi' \cos\omega) = 0.$$

D'après cela, aucune déviation n'a lieu.

1°. Quand $A = 0$;

2°. Quand $\omega = 0$ ou $180°$, c'est-à-dire quand le plan de réflexion est parallèle à la section principale;

3°. Quand $\cos\omega = -\frac{C}{A}\tang\varphi' = -\frac{C}{A}\mu$.

En effet, quand $\tang(\varphi + \varphi') = 0$, $\tang\varphi' = \mu$.

La troisième équation détermine, en général, deux azimuts de même valeur, mais de signes contraires. Tout plan réflecteur est donc en général divisé en quatre parties analogues à celles que déterminent sur le plan de la figure (*fig.* 5), la *ligne principale* HH', et les lignes AB, BC, de telle sorte que les deux parties adjacentes donnent des déviations de signes contraires et soient séparées par des lignes sans déviation. La direction HH' divise le système total des déviations en deux moitiés symétriques. Les deux autres lignes sans déviation AB et CD se confondent en une seule ligne qui est perpendiculaire à HH' quand le plan réflecteur devient parallèle à l'axe. Plus le plan réfléchissant s'incline sur l'axe, plus les lignes AB, BC s'approchent de HH', et s'en approchent du côté H' qui se trouve dans l'azimut $\omega = 180°$, situé de telle manière que la ligne HH' fasse en H un angle aigu avec l'axe mené par H au-dessous du plan. Il y a une certaine inclinaison du plan réfléchissant sur l'axe pour laquelle les deux lignes AB et BC se confondent avec BH', et pour laquelle il n'y a plus sur la face qu'une seule ligne sans déviation, la ligne principale; cette inclinaison est déterminée par l'équation

$$\frac{A}{C} = \tang\varphi' = \mu.$$

Pour le spath calcaire, cette inclinaison est de 58°55'.

Si dans l'équation (1) on néglige tout ce qui dépend de la seconde puissance de $(\mu^2 - \pi^2)$, on peut, de l'équation (21) du paragraphe précédent, tirer

$$\cos(\varphi + \varphi') = \frac{\pi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \frac{A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi'}{\cos(\varphi - \varphi')},$$

rappelant que $\sin^2\varphi = \frac{1}{1 + \mu^2}$, on obtient

$$\cos(\varphi + \varphi') = \frac{\pi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \left(\frac{A^2\cos^2\omega - C^2\mu^2}{2\mu}\right).$$

Ceci donne

$$\tang\alpha = A\sin\omega\,(A\cos\omega + C\mu)\,\frac{1 + \mu^2}{2\mu} \cdot \frac{\mu^2 - \pi^2}{1 - \mu^2}.$$

La déviation α est donc, pour les substances comme le spath calcaire, dans lesquelles $\pi > \mu$, positive depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \omega' = \text{arc}\left(\cos = -\frac{C}{A}\mu\right)$; de $\omega = \omega'$ jusqu'à $\omega = 180°$ elle est négative. L'inverse a lieu quand $\pi < \mu$. Il semble nécessaire de bien éclaircir ce qu'on entend par inclinaisons positives et négatives.

Soient, *fig.* 6, H'HK un rhomboèdre de spath calcaire, H le sommet de l'angle solide obtus, HH' la ligne principale de la face HH'G.

Soient en outre EI un rayon lumineux incident réfléchi suivant IR vers l'œil placé en R; *er* l'intersection du plan réflecteur HH'G par le plan d'incidence RIE, eIE $= 180^\circ - \varphi$ et HIE $= \omega$.

Si le rayon IR est complétement polarisé par réflexion, et si α a une valeur négative, son plan de polarisation est à gauche pour l'œil placé en R. Ceci résulte de ce que nous avons admis dans les formules (11), § VI, que le mouvement P s'éloigne du plan d'incidence vers la droite, que le mouvement S se fait dans le plan d'incidence de bas en haut, et que les mouvements R_p, R_s ont lieu respectivement suivant les mêmes directions.

Pour obtenir les *maximum* de α, il suffit d'égaler à zéro la différentielle de cette expression prise par rapport à ω; on trouve l'équation suivante :

$$(3) \qquad \cos\omega = -\frac{1}{4}\frac{C}{A}\mu \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\frac{C^2}{A^2}\mu^2}.$$

Des deux directions déterminées par cette équation, l'une change de $\omega = 45^\circ$ jusqu'à $\omega = 90^\circ$, l'autre de $\omega = 135^\circ$ jusqu'à $\omega = 180^\circ$ pendant que l'inclinaison du plan réfléchissant sur l'axe varie de 0° à 90°, mais de telle sorte que la dernière atteint beaucoup plus vite l'azimut 180° que la première ne s'approche de 90°; si $\frac{A}{C} = \mu$, celle-ci est éloignée de l'azimut 90° de l'angle $(\cos = \frac{1}{2})$, tandis que la seconde direction est déjà dans l'azimut 180°, et s'est évanouie en même temps comme direction correspondante à un maximum. De la position d'un plan incliné sur l'axe d'un angle correspondant à la condition $\frac{A}{C} = \mu$, à celle d'un plan perpendiculaire à l'axe, il n'y a qu'une seule ligne de plus grande déviation ; cette ligne s'approche de plus en plus de la perpendiculaire à la ligne principale, à mesure que le maximum devient plus petit, et, si ce maximum s'annulle, la ligne sans déviation se place perpendiculairement à la ligne principale. Pour le plan perpendiculaire à l'axe, la déviation est, dans tous les azimuts, égale à zéro.

J'ai été heureux de voir ces résultats de la théorie de la déviation du plan de polarisation tellement confirmés par les observations de M. Seebeck, que l'accord le plus parfait s'est trouvé entre les valeurs déduites du calcul et les valeurs observées. Cet accord est vraiment admirable, dans des phénomènes si délicats et si fugaces, et montre bien la grande habileté et la rare précision de l'observateur. M. Seebeck publiera très-prochainement sans doute ses observations, et je dois laisser le lecteur s'assurer par lui-même de leur perfection.

Jusqu'à présent nous nous sommes occupés du cas où de la lumière non polarisée était réfléchie par les surfaces cristallines. Nous admettrons maintenant que la lumière est polarisée avant de tomber sur la surface réfléchissante. Je désignerai par a l'azimut de la polarisation primitive, ce qui revient à faire dans les formules (4), § VI, $\frac{P}{S} = \tang a$.

Le plan de polarisation de la lumière réfléchie tournera d'une certaine quantité par réflexion, et je désignerai par δ son nouvel azimut, δ satisfaisant à la relation générale

$\operatorname{tang} \delta = \dfrac{R_p}{R_s}$. Le rayon incident étant polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, soit δ_p la rotation de son plan de polarisation, c'est-à-dire l'angle que le plan de polarisation fait avec le plan perpendiculaire au plan de réflexion; soit δ_s la rotation du plan de polarisation d'un rayon polarisé parallèlement au plan d'incidence.

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} \delta_p &= \frac{p'}{p},\\ \operatorname{tang} \delta_s &= \frac{s'}{s}.\end{aligned}\right.$$

On peut mettre les expressions de p, p', s, s' dans (5) sous les formes suivantes, en ordonnant les termes suivant la différence des réfractions φ', φ'' :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} Np &= \sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi')(1-\gamma'^2)\cos(\varphi'-\varphi'') - M\sin(\varphi'-\varphi''),\\ Ns &= -\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi-\varphi')(1-\gamma'^2)\cos(\varphi'-\varphi'') - M\sin(\varphi'-\varphi'').\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose pour abréger

$$\begin{aligned} T &= \gamma'\sin\varphi\cos\varphi' + C\sin^3\varphi' + A\cos\omega\cos^3\varphi',\\ T' &= \gamma'\sin\varphi\cos\varphi' - C\sin^3\varphi' - A\cos\omega\cos^3\varphi',\end{aligned}$$

les valeurs de M et M' sont les suivantes :

$$\begin{aligned} M &= \sin(\varphi-\varphi')\cos^2(\varphi+\varphi')A^2\sin^2\omega + \sin(\varphi+\varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')T,\\ M' &= \sin(\varphi+\varphi')\cos^2(\varphi-\varphi')A^2\sin^2\omega - \sin(\varphi-\varphi')(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')T'.\end{aligned}$$

Les valeurs de p' et de s' sont d'après (5), § VI, les suivantes :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} Np' &= -A\sin\omega(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')\\ Ns' &= -A\sin\omega(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'').\end{aligned}\right.$$

Ces valeurs de p, s, p', s', substituées dans les équations (4), donnent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\delta_p &= \frac{-A\sin\omega(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\operatorname{tang}(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi+\varphi')(1-\gamma'^2) - M\operatorname{tang}(\varphi'-\varphi'')},\\ \operatorname{tang}\delta_s &= \frac{A\sin\omega(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin 2\varphi\operatorname{tang}(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi-\varphi')(1-\gamma'^2) + M'\operatorname{tang}(\varphi'-\varphi'')}.\end{aligned}\right.$$

La tangente $(\varphi'-\varphi'')$ dépend d'une équation du deuxième degré, qu'on forme facilement de

$$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi[\pi^2 + (\mu^2-\pi^2)\gamma''^2] \quad \text{et de} \quad \sin^2\varphi' = \mu^2\sin^2\varphi.$$

Si l'on retranche ces deux equations l'une de l'autre, on obtient

$$\sin(\varphi'-\varphi'')\sin(\varphi'+\varphi'') = (1-\gamma'^2)\sin^2\varphi'\,\frac{\mu^2-\pi^2}{\mu^2}.$$

Si dans cette équation on met partout, à la place de φ'', $\varphi' - (\varphi'-\varphi'')$, et si l'on divise par $\cos^2(\varphi'-\varphi'')$, on obtient l'équation qui donne $\operatorname{tang}(\varphi'-\varphi'')$, dont la plus petite racine convient seule à l'équation (7). Si l'on veut la valeur numérique de cette racine, il est préférable de la déduire de l'équation (8) par un procédé d'approximation.

Si dans les valeurs de tang δ_p, tang δ_s on ne veut conserver que les premières puissances de $\frac{\mu^2 - \pi^2}{\mu^2}$, on devra, dans tang δ_p, ne pas négliger le terme de tang $(\varphi' - \varphi'')$ qui dépend de $\left(\frac{\mu^2 - \pi^2}{\mu^2}\right)^2$, dans le cas où la réflexion a lieu dans le voisinage de l'angle de polarisation, parce qu'alors cos $(\varphi + \varphi')$ contient aussi le facteur $\mu^2 - \pi^2$. Si la réflexion s'opère sous l'angle de polarisation, les deux déviations δ_p et δ_s sont complémentaires, et δ_s devient en même temps égale à α, c'est-à-dire à l'angle de *déviation* du plan de polarisation, comme cela résulte des formules (3) et (4), § VIII.

Ces deux déviations δ_s, δ_p disparaissent sur la face perpendiculaire à l'axe, et changent sur chaque face quand le plan de réflexion est parallèle à la ligne principale. D'ailleurs il existe sur chaque face, pour tout azimut du plan de réflexion entre 0° et $\pm$ 90°, un angle d'incidence pour lequel $\delta_p = 0$, et pour tout azimut entre $\pm$ 90° et 180°, un angle d'incidence pour lequel δ_s disparaît. Le système de ces deux angles d'incidence est divisé symétriquement par la ligne principale du plan réfléchissant. Pour obtenir pour un plan réflecteur quelconque le système des rayons à polarisation parallèle et perpendiculaire qui ne subissent pas de rotation, on peut employer la construction suivante.

Soit HH', *fig.* 7, la ligne principale du plan réflecteur qui fait en H un angle aigu avec l'axe mené au-dessous. Comme centre du cristal, prenons un point situé sur la normale élevée en N à la surface réfringente, et distant de N d'une longueur $= 1$. Faisons

$$MN = M'N = \tfrac{1}{2} AC,$$

et des points M et M', avec le rayon MN, décrivons deux cercles. Toute ligne menée du centre du cristal à la périphérie du cercle M représente un rayon ordinaire, procédant d'un rayon incident dont la polarisation primitivement perpendiculaire n'éprouve nulle déviation; tandis que les rayons qui vont du centre à la périphérie du cercle M' proviennent par réfraction ordinaire de rayons incidents, dont la polarisation primitivement parallèle n'éprouve aucune déviation.

Quel doit être l'azimut du rayon incident pour que le rayon réfléchi soit polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan de réflexion?

Je désignerai le premier azimut par d_s, le second par d_p. Des équations (4) il résulte que, si le rayon réfléchi est polarisé parallèlement au plan de réflexion, $R_p = 0$; alors aussi $\frac{P}{S} = -\frac{s'}{p}$, et par conséquent

$$-\frac{s'}{p} = \text{tang}\, d_s.$$

Les mêmes considérations font voir que

$$(8) \qquad -\frac{s}{p'} = \text{tang}\, d_p.$$

Ces deux azimuts des plans primitifs de polarisation d_s et d_p deviennent égaux quand la réflexion se fait sous l'angle de polarisation complète, car ce dernier est, d'après l'éq. (3), § VIII, déterminé par $\frac{s'}{p} = \frac{s}{p'}$. *Dans cet azimut aucune portion de lumière n'est réfléchie.* Quand φ est mis pour l'angle de polarisation complète, $-\frac{s}{p'}$ ou $-\frac{s'}{p}$ est la tangente de l'azimut dans lequel doit être un rayon préalablement polarisé pour qu'il disparaisse totalement par la réflexion sous l'angle de polarisation. Cette tangente est à la tangente de la déviation du plan de polarisation complète comme $-s$ est à p. On voit qu'on peut aussi définir l'angle de la polarisation complète par réflexion l'angle d'incidence sous lequel un rayon polarisé dans l'azimut d_s ou d_p n'est pas réfléchi.

Du reste, on voit que d_s et δ_s, aussi bien que $90 - d_p$ et δ_p, disparaissent en même temps, et que, pour le même angle d'incidence et le même plan d'incidence,

$$\frac{\operatorname{tang} \delta_s}{\operatorname{tang} d_s} = \frac{\cot d_p}{\operatorname{tang} \delta_p}.$$

L'expression générale pour l'azimut δ du plan de polarisation du rayon réfléchi, l'azimut de la polarisation primitive étant α $\left(\operatorname{tang} \alpha = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}\right)$, est la suivante,

$$(9) \qquad \operatorname{tang} \delta = \frac{\frac{p}{s} \operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \delta_s}{1 - \cot d_p \operatorname{tang} \alpha}.$$

§ X.

Jusqu'à présent j'ai admis que $\pi^2 - \mu^2$ était une très-petite quantité par rapport à $1 - \mu^2$, ce qui est vrai lorsque le cristal est entouré d'air. Mais si $1 - \mu^2$ est lui-même une petite quantité ou presque égal à zéro, il existe alors des propriétés qu'il est d'autant plus intéressant de rechercher, que Brewster les a depuis longtemps étudiées expérimentalement, et qu'il paraît avoir tout récemment entrepris sur ce sujet des recherches qui promettent beaucoup. Ce cas a lieu lorsque sur la face réfléchissante du cristal se trouve une couche d'un liquide dans lequel la lumière a sensiblement la même vitesse de propagation que dans le cristal. Il résulte de là que quelques quantités qui dépendent de la double réfraction reçoivent des valeurs exagérées, par exemple l'angle que nous avons appelé la *déviation* du plan de polarisation, lequel, lorsque la lumière tombe de l'air sur le cristal, est seulement de quelques degrés, et qui, pour un choix convenable du liquide, peut aller jusqu'à 90°. Ce fut par les énormes accroissements de cet angle que Brewster fut conduit à la découverte de la *déviation* du plan de polarisation. (*Philos. Trans.*, 1819.)

Je vais donc encore une fois m'occuper des équations de l'angle de polarisation et de la polarisation, dans l'hypothèse où $1-\mu^2$ serait une petite quantité, ou bien φ peu différent de φ'.

Si l'on développe l'équation de l'angle de polarisation (16), § VIII, suivant les puissances de $\sin(\varphi-\varphi')=\dfrac{(1-\mu^2)\sin^2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')}$, et si l'on néglige les termes du troisième ordre ou d'un degré plus élevé par rapport à $1-\mu^2$ et $\pi^2-\mu^2$, on obtient

$$(1)\quad (1-\mu^2)\cos(\varphi+\varphi')-(\pi^2-\mu^2)\left[A^2\sin^2\omega\cos(\varphi+\varphi')+A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi'-C^2\sin^2\varphi'\right]=0.$$

Dans cette équation on peut poser avec le même degré d'approximation

$$\cos(\varphi+\varphi')=\cos 2\varphi'-\frac{1-\mu^2}{\mu^2}\sin^2\varphi';$$

posant ensuite pour $\cos 2\varphi'$ sa valeur $\cos^2\varphi'-\sin^2\varphi'$, et divisant l'équation par $\cos^2\varphi'$, on obtient

$$(2)\qquad \operatorname{tang}^2\varphi'=\frac{\mu^2[(1-\pi^2)A^2+(1-\mu^2)C^2]}{[1-\mu^2-(\pi^2-\mu^2)\sin^2\omega]A^2+[1-\mu^2-\mu^2(\pi^2-\mu^2)]C^2},$$

d'où

$$(3)\qquad \sin^2\varphi=\frac{(1-\pi^2)A^2+(1-\mu^2)C^2}{1-\mu^2\pi^2-(\pi^2-\mu^2)A^2\sin^2\omega}.$$

Pour le cas où $\sin\omega=0$, cette expression donne pour le sinus de l'angle de polarisation un résultat exact, le même que celui qui est donné par l'équation (7), § VIII.

Aussi longtemps que π^2 et μ^2 (ou bien, si, au lieu de supposer la vitesse de la lumière dans le liquide en contact avec le cristal égale à l'unité, on l'appelle v), aussi longtemps que $\dfrac{\pi^2}{v^2}$ et $\dfrac{\mu^2}{v^2}$ seront plus petits que l'unité, $\sin\varphi$ aura une valeur possible; cette valeur sera encore réelle si tous les deux à la fois sont plus grands que 1. On voit cela avec la plus grande facilité quand on pose

$$\frac{\pi^2}{v^2}=1-\psi,\quad \frac{\mu^2}{v^2}=1-\nu;$$

par là on obtient

$$(4)\qquad \sin^2\varphi=\frac{\psi A^2+\nu C^2}{[\psi+\nu-\psi\nu-(\nu-\psi)\sin^2\omega]A^2+(\psi+\nu-\psi\nu)C^2};$$

et si l'on néglige le produit $\psi\nu$,

$$(5)\qquad \sin^2\varphi=\frac{\psi A^2+\nu C^2}{[\nu+\psi-(\nu-\psi)\sin^2\omega]A^2+(\nu+\psi)C^2}.$$

Les deux limites sont :

$$\psi=0,\quad \sin^2\varphi=\frac{C^2}{1-A^2\sin^2\omega};$$

$$\nu=0,\quad \sin^2\varphi=\frac{A^2}{1+A^2\sin^2\omega}.$$

La dernière équation a perdu toute signification, car, du moment où le liquide ambiant a exactement le même coefficient que le cristal pour la réfraction ordinaire, il n'y a plus aucun angle particulier de polarisation complète. Nous verrons que, dans ce cas particulier, tout rayon réfléchi est complétement polarisé. Nous éclaircirons plus tard cette singulière circonstance que l'équation (4) convienne pour toute valeur de ν aussi petite qu'on voudra et ne convienne plus pour $\nu = 0$.

L'équation (4) donne toujours pour φ une valeur réelle, tout autant que ν et ψ sont en même temps positifs ou en même temps négatifs. Mais si ces deux quantités ont des signes contraires, l'angle de polarisation devient impossible. Si, par exemple, le liquide ambiant possède un coefficient de réfraction qui tienne le milieu juste entre le coefficient de réfraction ordinaire et le coefficient de réfraction extraordinaire, si en outre $\psi = -\nu$, nous obtenons

$$\sin^2\varphi = \frac{A^2 - C^2}{\psi + 2A^2\sin^2\omega};$$

ce qui donne pour sin φ une valeur imaginaire, pour toutes les faces qui font avec l'axe un angle plus aigu que 45°, et pour les faces qui restent il n'y a qu'un nombre limité d'azimuts où l'angle de polarisation soit réel. Sur une face parallèle à l'axe, pour $\omega = 0$ l'angle de polarisation est donné par $\sin^2\varphi = \frac{1}{2+\psi}$; pour $\omega = 45°$, par $\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\psi}$; l'angle φ est ainsi très-près de 90°, et pour des valeurs plus petites de ω devient bientôt impossible. Dans l'azimut $\omega = 0$ il n'y a de valeurs réelles pour l'angle de polarisation que dans le petit intervalle de 45° à $A^2 - C^2 = \psi$ des inclinaisons des faces sur l'axe, et dans ce petit intervalle ces valeurs passent de 0° à 90°; on voit donc qu'en mettant un semblable liquide sur la face d'un cristal, l'influence de la structure cristalline sur l'angle de polarisation peut être énormément exaltée.

L'équation pour la déviation du plan de polarisation (1), § IX, se change dans l'équation

$$\tang\alpha = \frac{(\mu^2 - \pi^2)A\sin\omega(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')}{1 - \mu^2 - (\pi^2 - \mu^2)A^2\sin^2\omega}$$

quand à la place de $\cos(\varphi + \varphi')$ on met sa valeur, tirée de l'équation (1) de ce paragraphe, savoir,

$$(6) \qquad \cos(\varphi + \varphi') = \frac{(\pi^2 - \mu^2)(A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi' - C^2\sin^2\varphi')}{1 - \mu^2 - (\pi^2 - \mu^2)A^2\sin^2\omega}.$$

Cette formule devrait représenter les observations que Brewster a fait connaître dans les *Trans. Philos.*, 1819, sur les déviations de la polarisation à la limite commune du spath calcaire et de l'huile de cassia, si elles avaient été exactement observées sous l'angle de polarisation, ce qui ne paraît pas être; car cet angle varie entre 30° et 45° environ à la face naturelle du spath couvert d'huile de cassia, et Brewster semble n'avoir observé que dans le voisinage de l'incidence 45°. Je vais cependant, à l'aide de cette formule, calculer la déviation du plan de polarisation pour le cas où la face du spath calcaire couverte d'huile de cassia est le plan réfléchissant, et rapprocher mes résultats des observations de Brewster. Si nous ne trouvons pas, en raison de la circonstance que j'ai indiquée, une grande concordance entre le calcul et l'observation, la marche des déviations du plan de polarisation sera du moins la même, ce qu'on doit déjà considérer comme une sorte de vérification de l'équation (5). La formule de la déviation se change, quand le plan réflecteur est incliné de 90° sur l'axe, ce qui est à peu près le cas des faces de clivage du spath calcaire, en

$$(7)\qquad \tang\alpha = \frac{\frac{\mu^2-\pi^2}{2}\sin\omega\,(\sin\varphi' + \cos\omega\cos\varphi')}{1-\mu^2-\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin^2\omega}.$$

Comme l'indice de réfraction de l'huile de cassia n'est pas connu exactement, je prendrai pour base de mon calcul l'observation de Brewster, qui, pour l'azimut $\omega = 42^\circ$, donne $\alpha = 90^\circ$; on déduit de là, si, au lieu de μ et π, on écrit $\frac{\mu}{\nu}$ et $\frac{\pi}{\nu}$, l'équation

$$\nu^2 = \mu^2 + \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin^2 42^\circ,$$

dans laquelle $\frac{1}{\nu}$ doit être à peu près l'indice de réfraction de l'huile de cassia. Si, pour μ et π, on met leurs valeurs dans le spath calcaire, savoir, $\mu = 0{,}60288$, $\pi = 0{,}67254$, on trouve $\nu^2 = 0{,}3834$ et $\nu = 0{,}6192$. Cette valeur de ν s'accorde presque exactement avec une détermination directe de l'indice de réfraction de l'huile de cassia, prise par Brewster et calculée par J. Young (Herschel, *Traité de la lumière*, traduct. de M. Quetelet, p. 291), d'après laquelle $\nu = 0{,}6158$.

Dans le tableau suivant j'ai placé les angles de polarisation calculés avec $\nu = 0{,}6192$, et les déviations du plan de polarisation à la face de clivage du spath calcaire couvert d'huile de cassia.

	ANGLES de polarisation.	DÉVELOPPEMENT du plan de polarisation.	OBSERVATIONS de Brewster.
0°	47° 16′	0°	0°
12	46.11	− 35.41′	− 45
42	37.47	90	90
90	31.30	+ 41.53	+ 45
180	47.16	0	0

Le cas où le liquide qui entoure le cristal a presque exactement l'indice ordinaire de réfraction de ce cristal mérite une considération toute spéciale. μ est alors $= 1$, et, si l'on développe les expressions de p, s, p', s', dans l'éq. (5), § VII, pour ce cas on trouve

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{(C^2\sin^2\varphi - A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi)}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)},\\ s' &= \frac{A\sin\omega\,(C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi)}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)},\\ p' &= \frac{A\sin\omega\,(C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)},\\ s &= \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma^2}\cdot\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)}, \end{aligned}\right.$$

et de là, d'après l'équation (4), § VII,

$$R_p = \frac{(C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)P + A\sin\omega S}{1-\gamma^2}\cdot(C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi)\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)},$$

$$R_s = \frac{(C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)P + A\sin\omega S}{1-\gamma^2}\, A\sin\omega\,\frac{\sin(\varphi''-\varphi)}{\sin(\varphi''+\varphi)};$$

d'où il résulte que le quotient de R_p par R_s est indépendant de P et de S, que, en outre, quelle que soit la direction de la lumière incidente, la lumière réfléchie est toujours complétement polarisée, et polarisée dans l'azimut a, pour lequel

$$(9)\qquad \operatorname{tang} a = \frac{R_p}{R_s} = \frac{C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi}{A\sin\omega}.$$

Le résultat est le même, que la lumière incidente soit polarisée ou non polarisée. L'azimut a a une signification physique simple. Si l'on imagine dans le cristal une onde extraordinaire parallèle à l'onde réfléchie, l'azimut du plan de polarisation de cette onde extraordinaire sera identique avec celui de l'onde réfléchie avec a.

Cet azimut est d'ailleurs la limite de la déviation du plan de polarisation dans (6), quand on y fait $\mu = 1$. Si l'on appelle ν l'inclinaison du rayon incident sur l'axe, de manière qu'on ait

$$\sin^2\nu = 1 - \gamma^2 = A^2\sin^2\omega + (C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)^2,$$

et ν' l'inclinaison du rayon réfléchi sur l'axe, d'où

$$\sin^2\nu' = A^2\sin^2\omega + (C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi)^2,$$

on a, si la lumière incidente n'est pas polarisée, pour l'intensité de la lumière réfléchie,

$$\frac{1}{2}\frac{\sin^2\nu'}{\sin^2\nu}\cdot\frac{\sin^2(\varphi''-\varphi)}{\sin^2(\varphi''+\varphi)}.$$

Si la lumière incidente est polarisée dans l'azimut b, et si

$$\operatorname{tang} b = -\frac{A\sin\omega}{C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi},$$

il n'y a aucune portion de lumière réfléchie; le maximum de lumière réfléchie a lieu lorsque la polarisation a lieu dans l'azimut c, pour lequel

$$\tang c = \frac{C \sin \varphi - A \cos \omega \cos \varphi}{A \sin \omega}.$$

Si donc on divise la lumière incidente en deux parties polarisées dans chacun des azimuts rectangulaires b et c, la partie polarisée suivant c est seule réfléchie, et si on la désigne par C^2, on a, pour la quantité totale de lumière réfléchie,

$$\frac{C^2 \sin^2 \nu'}{\sin^2 \nu} \cdot \frac{\sin^2(\varphi'' - \varphi)}{\sin^2(\varphi + \varphi')}; \tag{10}$$

ν et ν' désignant les inclinaisons de l'axe optique sur le rayon incident et sur le rayon réfléchi; les deux azimuts b et c sont ceux suivant lesquels se polarise une onde intérieure au cristal parallèle à l'onde incidente, selon que cette onde est ordinaire ou extraordinaire.

J'ai dit précédemment que l'équation (4) a encore lieu pour de très-petites valeurs de ν, mais non plus pour $\nu = 0$ ou $\mu^2 = 1$. Ceci résulte de ce que l'équation

$$ps - p's' = 0,$$

dont est dérivée l'équation (4), a le facteur $(\mu^2 - 1)$. Pour comprendre comment la signification de l'angle de polarisation complète disparaît aussi soudainement en apparence, il faut rechercher un point de vue plus général de la polarisation par réflexion à la surface des cristaux. Comme les cristaux, les milieux non cristallisés réfléchissent, quelle que soit l'incidence, une portion de lumière polarisée, et cette portion augmente de plus en plus à mesure que μ approche de la valeur 1, pour laquelle, sous toutes les incidences, la quantité polarisée est égale à la quantité réfléchie.

L'azimut de polarisation de la partie polarisée dans la lumière réfléchie ne coïncide pas avec le plan d'incidence, comme dans les corps non cristallisés, mais il dépend ici de la direction du rayon réfléchi. Soit I^2 l'intensité de la lumière naturelle incidente; décomposons la lumière réfléchie en deux portions, l'une polarisée dans l'azimut β, l'autre dans un azimut perpendiculaire; la première étant désignée par $R_s'^2$, la seconde par $R_p'^2$, on a, d'après le § VIII,

$$R_s'^2 = \frac{I^2}{2}\left[(p \sin \beta + p' \cos \beta)^2 + (s' \sin \beta + s \cos \beta)^2\right],$$
$$R_p'^2 = \frac{I^2}{2}\left[(p \cos \beta - p' \sin \beta)^2 + (s' \cos \beta - s \sin \beta)^2\right].$$

La quantité de lumière polarisée dans la lumière réfléchie est le maximum de $(R_s'^2 - R_p'^2)$ par rapport à β.

On trouve

$$R_s'^2 - R_p'^2 = \left\{\left[(p'^2 + s^2) - (p^2 + s'^2)\right] \cos 2\beta + 2(pp' + ss') \sin 2\beta\right\} \frac{I^2}{2},$$

et pour le maximum et le minimum, l'équation

$$o = [(p'^2 + s^2) - (p^2 + s'^2)] \sin 2\beta - 2\,(pp' + ss') \cos 2\beta,$$

dont les deux racines vers 90° sont différentes l'une de l'autre.

A l'aide de cette équation, on obtient la valeur de $(R_s'^2 - R_p'^2)$,

$$R_s'^2 - R_p'^2 = \frac{I^2}{2}\sqrt{[(p'^2+s^2) - (p^2+s'^2)]^2 + 4\,(pp'+ss')^2},$$

ou, en écrivant autrement,

$$R_s'^2 - R_p'^2 = \frac{I^2}{2}\sqrt{(p^2+p'^2+s^2+s'^2)^2 - 4\,(ps-p's')^2}.$$

Comme la somme des portions de lumière réfléchies est

$$R_p'^2 - R_s'^2 = p^2 + p'^2 + s^2 + s'^2,$$

et comme $(ps - p's')$ contient le facteur $(1 - \mu^2)$, on voit que, pour des petites valeurs de $(1 - \mu^2)$, la lumière réfléchie sous une incidence quelconque est presque complétement polarisée, car ce qui n'est pas polarisé dépend de $(1 - \mu^2)^2$. La signification de l'équation (4) ne disparaît donc pas subitement avec $\mu^2 - 1 = o$, mais elle perd peu à peu sa signification, et dans la pratique elle ne signifie plus rien longtemps avant $\mu^2 - 1 = o$.

L'équation (7), au contraire, qui détermine l'azimut β de la plus forte polarisation, acquiert de plus en plus de l'importance. Cet azimut β coïncide avec l'azimut a déterminé dans l'éq. (6) ou avec l'azimut de l'éq. (5) α, quand $ps - p's' = o$, suivant qu'un des facteurs de cette équation $1 - \mu^2$ ou l'autre $= o$. Pour obtenir les valeurs de β, en général, avec approximation dans le cas où le cristal est recouvert d'un liquide qui réfracte la lumière presque aussi fortement que lui-même, on peut, dans les valeurs de p, p', s, s', en (5), § VII, négliger les plus hautes puissances de $\sin(\varphi - \varphi')$ et de $\sin(\varphi - \varphi'')$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\cos 2\varphi \sin(\varphi - \varphi')}{\sin 2\varphi} - \frac{C^2 \sin\varphi - A^2\cos^2\omega\cos^2\varphi}{1-\gamma^2}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin 2\varphi},\\
s &= -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin 2\varphi} - \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma^2}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin 2\varphi},\\
p' &= -\frac{A\sin\omega\,(C\sin\varphi - A\cos\omega\cos\varphi)}{1-\gamma^2}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin 2\varphi},\\
s' &= -\frac{A\sin\omega\,(C\sin\varphi + A\cos\omega\cos\varphi)}{1-\gamma^2}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin 2\varphi}.
\end{aligned}$$

Pour faire usage de la formule (7), j'admettrai que l'angle d'incidence atteigne 45°; on obtient alors

$$\tang 2\beta = \frac{\sqrt{2}\,A\sin\omega\,(C + A\cos\omega)\,[1 - \mu^2 - (\pi^2-\mu^2)(1-\gamma)^2(\mu^2-\pi^2)]}{(1-\mu^2)^2 + 2A^2\sin^2\omega\,(\mu^2-\pi^2)(1-\mu)^2 + [A^2\sin^2\omega - \frac{1}{2}(C+A\cos\omega)^2](1-\gamma^2)(\mu^2-\pi^2)^2}.$$

Si l'on veut essayer cette formule par la réflexion à la face naturelle du spath calcaire, on doit poser

$$A = C = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \qquad \text{et} \qquad 1 - \gamma^2 = \tfrac{1}{2}[\sin^2\omega + \tfrac{1}{2}(1 - \cos\omega)^2],$$

et l'on trouve alors

$$\operatorname{tang} 2\beta = \frac{\sqrt{2}\sin\omega\cos^2\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi^2-1}{\pi^2-\mu^2} - \cos^2\frac{1}{2}\omega\right)}{\frac{1}{4}\left(2\frac{1-\mu^2}{\pi^2-\mu^2} - \sin^2\omega\right)^2 - \frac{1}{16}\sin^2\omega(\sin^2\omega + 8\cos\omega)}.$$

J'ai calculé cette formule pour le cas où la face naturelle du spath calcaire est couverte d'huile de cassia dont l'indice de réfraction est, d'après les valeurs ci-dessus trouvées, égal à 1,6192. J'ai rassemblé dans la table suivante les azimuts calculés des plans de polarisation des rayons réfléchis sous une incidence de 45°; car il n'est pas sans intérêt de comparer dans un exemple numérique ces azimuts avec ceux qui sont donnés par la réflexion sous l'angle de la polarisation complète, azimuts dont les valeurs sont présentées dans la table qui précède.

ω	β
0°	0°
12	− 35.45′
14	− 41.19
40.22′	90
42	+ 87.22
90	+ 43.57
180	0

§ XI.

Les équations (3), § VII, contiennent la loi suivant laquelle la lumière réfractée se partage entre le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire. Les intensités I'^2, I''^2 de ces rayons sont entre elles comme les forces vives, d'où

$$I'^2 : I''^2 = D'^2 : D''^2\, U.$$

$$U = \frac{\sin 2\varphi''}{\sin 2\varphi'}\left[1 + \frac{\gamma''(C\sin\varphi'' - A\cos\omega\cos\varphi'')\sin(\varphi'+\varphi'')\sin(\varphi'-\varphi'')}{(1-\gamma''^2)\sin\varphi''\cos\varphi''}\right].$$

D' et D'' ont la signification qui leur a été attribuée au § VII.

Si la lumière incidente est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, on a, d'après cela,

$$(1) \qquad I'^2 : I''^2 :: \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma''^2}\sin^2(\varphi+\varphi') : \frac{(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')^2}{1-\gamma'^2}\sin^2(\varphi+\varphi')\,U.$$

Le rayon ordinaire disparaît donc, 1° quand le plan de réfringence est perpendiculaire à l'axe; 2° quand le plan d'incidence est parallèle à l'axe. Le rayon extraordinaire disparaît quand

$$(2)\qquad C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi' = 0,$$

c'est-à-dire quand le plan de polarisation du rayon ordinaire est perpendiculaire au plan d'incidence. Ce sont les mêmes rayons pour lesquels nous avons trouvé $\tang\delta_p = 0$ au § IX, et qui ont été construits au moyen de la surface conique M, *fig.* 7.

On a une valeur approximative du rapport $\frac{I'^2}{I''^2}$ quand pour U on met sa valeur et qu'on néglige la seconde puissance et les puissances plus élevées de $\sin(\varphi' - \varphi'')$,

$$(3)\qquad I'^2 : I''^2 = A^2\sin^2\omega : (C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')^2\left[1 - 2\frac{\sin(\varphi - \varphi')\sin(\varphi' - \varphi'')}{\sin(\varphi + \varphi')\sin(\varphi' + \varphi'')}\right].$$

Si le rayon incident est polarisé parallèlement au plan d'incidence, on a

$$(4)\quad I'^2 : I''^2 = \left[\frac{C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos^2\varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi')\sqrt{1 - \gamma''^2}}\right]^2 : \frac{A^2\sin^2\omega}{1 - \gamma'^2}\,U,$$

équation d'après laquelle le rayon extraordinaire disparaît, 1° quand $A = 0$; 2° quand $\sin\omega = 0$. Le rayon ordinaire disparaît quand

$$(5)\quad C(\sin\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi''\sin^2\varphi') - A\cos\omega(\cos\varphi''\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi''\cos^2\varphi') = 0,$$

ou, si l'on élimine φ' et φ,

$$\begin{aligned}&(C\sin\varphi'' - A\cos\omega\cos\varphi'')^2[\mu^2 - (\mu^2 - \pi^2)(1 - \gamma_{,,}^2) - \sin^2\varphi'']\\ &= [\mu^2\cos\varphi''(C\sin\varphi'' - A\cos\omega\cos\varphi'') + (\mu^2 - \pi^2)A\cos\omega(1 - \gamma_{,,}^2)]^2.\end{aligned}$$

Ces rayons appartiennent à un cône du quatrième ordre. On obtient approximativement pour la racine utile

$$(6)\qquad \tang\varphi'' = \frac{A\cos\omega}{C}\left[1 + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\mu^2}\,\frac{A^2\sin^2\omega(1 - A^2\sin^2\omega)}{C^2}\right],$$

de sorte que le cône (2) représente la première approximation.

Si l'on néglige les puissances supérieures de $\sin(\varphi' - \varphi'')$ on trouve, le rapport des deux intensités (4),

$$I'^2 : I''^2 = (C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')^2 : A^2\sin^2\omega\left[1 + 2\frac{\sin(\varphi - \varphi')\cos(\varphi + \varphi')(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin(\varphi' - \varphi'')}{\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi')(C\sin\varphi' + A\cos\omega\cos\varphi')\sin(\varphi' + \varphi'')}\right].$$

Si le rayon incident est polarisé dans l'azimut a, on a généralement

$$(7)\quad I'^2 : I''^2 = \frac{\sin^2(\varphi + \varphi'')}{\sin^2(\varphi + \varphi')}\,\frac{\left[\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1 - \gamma''^2}}\sin a - \frac{(C\sin\varphi'' - A\cos\omega\cos\varphi'')\cos(\varphi' - \varphi'')}{\sqrt{1 - \gamma''^2}} + \gamma''\frac{(\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi'')}{\sqrt{1 - \gamma''^2}\sin(\varphi + \varphi'')}\cos a\right]}{\left[\left(\frac{C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi'}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}\right)\sin a + \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}}\cos(\varphi - \varphi')\cos a\right]^2 U}.$$

Pour un angle d'incidence donné, et un azimut donné du plan d'incidence, on peut toujours, par un choix convenable de l'azimut de polarisation du rayon incident, faire disparaître ou le rayon ordinaire ou le rayon extraordinaire. Si le rayon ordinaire doit disparaître, on a, pour l'azimut a' du plan de polarisation primitif,

$$\tag{8} \operatorname{tang} a' = \frac{(C \sin \varphi'' - A \cos \omega \cos \varphi'')}{A \sin \omega} \cos(\varphi - \varphi'') + \frac{\gamma''(\sin^2 \varphi' - \sin^2 \varphi'')}{A \sin \omega \sin(\varphi + \varphi'')}.$$

Si c'est le rayon extraordinaire, l'azimut a'' est donné par

$$\tag{9} \operatorname{tang} a'' = -\frac{A \sin \omega \cos(\varphi - \varphi')}{C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi''}.$$

J'ai vérifié ces deux formules par deux observations qui m'ont été communiquées par le D[r] Seebeck.

Les deux azimuts a' et a'' ne sont pas à angle droit l'un sur l'autre, comme on pourrait s'y attendre d'après la règle donnée par M. Biot, dans son *Traité de Physique*, tome IV, page 368. Cette règle s'éloigne surtout de la réalité pour des angles d'incidence qui ne sont pas très-petits.

Si le plan réfringent est parallèle à l'axe, $(C=0)$; (a') et (a'') étant les azimuts correspondants, on a

$$\operatorname{tang}(a') = -\operatorname{cotang} \omega \cos \varphi'' \cos(\varphi - \varphi'') + \operatorname{cotang} \omega \sin \varphi'' \frac{\sin^2 \varphi' - \sin^2 \varphi''}{\sin(\varphi + \varphi'')},$$

$$\operatorname{tang}(a'') = \operatorname{tang} \omega \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\cos \varphi'}.$$

La règle de M. Biot, ci-dessus citée, donne

$$\operatorname{tang}(a') = -\operatorname{cotang} \omega, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}(a'') = \operatorname{tang} \omega.$$

La formule (9) a une signification simple. Elle détermine exactement l'azimut, dans lequel un rayon devrait être polarisé pour qu'après sa réfraction par un milieu non cristallisé il fût polarisé dans l'azimut suivant lequel le rayon ordinaire est polarisé dans un milieu cristallin. Des valeurs de a' de l'éq. (8), celle de première approximation convient seule.

Quand un faisceau de lumière naturelle tombe à la surface d'un milieu cristallisé, les deux faisceaux dans lesquels il se partage par réfraction n'ont pas, en général, une égale intensité. En employant, dans ce cas, les mêmes raisonnements que ceux qui nous ont donné, § VIII, les expressions de l'intensité de la lumière réfléchie quand la lumière incidente n'était pas polarisée, on a

$$\tag{10} \frac{I'^2}{I''^2} = \frac{[A \sin \omega \sin(\varphi + \varphi'')]^2 + [(\sin \varphi'' - A \cos \omega \cos \varphi'') C \sin(\varphi + \varphi'') \cos(\varphi - \varphi'') + \gamma'(\sin^2 \varphi' - \sin^2 \varphi'')]^2 (1 - \gamma'^2)}{[(C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi') \sin(\varphi + \varphi')]^2 + [A \sin \omega \sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')]^2 \quad (1 - \gamma''^2)\, U}.$$

Si l'on développe cette expression, et si l'on néglige tous les termes qui dépendent de $\sin(\varphi' - \varphi'')$, on obtient, comme premier terme du développement, une expression qui dépend seulement de la position des plans de polarisation des rayons réfractés,

$$\frac{I'^2}{I''^2} = \frac{1 - \frac{(C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi')^2}{1-\gamma'^2}\sin^2(\varphi - \varphi')}{1 - \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^2}\sin^2(\varphi-\varphi')}.$$

§ XII.

Jusqu'à présent nous nous sommes occupés des phénomènes que présente la lumière à son entrée dans un milieu cristallisé à un axe; nous allons maintenant considérer l'émergence d'un rayon lumineux du même milieu. Les équations fondamentales (11), § VI, ne peuvent plus s'employer ici, comme cela a lieu pour un milieu non cristallisé; il faut les déduire tout de nouveau des principes développés au § II.

Soit, *fig.* 8, Ad une onde plane qui se meut dans l'intérieur d'un milieu cristallisé; soient AD, A'D' les rayons qui lui appartiennent; cette onde sera à la limite du milieu AA', partie réfractée dans l'onde plane As dont les rayons correspondants sont représentés par AS et A'S', partie réfléchie dans les ondes A'r' et A'r'', la première ordinaire, la seconde extraordinaire.

Les lignes AR', A'R' et AR'', A'R'' représentent les rayons qui correspondent à ces deux ondes. Supposons que l'onde incidente Ad soit une onde ordinaire; soit $\psi' =$ A'Ad son angle d'incidence; soient $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ les angles de réflexion de A'r' et de A'r''; soit A'AS l'angle de réfraction égal i'.

Entre ces quatre angles ont lieu les équations suivantes :

$$(1) \qquad \sin^2 i' = \frac{\sin^2\psi'}{\mu^2} = \frac{\sin^2\xi'_{,}}{\mu^2} = \frac{\sin^2\xi''_{,}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,}},$$

où $\gamma''_{,}$ désigne le cosinus de l'inclinaison de la normale à l'onde A'r'' sur l'axe; les cosinus des angles correspondants pour les ondes Ad, A'r' étant γ' et $\gamma'_{,}$.

Si l'onde incidente Ad est extraordinaire, soient désignés par ψ'' l'angle d'incidence, l'angle de réfraction par i'', et par $\xi'_{\prime\prime}$ et $\xi''_{\prime\prime}$ les deux angles de réflexion. Soient de plus $\gamma_{\prime\prime}$, $\gamma'_{\prime\prime}$, $\gamma''_{\prime\prime}$ les sinus des inclinaisons respectives de l'onde incidente et des deux ondes réfléchies sur l'axe. Entre ψ'', i'', $\xi'_{\prime\prime}$ et $\xi''_{\prime\prime}$ ont lieu les équations suivantes :

$$(2) \qquad \sin^2 i'' = \frac{\sin^2\psi''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2} = \frac{\sin^2\xi'_{\prime\prime}}{\mu^2} = \frac{\sin^2\xi''_{\prime\prime}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{\prime\prime}}.$$

Dans l'équation (1), $\sin\xi'_{,}$ et $\sin i'$ se déterminent immédiatement au moyen de la valeur donnée de $\sin\psi'$; pour $\sin\xi''_{,}$ on obtient, en mettant pour $\gamma''_{,}$ sa valeur, une équation du deuxième degré dans laquelle la racine négative donne la valeur de $\xi''_{,}$. La racine positive appartient à une onde extraordinaire située tout près de Ad qui, comme Ad, sort du cristal sous l'angle i'. C'est l'onde extraordinaire correspondante à l'onde ordinaire Ad. Si l'on appelle $\psi''_{,}$ l'inclinaison de cette onde extraordinaire sur le plan d'incidence, on trouve

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\xi''_{,} + \operatorname{tang}\psi''_{,} = -\dfrac{2(\pi^2 - \mu^2)\,\mathrm{AC}\cos\omega\sin^2 i'}{1 - \pi^2\sin^2 i' + (\pi^2 - \mu^2)\,\mathrm{A}^2\cos^2\omega\sin^2 i'}, \\ \operatorname{tang}\xi''_{,} - \operatorname{tang}\psi''_{,} = -\dfrac{(\pi^2\mathrm{A}^2 + \mu^2\mathrm{C}^2)\sin i'}{1 - \pi^2\sin^2 i' + (\pi^2 - \mu^2)\,\mathrm{A}^2\cos^2\omega\sin^2 i'}. \end{cases}$$

Par l'équation (2), on déterminera i'' et $\xi''_{,}$ au moyen de ψ''; entre ψ'' et $\xi''_{,,}$ ont lieu des relations qu'on déduit de l'équation (3), quand à $\xi''_{,}$, $\psi''_{,}$, i', on substitue respectivement $\xi''_{,,}$, ψ'', i''. J'introduirai les angles $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, $\xi'_{,,}$, $\xi''_{,,}$ avec leurs signes négatifs dans le calcul suivant.

Nommons α', β', γ' les cosinus des inclinaisons de la normale à l'onde incidente sur les trois axes coordonnés, quand elle est ordinaire; a', b', c' et $\alpha'_{,}$, $\beta'_{,}$, $\gamma'_{,}$, $\alpha''_{,}$, $\beta''_{,}$, $\gamma''_{,}$ les mêmes cosinus pour l'onde réfractée qui en provient et pour les deux ondes réfléchies. Si l'onde incidente est une onde extraordinaire, nous désignerons ces cosinus par α'', β'', γ''; a'', b'', c''; $\alpha'_{,,}$, $\beta'_{,,}$, $\gamma'_{,,}$, et $\alpha''_{,,}$, $\beta''_{,,}$, $\gamma''_{,,}$. On a, d'après l'équation (6), § IV,

$$(4)\quad \begin{cases} a' = \cos i' - \mathrm{C}\cos i'\cos\omega', \\ b' = \sin i'\sin\omega', \\ c' = \mathrm{C}\cos i' + \mathrm{A}\sin i'\cos\omega'; \end{cases}$$

A, B=o, C sont les sinus des angles que le plan réfringent fait avec les trois axes coordonnés. On déduit de là a'', b'', c'', en substituant i'' à i'; on a de plus α', β', γ', α'',..., $\alpha'_{,}$,..., $\alpha''_{,}$,..., $\alpha'_{,,}$,..., $\alpha''_{,,}$,..., en changeant i' en ψ', ψ'', $-\xi'_{,}$, $-\xi''_{,}$, $-\xi'_{,,}$, $-\xi''_{,,}$.

La vitesse d'oscillation dans l'onde incidente doit être désignée par D′ ou par D″, suivant que l'onde incidente est ordinaire ou extraordinaire. Les vitesses, dans les ondes réfléchies seront représentées respectivement par $\mathrm{R}'_{,}$ et $\mathrm{R}''_{,}$, si elles viennent de D′, et par $\mathrm{R}'_{,,}$ et $\mathrm{R}''_{,,}$ si elles viennent de D″.

Décomposons les vitesses dans l'onde réfractée parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence, et nommons S′ et P′ les composantes correspondantes à D′, et S″, P″ les composantes de D″. Les directions des vitesses D′ et D″ forment avec les axes coordonnés des angles dont je désigne les cosinus par (D'_a), (D'_b), (D'_c) et (D''_a), (D''_b), (D''_c). Les quantités $(\mathrm{R}'_{,a})$, $(\mathrm{R}'_{,b})$, $(\mathrm{R}'_{,c})$, $(\mathrm{R}''_{,a})$,..., $(\mathrm{R}'_{,,a})$,..., $(\mathrm{R}''_{,,a})$,... auront la signification analogue pour les vitesses $\mathrm{R}'_{,}$, $\mathrm{R}''_{,}$, $\mathrm{R}'_{,,}$, $\mathrm{R}''_{,,}$.

Les directions des vitesses P′, P″ et S′, S″ forment, avec les trois axes d'élasticité, des angles dont les cosinus sont E'_1, E'_2, E'_3; E''_1, E''_2, E''_3; G'_1, G'_2, G'_3; G''_1, G''_2, G''_3.

Ceci posé, le principe de l'égalité des composantes donne, quand l'onde incident est une onde ordinaire, les équations suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} P'E'_1 + S'G'_1 = D'(D'_{a}) + R'_{,}(R'_{,a}) + R''_{,}(R''_{,a}),\\ P'E'_2 + S'G'_2 = D'(D'_{b}) + R'_{,}(R'_{,b}) + R''_{,}(R''_{,b}),\\ P'E'_3 + S'G'_3 = D'(D'_{c}) + R'_{,}(R'_{,c}) + R''_{,}(R''_{,c}).\end{array}\right.$$

Si l'onde incidente est extraordinaire, on obtient un système semblable; il suffit de mettre à la place de $R'_{,}$, $R''_{,}$, $R'_{,a}$, $R'_{,,}$, $R''_{,,}$, $R'_{,,a}$, etc. Les cosinus E'_1, E'_2, E'_3, E'',..., $G'_{,}$,..., $G''_{,}$,..., s'obtiennent des équations (8) et (9), § IV, en remplaçant φ successivement par i' et i''. Les cosinus (D'_{a}),.... et (D''_{a}),.... sont les mêmes que ceux qu'on a désignés, équations (13) et (12), § IV, par R'_{a} et R''_{a},...., et l'on obtient $R'_{,a}$,...., $R''_{,a}$,..., $R''_{,,a}$,... en changeant α', β', γ', et α'', β'', γ'' en $\alpha'_{,}$, $\beta'_{,}$, $\gamma'_{,}$, $\alpha''_{,}$,... et $\alpha'_{,,}$,...., $\alpha''_{,,}$,....

Multipliant les équations (5) respectivement,

1°. par E'_1, E'_2, E'_3;

2°. Par F_1, F_2, F_3; ces lettres étant prises dans le sens de l'équation (7), § IV;

3°. Par A, B = 0, C, et faisant à chaque fois la somme des produits, on transforme les équations (5), comme il suit :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} P' &= D'\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma_{,}^{2}}} + R'_{,}\frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{,}}} - R''_{,}\frac{C\sin\xi''_{,}+A\cos\xi''_{,}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{,}}},\\ S'\cos i' &= -D'\cos\psi'\frac{(C\sin\psi'-A\cos\omega\cos\psi')}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}} + R'_{,}\cos\xi'_{,}\frac{(C\sin\xi'_{,}+A\cos\xi'_{,}\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{,}}}\\ &\qquad + R''_{,}\frac{A\sin\omega\cos\xi''_{,}}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{,}}},\\ S'\sin i' &= -D'\sin\psi'\frac{(C\sin\psi'-A\cos\omega\cos\psi')}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}} - R'_{,}\sin\xi'_{,}\frac{(C\sin\xi'_{,}+A\cos\xi'_{,}\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{,}}}\\ &\qquad - R''_{,}\frac{A\sin\omega\sin\xi''_{,}}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{,}}}, \end{aligned}\right.$$

si l'on a égard aux relations (2), a, § V, et qu'on y remplace R'_{a},.... et R''_{a},.... successivement par $D'_{,}$,...., $R'_{,a}$,...., et $R''_{,a}$,...., et φ' par ψ', $\xi'_{,}$, φ'' par $\xi''_{,}$, etc.

Pour former l'équation qui résulte du principe de la conservation des forces vives, il faut chercher le rapport d'un volume de l'onde incidente aux volumes correspondants qui reçoivent le mouvement dans l'onde réfractée et dans les ondes réfléchies. J'appellerai $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ les volumes ébranlés dans les ondes D' et D''.

Dans les ondes réfractées ces volumes seront $\mathfrak{Q}'$ et $\mathfrak{Q}''$; dans les ondes réfléchies $R'_{,}$, $R''_{,}$ je désignerai les volumes correspondants par $\mathfrak{P}'_{,}$, $\mathfrak{P}''_{,}$, ainsi que dans les ondes $R'_{,}$, $R''_{,,}$ je les représenterai par $\mathfrak{P}'_{,,}$, $\mathfrak{P}''_{,,}$. Alors on trouve, par les considérations qui nous ont conduits, dans le § V, aux équations (8) et (7), quand on y remplace αH, par

$\sin i'$ si l'onde incidente est une onde ordinaire, par $\sin i''$ si l'onde incidente est extraordinaire, les expressions suivantes :

$$\mathfrak{Q}' = \cos i' \sin i',$$
$$\mathfrak{Q}'' = \cos i'' \sin i'',$$
$$\mathfrak{P}' = \sin \psi' \cos \psi',$$
$$\mathfrak{P}'' = \sin \psi'' \cos \psi'' \left[\frac{1 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''\left(\frac{C}{\cos \psi''} - \gamma''\right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2} \right],$$
$$\mathfrak{P}'_{,} = \sin \xi'_{,} \cos \xi'_{,},$$
$$\mathfrak{P}'_{,,} = \sin \xi'_{,,} \cos \xi'_{,,},$$
$$\mathfrak{P}''_{,} = \sin \xi''_{,} \cos \xi''_{,} \left[\frac{1 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''_{,}\left(\frac{C}{\cos \xi''_{,}} - \gamma''_{,}\right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,}} \right],$$
$$\mathfrak{P}''_{,,} = \sin \xi''_{,,} \cos \xi''_{,,} \left[\frac{1 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''_{,,}\left(\frac{C}{\cos \xi''_{,,}} - \gamma''_{,,}\right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,,}} \right].$$

L'équation des forces vives, quand l'onde incidente est une onde ordinaire,

$$D'^2 \mathfrak{P}' = (P'^2 + S'^2)\, \mathfrak{Q}' + R'^2_{,} \mathfrak{P}'_{,} + R''^2_{,} \mathfrak{P}''_{,},$$

se change, d'après cela, en

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & D'^2 \sin \psi' \cos \psi' - R'^2_{,} \sin \xi'_{,} \cos \xi'_{,} - R''^2_{,} \sin \xi''_{,} \cos \xi''_{,} \\ & \times \left[\frac{1 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''_{,}\left(\frac{C}{\cos \xi''_{,}} - \gamma''_{,}\right)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''_{,}} \right] = (P'^2 + S'^2) \sin i' \cos i'. \end{aligned} \right.$$

Cette équation du deuxième degré peut se ramener à une équation linéaire. On multiplie la seconde et la troisième des équations (6) l'une par l'autre, on retranche le produit de l'éq. (8), et l'on remarque que, d'après l'éq. (1), $\xi'_{,} = \psi$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} P'^2 \sin i' \cos i' = {} & D'^2 \sin \psi' \cos \psi' \, \frac{A^2 \sin^2 \omega}{1 - \gamma'^2} - R'^2_{,} \sin \xi'_{,} \cos \xi'_{,} \frac{A^2 \sin^2 \omega}{1 - \gamma'^2_{,}} \\ & - R''^2 \sin \xi''_{,} \cos \xi''_{,} \left\{ \frac{(C \sin \xi''_{,} + A \cos \xi''_{,} \cos \omega)^2}{1 - \gamma''^2_{,}} - \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''_{,} (C - \gamma''_{,} \cos \xi''_{,})}{\cos \xi''_{,} [\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_{,}]} \right\} \\ & + D' R''_{,} \sin (\psi' - \xi''_{,}) \, \frac{A \sin \omega}{\sqrt{1 - \gamma'^2}} \, \frac{(C \sin \psi' - A \cos \psi' \cos \omega)}{\sqrt{1 - \gamma''^2_{,}}} \\ & + R'_{,} R''_{,} \sin (\psi' + \xi''_{,}) \frac{A \sin \omega}{\sqrt{1 - \gamma''^2_{,}}} \, \frac{(C \sin \xi'_{,} + A \cos \xi'_{,} \cos \omega)}{\sqrt{1 - \gamma'^2_{,}}}. \end{aligned}$$

Cette équation est divisible par la première des équations (6); on obtient :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{P}'\sin i'\cos i' = \mathrm{D}'\sin\psi'\cos\psi'\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma_{,}^{2}}} - \mathrm{R}'_{,}\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,}\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{,}}}\\
&+\mathrm{R}''_{,}\left\{\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,}\frac{(\mathrm{C}\sin\xi''_{,}+\mathrm{A}\cos\omega\cos\xi''_{,})}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{,}}} - \frac{(\pi^2-\mu^2)\sin\xi''_{,}\gamma''_{,}(1-\gamma''^{2}_{,})}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{,}}[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^{2}_{,}]}\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on multiplie cette équation par la première des équations (6), et si l'on compare le produit avec l'équation précédente, on trouve que la justesse de l'équation (9) est subordonnée aux relations

$$
\begin{aligned}
\sin(\psi'-\xi''_{,})\cos(\psi'+\xi''_{,})(\mathrm{C}\sin\xi''_{,}+\mathrm{A}\cos\xi''_{,}\cos\omega) + \frac{(\pi^2-\mu^2)\sin^2\xi''_{,}\gamma''_{,}(1-\gamma''^{2}_{,})}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^{2}_{,}}\\
= -\sin(\psi'-\xi''_{,})(\mathrm{C}\sin\psi'-\mathrm{A}\cos\omega\cos\psi')
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\sin(\xi'_{,}+\xi''_{,})\cos(\xi'_{,}-\xi''_{,})(\mathrm{C}\sin\xi''_{,}+\mathrm{A}\cos\xi''_{,}\cos\omega) - \frac{(\pi^2-\mu^2)\sin^2\xi''_{,}\gamma''_{,}(1-\gamma''^{2}_{,})}{(\pi^2-\pi^2-\mu^2)\gamma''^{2}_{,}}\\
= \sin(\xi'_{,}+\xi''_{,})(\mathrm{C}\sin\xi'+\mathrm{A}\cos\xi'\cos\omega),
\end{aligned}
$$

de la justesse desquelles on peut s'assurer en éliminant μ^2 et π^2 au moyen de

$$
\sin^2\xi''_{,} = \sin^2 i[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^{2}_{,}]
$$

et

$$
-(\pi^2-\mu^2)(1-\gamma''^{2}_{,})\sin^2 i = \sin(\xi'_{,}+\xi''_{,})\sin(\xi'_{,}-\xi''_{,}).
$$

Les équations (6) et (9) contiennent la théorie du cas où le rayon direct est un rayon ordinaire. J'ai déjà dit en quelles autres équations se transforment les équations (5) quand le rayon direct est un rayon extraordinaire.

Si l'on traite ces équations (5) comme on l'a fait à l'occasion des équations (6), on obtient les expressions suivantes :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{P}'' &= \mathrm{D}''\frac{\mathrm{C}\sin\psi''-\mathrm{A}\cos\omega\cos\psi''}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} + \mathrm{R}'_{''}\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{''}}} - \mathrm{R}''_{,}\frac{\mathrm{C}\sin\xi''_{''}+\cos\xi''_{''}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{''}}},\\
\mathrm{S}''\cos i'' &= \mathrm{D}''\frac{\mathrm{A}\sin\omega\sin\psi''}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} + \mathrm{R}'_{''}\cos\xi'_{''}\frac{(\mathrm{C}\sin\xi'_{''}+\mathrm{A}\cos\xi'_{''}\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{''}}} + \mathrm{R}''_{''}\frac{\mathrm{A}\sin\omega\cos\xi''_{''}}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{,}}},\\
\mathrm{S}''\sin i'' &= \mathrm{D}''\frac{\mathrm{A}\sin\omega\sin\psi''}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} - \mathrm{R}'_{''}\sin\xi'_{''}\frac{(\mathrm{C}\sin\xi'_{''}+\mathrm{A}\cos\xi'_{''}\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{''}}} - \mathrm{R}''_{''}\frac{\mathrm{A}\sin\omega\sin\xi''_{''}}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{''}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

L'équation des forces vives est

$$
\mathrm{D}''^2\mathfrak{P}'' = (\mathrm{P}''^2+\mathrm{S}''^2)\mathfrak{Q}'' + \mathrm{R}'^{2}_{''}\mathfrak{P}'_{''} + \mathrm{R}''^{2}_{''}\mathfrak{P}''_{''};
$$

et en y mettant les valeurs de $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{Q}''$,..., tirées de l'équation (7), elle donne

$$\begin{aligned}
&D''^2 \sin\psi'' \cos\psi'' \left\{ 1 - \frac{(\pi^2-\mu^2)(C-\gamma''\cos\psi'')\gamma''}{\cos\psi''[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2]} \right\} \\
&- R'^{2}_{''} \sin\xi'_{''} \cos\xi'_{''} - R''^{2}_{''} \sin\xi''_{''} \cos\xi''_{''} \left\{ 1 - \frac{(\pi^2-\mu^2)(C-\gamma''_{''}\cos\xi''_{''})\gamma''_{''}}{\cos\xi''_{''}[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^{2}_{''}]} \right\} \\
&= (P''^2 + S''^2) \sin i'' \cos i''.
\end{aligned}$$

En multipliant l'une par l'autre les deux dernières équations (10) et retranchant le produit de l'équation (11), on obtient

$$\begin{aligned}
P''^2 \sin i'' \cos i'' = {} & D'' \left[\sin\psi'' \cos\psi'' \frac{(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'')^2}{1-\gamma''^2} - \frac{(\pi^2-\mu^2)(C-\gamma''\cos\psi'')\gamma''\sin\psi''}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2} \right] \\
& - R'_{''} \sin\xi'_{''} \cos\xi'_{''} \frac{A^2\sin^2\omega}{1-\gamma'^{2}_{''}} - R''^{2}_{''} \left[\sin\xi''_{''}\cos\xi''_{''} \frac{(C\sin\xi''_{''} + A\cos\omega\cos\xi'_{''})}{1-\gamma''^{2}_{''}} - \frac{(\pi^2-\mu^2)(C-\gamma''_{''}\cos\xi''_{''})\gamma''_{''}\sin\xi''_{''}}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^{2}_{''}} \right] \\
& - D'' R'_{''} \sin(\psi''-\xi'_{''}) \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}} \frac{C\sin\xi'_{''} + A\cos\omega\cos\xi'_{''}}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{''}}} - D''R'' \frac{\sin(\psi''-\xi''_{''})A^2\sin^2\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}\sqrt{1-\gamma''^{2}_{''}}} \\
& + R'_{''} R''_{''} \sin(\xi'_{''}+\xi''_{''}) \frac{A\sin\omega(C\sin\xi'_{''} + \cos\omega\cos\xi'_{''})}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{'}}\sqrt{1-\gamma''^{2}_{''}}}.
\end{aligned}$$

Si l'on divise cette équation par la première des équations (10), on obtient :

$$\begin{aligned}
P\sin i''\cos i'' = {} & D'' \left\{ \sin\psi''\cos\psi'' \frac{(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'')}{\sqrt{1-\gamma''^2}} - \frac{(\pi^2-\mu^2)\gamma''(1-\gamma''^2)\sin^2\psi''}{\sqrt{1-\gamma''^2}[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2]} \right\} \\
& - R'_{''} \sin\xi'_{''}\cos\xi'_{''} \frac{A\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^{2}_{''}}} \\
& + R''_{''} \left\{ \sin\xi''_{''}\cos\xi''_{''} \frac{(C\sin\xi''_{''} + A\cos\omega\cos\xi''_{''})}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{''}}} - \frac{(\pi^2-\mu^2)\gamma''_{''}(1-\gamma''^{2}_{''})\sin^2\xi''_{''}}{\sqrt{1-\gamma''^{2}_{''}}[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^{2}_{''}]} \right\}.
\end{aligned}$$

Si l'on multiplie cette équation par la première des équations (10), et si l'on compare ce produit avec l'équation précédente, on voit que les relations suivantes doivent avoir lieu :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1.}\quad & \sin(\xi'_{''}-\psi'')\cos(\xi'_{''}+\psi'')(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'') + \frac{(\pi^2-\mu^2)\gamma''(1-\gamma''^2)\sin^2\psi''}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2} \\
& \qquad = -\sin(\xi'_{''}-\psi'')(C\sin\xi'_{''} + A\cos\omega\cos\xi'_{''}), \\
\mathbf{2.}\quad & \sin(\xi'_{''}+\xi''_{''})\cos(\xi'_{''}-\xi''_{''})(C\sin\xi''_{''} + A\cos\omega\cos\xi''_{''}) - (\pi^2-\mu^2)\gamma''_{''}(1-\gamma''^{2}_{''})\sin^2\xi''_{''} \\
& \qquad = \sin(\xi'_{''}+\xi''_{''})(C\sin\xi'_{''} + A\cos\xi'_{''}\cos\omega), \\
\mathbf{3.}\quad & \sin(\psi''-\xi''_{''})\cos(\psi''+\xi''_{''})(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'')(C\sin\xi''_{''} + A\cos\omega\cos\xi''_{''}) \\
& \qquad + \frac{(\pi^2-\mu^2)\gamma''(1-\gamma''^2)(C\sin\xi''_{''} + A\cos\omega\cos\xi''_{''})\sin^2\psi''}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2} \\
& \qquad - \frac{(\pi^2-\mu^2)\gamma''_{''}(1-\gamma''^{2}_{''})(C\sin\psi'' - A\cos\omega\cos\psi'')\sin^2\xi''_{''}}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''_{''}} \\
& \qquad = A^2\sin^2\omega\sin(\psi''-\xi''_{''}).
\end{aligned}$$

On peut facilement s'assurer de l'exactitude de la première et de la seconde des relations en remplaçant les quantités qui multiplient γ'' et $\gamma''_{\prime\prime}$ par $\sin^2 \xi'_{\prime\prime} - \sin^2 \psi''$ et $\sin^2 \xi'_{\prime\prime} - \sin^2 \xi''_{\prime\prime}$. Pour prouver la troisième relation, nous remarquons que

$$\frac{-(\pi^2-\mu^2)\sin^2\psi''}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2} = \frac{\sin^2\psi''-\sin^2\xi''_{\prime\prime}}{\gamma''^2-\gamma''^2_{\prime\prime}} = \frac{-(\pi^2-\mu^2)\sin^2\xi''_{\prime\prime}}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma''^2_{\prime\prime}};$$

en substituant ces expressions dans la troisième relation, multipliant par $\gamma''^2-\gamma''^2_{\prime\prime}$ et opérant quelques réductions, on obtient

$$\begin{aligned}&[\gamma''(\mathrm{C}\sin\xi''_{\prime\prime}+\mathrm{A}\cos\xi''_{\prime\prime}\cos\omega)+\gamma''_{\prime\prime}(\mathrm{C}\sin\psi''-\mathrm{A}\cos\omega\cos\psi'')-\sin(\psi''+\xi''_{\prime\prime})]\\ \times&[\gamma''(\mathrm{C}\sin\xi''_{\prime\prime}+\mathrm{A}\cos\xi''_{\prime\prime}\cos\omega)+\gamma''_{\prime\prime}(\mathrm{C}\sin\psi''-\mathrm{A}\cos\omega\cos\psi'')]+\mathrm{A}^2\sin^2\omega(\gamma''^2-\gamma''^2_{\prime\prime})=0.\end{aligned}$$

Si l'on met à la place de γ'' et $\gamma''_{\prime\prime}$ leurs valeurs tirées de (2), et qu'on exécute les opérations indiquées, on trouve que cette équation est identiquement nulle.

Les lois d'après lesquelles la lumière à la sortie d'un milieu cristallisé est partie réfléchie, partie réfractée, sont entièrement comprises dans les équations (6), (9), (10) et (12).

§ XIII *a*.

Pour plus de simplicité, j'adopterai les notations suivantes :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}=\sin y', && \frac{\mathrm{C}\sin\psi'-\mathrm{A}\cos\psi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}}=\cos y',\\
&\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}=\sin y'', && \frac{\mathrm{C}\sin\psi''-\mathrm{A}\cos\psi''\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2}}=\cos y'',\\
&\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{\prime}}}=\sin z'_{\prime}, && \frac{\mathrm{C}\sin\xi'_{\prime}+\mathrm{A}\cos\xi'_{\prime}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{\prime}}}=-\cos z'_{\prime},\\
&\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime}}}=\sin z''_{\prime}, && \frac{\mathrm{C}\sin\xi''_{\prime}+\mathrm{A}\cos\xi''_{\prime}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime}}}=-\cos z''_{\prime},\\
&\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{\prime\prime}}}=\sin z'_{\prime\prime}, && \frac{\mathrm{C}\sin\xi'_{\prime\prime}+\mathrm{A}\cos\xi'_{\prime\prime}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2_{\prime\prime}}}=-\cos z'_{\prime\prime},\\
&\frac{\mathrm{A}\sin\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime\prime}}}=\sin z''_{\prime\prime}, && \frac{\mathrm{C}\sin\xi''_{\prime\prime}+\mathrm{A}\cos\xi''_{\prime\prime}\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime\prime}}}=-\cos z''_{\prime\prime}.
\end{aligned}\right.$$

On remarquera que ces quantités différentes y et z désignent les azimuts des plans de polarisation des rayons dans l'intérieur du cristal. Je poserai, de plus,

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\gamma''}{\sqrt{1-\gamma''^2}}\sin(\xi'_{\prime\prime}-\psi'')\sin(\xi'_{\prime\prime}+\psi'')=\mathrm{I},\\
&\frac{\gamma''_{\prime}}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime}}}\sin(\xi'_{\prime}-\xi''_{\prime})\sin(\xi'_{\prime}+\xi''_{\prime})=\mathrm{K}',\\
&\frac{\gamma''_{\prime\prime}}{\sqrt{1-\gamma''^2_{\prime\prime}}}\sin(\xi'_{\prime\prime}-\xi''_{\prime\prime})\sin(\xi'_{\prime\prime}+\xi''_{\prime\prime})=\mathrm{K}''.
\end{aligned}\right.$$

Ainsi les équations (6) et (9) du précédent paragraphe se changent dans les suivantes :

$$
(3)\left\{\begin{array}{lll}
P' = D' \sin y', & + R'_{\prime} \sin z'_{\prime}, & + R''_{\prime} \cos z''_{\prime}; \\
S' \cos i' = - D' \cos y' \cos \psi', & - R'_{\prime} \cos z'_{\prime} \cos \xi'_{\prime}, & + R''_{\prime} \sin z''_{\prime} \cos \xi''_{\prime}; \\
S' \sin i' = - D' \cos y' \sin \psi', & + R'_{\prime} \cos z'_{\prime} \sin \xi'_{\prime}, & - R''_{\prime} \sin z''_{\prime} \sin \xi''_{\prime}; \\
P' \sin i' \cos i' = D' \sin y' \sin \psi' \cos \psi', & - R'_{\prime} \sin z'_{\prime} \sin \xi'_{\prime} \cos \xi'_{\prime}, & - R''_{\prime}(\cos z''_{\prime} \sin \xi''_{\prime} \cos \xi''_{\prime} - K');
\end{array}\right.
$$

et les équations (10) et (12) du même paragraphe se changent en

$$
(4)\left\{\begin{array}{lll}
P'' = D'' \cos y'', & + R'_{\prime\prime} \sin z'_{\prime\prime}, & + R''_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime}; \\
S'' \cos i'' = D'' \sin y'' \cos \psi'', & - R'_{\prime\prime} \cos z'_{\prime\prime} \cos \xi'_{\prime\prime}, & + R''_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \cos \xi''_{\prime\prime}; \\
S'' \sin i'' = D'' \sin y'' \sin \psi'', & + R'_{\prime\prime} \cos z'_{\prime\prime} \sin \xi'_{\prime\prime}, & - R''_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \sin \xi''_{\prime\prime}; \\
P'' \cos i'' \sin i'' = D''(\cos y'' \sin \psi'' \cos \psi'' + I), & - R'_{\prime\prime} \sin z'_{\prime\prime} \sin \xi'_{\prime\prime} \cos \xi'_{\prime\prime}, & - R''_{\prime\prime}(\cos z''_{\prime\prime} \sin \xi''_{\prime\prime} \cos \xi''_{\prime\prime} - K'').
\end{array}\right.
$$

On tire de l'équation (3), si l'on observe que $\xi'_{\prime} = \psi'$:

$$
(5)\left\{\begin{array}{l}
R'_{\prime} = - D' \dfrac{\sin(i' - \psi')}{\sin(i' + \psi')} \left\{\dfrac{[\sin y' \sin z''_{\prime} \cos(i' + \psi') + \cos y' \cos z''_{\prime} \cos(i' - \xi''_{\prime})] \sin(i' + \xi''_{\prime}) - \cos y' K'}{[\sin z'_{\prime} \sin z''_{\prime} \cos(i' - \psi') + \cos z'_{\prime} \cos z''_{\prime} \cos(i' - \xi''_{\prime})] \sin(i' + \xi''_{\prime}) - \cos z'_{\prime} K'}\right\}, \\
R''_{\prime} = - D' \sin(i' - \psi') \left\{\dfrac{\sin y' \cos z'_{\prime} \cos(i' + \psi') - \cos y' \sin z'_{\prime} \cos(i' - \xi'_{\prime})}{[\sin z'_{\prime} \sin z''_{\prime} \cos(i' - \psi') + \cos z'_{\prime} \cos z''_{\prime\prime} \cos(i' - \xi'_{\prime})] \sin(i' + \xi''_{\prime}) - \cos z'_{\prime} K'}\right\},
\end{array}\right.
$$

et de l'équation (4)

$$
(6)\left\{\begin{array}{l}
R'_{\prime\prime} = - \dfrac{D''}{\sin(i'' + \xi'_{\prime\prime})} \times \\
\left\{\dfrac{[(\cos y' \sin z''_{\prime} \cos(i'' + \psi'') - \sin y'' \cos z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi''_{\prime\prime})] \sin(i'' - \psi'') \sin(i'' + \xi''_{\prime}) - \sin z''_{\prime} \sin(i'' + \xi''_{\prime\prime}) I + \sin y'' \sin(i'' - \psi'') K''}{[\sin z'_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi'_{\prime\prime}) + \cos z'_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi''_{\prime\prime})] \sin(i'' + \xi''_{\prime\prime}) - \cos z'_{\prime\prime} K''}\right\}, \\
R''_{\prime\prime} = - D'' \left\{\dfrac{[\cos y'' \cos z'_{\prime\prime} \cos(i'' + \psi'') + \sin y'' \sin z'_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi'_{\prime\prime})] \sin(i'' - \psi'') - \cos z'_{\prime\prime} I}{[\sin z'_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi'_{\prime\prime}) + \cos z'_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime} \cos(i'' - \xi''_{\prime\prime})] \sin(i'' + \xi''_{\prime\prime}) - \cos z'_{\prime\prime} K''}\right\}.
\end{array}\right.
$$

Pour l'usage pratique on développera ces expressions suivant les puissances de la différence des axes d'élasticité, et l'on n'aura à considerer que le premier terme.

Le premier terme, qui est indépendant de la différence des axes d'élasticité et qui ne dépend que de leur position, donne

$$
(7)\left\{\begin{array}{l}
R'_{\prime} = - \dfrac{D' \sin(i' - \psi')}{\sin(i' + \psi')} \left[\sin y' \sin z'_{\prime} \dfrac{\cos(i' + \psi')}{\cos(i' - \psi')} + \cos y' \cos z'_{\prime}\right], \\
R''_{\prime} = - \dfrac{D' \sin(i' - \psi')}{\sin(i' + \psi')} \left[\sin y' \cos z'_{\prime} \dfrac{\cos(i' + \psi')}{\cos(i' - \psi')} - \cos y' \sin z'_{\prime}\right];
\end{array}\right.
$$

$$
(8)\left\{\begin{array}{l}
R'_{\prime\prime} = - \dfrac{D'' \sin(i'' - \psi'')}{\sin(i'' + \psi'')} \left[\cos y'' \sin z''_{\prime\prime} \dfrac{\cos(i'' + \psi'')}{\cos(i'' - \psi'')} - \sin y'' \cos z''_{\prime\prime}\right], \\
R''_{\prime\prime} = - \dfrac{D'' \sin(i'' - \psi'')}{\sin(i'' + \psi'')} \left[\cos y'' \cos z''_{\prime\prime} \dfrac{\cos(i'' + \psi'')}{\cos(i'' - \psi'')} + \sin y'' \sin z''_{\prime\prime}\right].
\end{array}\right.
$$

De l'équation (3) on déduit pour la lumière réfractée, quand on observe que

$$\xi'_{,} = \psi', \quad \cos z''_{,} \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,}) \cos(\xi'_{,} + \xi''_{,}) + \mathrm{K}' = \sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}} \cos y' \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,}),$$

et

$$\sqrt{1-\gamma''^2_{,}} \sin z''_{,} = \sqrt{1-\gamma'^2} \sin y',$$

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}' &= + \frac{\mathrm{D}' \sin y' \sin 2\psi'}{\sin(i'+\psi')\cos(i'-\psi')} + \mathrm{R}''_{,} \sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}} \frac{\cos y' \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}{\sin(i'+\psi')\cos(i'-\psi')}, \\ \mathrm{S}' &= - \frac{\mathrm{D}' \cos y' \sin 2\psi'}{\sin(i'+\psi')} + \mathrm{R}''_{,} \sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}} \frac{\sin y' \sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}{\sin(i'+\psi')}. \end{aligned} \right.$$

Pour exprimer les valeurs P'' et S'' plus simplement au moyen de l'équation (6), j'introduirai une nouvelle onde, à savoir, l'onde ordinaire correspondante à D''. Je désigne par $\psi'_{,,}$ son inclinaison sur le plan réfringent, en sorte que $\psi'_{,,} = \xi'_{,,}$. Je désigne par $y'_{,,}$ l'y relative à cette onde, et par $\varkappa'$ l'inclinaison de sa normale sur l'axe. On a donc

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \varkappa' &= \mathrm{C} \cos\psi'_{,,} + \mathrm{A} \sin\psi'_{,,} \cos\omega, \\ \cos y'_{,,} &= \frac{\mathrm{C} \sin\psi'_{,,} - \mathrm{A} \cos\psi'_{,,} \cos\omega}{\sqrt{1-\varkappa'^2}}, \quad \text{et} \quad \sin y'_{,,} = \frac{\mathrm{A} \sin\omega}{\sqrt{1-\varkappa'^2}}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on observe maintenant que

$$\cos y'' \sin(\xi'_{,,} + \psi'') \cos(\xi'_{,,} - \psi'') + \mathrm{I} = \sqrt{\frac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2}} \cos y'_{,,} \sin(\psi'_{,,} + \psi''),$$

$$\cos z''_{,,} \sin(\xi'_{,,} - \xi''_{,,}) \cos(\xi'_{,,} + \xi''_{,,}) + \mathrm{K}'' = \sqrt{\frac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2_{,,}}} \cos y'_{,,} \sin(\xi'_{,,} - \xi''_{,,}),$$

et

$$\sqrt{1-\gamma''^2} \sin y'' = \sqrt{1-\gamma''^2_{,,}} \sin z''_{,,} = \sqrt{1-\varkappa'^2} \sin y'_{,,},$$

on obtient

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}'' &= \frac{\mathrm{D}'' \sqrt{\frac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2}} \cos y'_{,,} \sin(\psi'_{,,} + \psi'')}{\sin(i''+\psi'_{,,})\cos(i''-\psi'_{,,})} \left[1 + \frac{\mathrm{R}''_{,,}}{\mathrm{D}''} \sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{,,}}} \frac{\sin(\xi'_{,,} - \xi''_{,,})}{\sin(\psi'_{,,} + \psi'')} \right], \\ \mathrm{S}'' &= \frac{\mathrm{D}'' \sqrt{\frac{1-\varkappa'^2}{1-\gamma''^2}} \sin y'_{,,} \sin(\psi'_{,,} + \psi'')}{\sin(i''+\psi'_{,,})} \left[1 + \frac{\mathrm{R}''_{,,}}{\mathrm{D}''} \sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{,,}}} \frac{\sin(\xi'_{,,} - \xi''_{,,})}{\sin(\psi'_{,,} + \psi'')} \right]. \end{aligned} \right.$$

Dans les expressions (9) et (11) on peut, si l'on ne veut conserver que les premières puissances de $(\pi^2 - \mu^2)$, en place de $\frac{\mathrm{R}''_{,}}{\mathrm{D}'}$ et $\frac{\mathrm{R}''_{,,}}{\mathrm{D}''}$, mettre leurs valeurs approchées, déduites des équations (7) et (8).

Les équations (5), (6), (9), (11) donnent des valeurs imaginaires entre les limites de la réflexion totale, comme cela a lieu dans les milieux non cristallisés.

On sait que dans le cas de la réflexion totale P' et S', P'' et S'' disparaissent.

Les valeurs de $R'_{,}$, $R''_{,}$, $R'_{,,}$, $R''_{,,}$ peuvent se déterminer pour ce cas par le même raisonnement que Fresnel a appliqué au cas analogue dans les milieux non cristallisés, raisonnement peu concluant par lui-même, mais qui a reçu la sanction d'observations nombreuses. J'appliquerai ce raisonnement seulement aux valeurs approchées (7) et (8). $R'_{,}$ prend, quand $\sin i' > 1$, la forme $A + B\sqrt{-1}$. D'après l'analogie du raisonnement de Fresnel, l'intensité de la lumière réfléchie serait en réalité

$$A^2 + B^2 = (A + B\sqrt{-1})\,(A - B\sqrt{-1}).$$

On obtient $A - B\sqrt{-1}$, en mettant dans la valeur de $R'_{,}$, $180^\circ - i'$ partout à la place de i'. De cette manière on tire des équations (7) et (8), si, dans le cas de réflexion totale, on désigne les vitesses réfléchies par $(R'_{,})$, $(R''_{,})$, $(R'_{,,})$, $(R''_{,,})$,

$$\begin{aligned}
(R'^{2}_{,}) &= D'^2[\cos^2(y' - z') - L' \sin 2y' \sin 2z'],\\
(R''^{2}_{,}) &= D'^2[\sin^2(y' - z') + L' \sin 2y' \sin 2z'],\\
(R'^{2}_{,,}) &= D''^2[\sin^2(y'' - z'') + L'' \sin 2y'' \sin 2z''],\\
(R''^{2}_{,,}) &= D''^2[\cos^2(y'' - z'') - L'' \sin 2y'' \sin 2z''].
\end{aligned}$$

$$L' = \frac{\sin^2 \psi'}{\mu^2 - (1+\mu^2)\sin^2\psi'}, \quad \text{et} \quad L'' = \frac{\sin^2 \psi''}{\mu^2 - (1+\mu^2)\sin^2\psi''}.$$

Des quatre rayons réfléchis, deux seulement, $(R''_{,})$, $(R'_{,,})$, disparaissent dans certains cas particuliers, savoir, 1° quand le plan réflecteur est perpendiculaire à l'axe; 2° quand l'azimut du plan d'incidence $= 0$; 3° quand l'azimut du plan d'incidence $= 90^\circ$, et qu'en même temps le plan réfléchissant est parallèle à l'axe. Les rayons $(R'_{,})$ et $(R''_{,,})$, au contraire, ne disparaissent pas.

§ XIII *b*.

Des équations (11) résulte une loi très-simple pour la position du plan de polarisation d'un rayon extraordinaire à sa sortie d'un milieu cristallin. Si l'on désigne son azimut par rapport au plan d'émergence par α'', on a

$$\tag{12} \operatorname{tang} \alpha'' = \frac{P''}{S''} = \frac{\operatorname{cotang} y'_{,,}}{\cos(i'' - \psi'_{,,})}.$$

Si l'on désigne le même angle pour le rayon ordinaire par α', de telle sorte que $\operatorname{tang} \alpha' = \frac{P'}{S'}$, on a, en négligeant les puissances supérieures de $(\xi'_{,} - \xi''_{,})$,

$$\tag{13} \operatorname{tang} \alpha' = \frac{\operatorname{tang} y'}{\cos(i' - \psi')}\left[1 + \frac{R''_{,}}{D'}\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\sin(\xi'_{,} - \xi''_{,})}{\sin y' \cos y' \sin(\xi'_{,} + \xi''_{,})}\right],$$

où pour $\frac{R''_{,}}{D'}$ on doit mettre sa valeur tirée de l'équation (7).

Des équations (9) et (10) on peut facilement déduire l'intensité de la lumière du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire à leur sortie du milieu cristallisé, savoir, $P'^2 + S'^2$, et $P''^2 + S''^2$. Ces expressions seront d'une grande importance pour les recherches photométriques. Pour employer les expressions (9) et (10) dans ce cas et dans des cas semblables, on devra connaître les valeurs de D' et D''. Dans la plupart des cas ce seront les vitesses dans les rayons conjugués, entre lesquels un rayon donné se partage à son entrée dans un milieu cristallisé. Elles sont alors données par les formules (3), § VII, si l'on introduit dans ces formules les azimuts des plans de polarisation D' et D'', pour les exprimer indépendamment de la position du plan suivant lequel la lumière a pénétré dans le milieu, c'est-à-dire, si l'on pose dans les formules (3), § VII,

$$\frac{A \sin \omega}{\sqrt{1-\gamma_{,}^{2}}} = \sin x', \quad \frac{C \sin \varphi' - A \cos \omega \cos \varphi'}{\sqrt{1-\gamma_{,}^{2}}} = \cos x',$$

$$\frac{A \sin \omega}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} = \sin x'', \quad \frac{C \sin \varphi'' - A \cos \omega \cos \varphi''}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} = \cos x'',$$

et de plus

$$\frac{\gamma''}{\sqrt{1-\gamma''^{2}}} \sin(\varphi' - \varphi'') \sin(\varphi' + \varphi'') = G.$$

On a

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} D' &= \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')} \left\{ \frac{[P \sin x'' - S \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')] \sin(\varphi + \varphi'') - SG}{[\sin x_{,} \sin x_{,,} \cos(\varphi - \varphi') + \cos x' \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')] \sin(\varphi + \varphi'') + \cos x' G} \right\}, \\ D'' &= \sin 2\varphi \left\{ \frac{[P \cos x' + S \sin x' \cos(\varphi - \varphi')]}{[\sin x' \sin x'' \cos(\varphi - \varphi') + \cos x' \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')] \sin(\varphi + \varphi'') + \cos x' G} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on néglige dans ces valeurs tous les termes qui dépendent de la différence des axes d'élasticité, on obtient, comme première approximation,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} D' &= \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')} \left[\frac{P \sin x'}{\cos(\varphi - \varphi')} - S \cos x' \right], \\ D'' &= \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')} \left[\frac{P \cos x'}{\cos(\varphi - \varphi')} + S \sin x' \right]. \end{aligned} \right.$$

Au moyen des équations (9), (11) et (15), on peut répondre à la question suivante : Comment la lumière d'un rayon polarisé, après avoir traversé un prisme d'une substance cristallisée à un axe, s'est-elle partagée entre le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire?

Je vais éclaircir ceci par l'application à quelques cas particuliers qui peuvent être importants pour la pratique.

1. *Les plans d'immergence et d'émergence du rayon dans le prisme coïncident, et les arêtes du prisme sont perpendiculaires à l'axe optique.* Alors, pour le rayon immer-

gent comme pour les rayons émergents, $\omega = 0$; par suite

$$\sin x' = \sin x'' = \sin y' = \sin y'' = \sin z'_{,} = \sin z''_{,} = \sin z'_{''} = \sin z''_{''} = 0,$$

et l'on obtient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
D' &= -\frac{S\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')},\\
D'' &= \frac{P\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'')+G},\\
P' &= 0,\\
S' &= -\frac{D'\sin 2\psi'}{\sin(i'+\psi')},\\
P'' &= \frac{D''\sqrt{\frac{1-x'^2}{1-\gamma''^2}}\sin(\psi'_{''}+\psi'')}{\sin(i''+\psi'')\cos(i''-\psi'')}\left[1-\frac{\cos(i''+\psi'')\sin(i''-\psi'')-I}{\cos(i''-\xi''_{''})\sin(i''+\xi''_{''})-K''}\sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{''}}}\,\frac{\sin(\xi'_{''}-\xi''_{''})}{\sin(\psi'_{''}+\psi''_{''})}\right],\\
S'' &= 0.
\end{aligned}\right.$$

D'où le rapport des intensités de la lumière dans les deux rayons après leur sortie du prisme,

$$(17)\quad \frac{P'^2+S'^2}{P''^2+S''^2} = \frac{\frac{1-\gamma''^2}{1-x'^2}\left[\frac{\sin 2\psi'}{\sin(\psi'_{''}+\psi'')}\,\frac{\sin(i''+\psi'')}{\sin(i'+\psi')}\cos(i''-\psi'')\right]^2\left[\frac{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'')+G}{\sin(\varphi+\varphi')}\right]^2\frac{S^2}{P^2}}{\left[1-\frac{\cos(i''+\psi'')\sin(i''-\psi'')-I}{\cos(i''-\xi''_{''})\sin(i''+\xi''_{''})-K}\sqrt{\frac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{''}}}\,\frac{\sin(\xi'_{''}-\xi''_{''})}{\sin(\psi'_{''}+\psi''_{''})}\right]^2}.$$

2. *Les arêtes du prisme sont parallèles à l'axe, et les plans d'immergence et d'émergence leur sont perpendiculaires.* Alors $C = 0$ et $\omega = 90^\circ$; ainsi

$$\cos x' = \cos x'' = \cos y' = \cos y'' = \cos z'_{,} = \cos z''_{,} = \cos z'_{''} = \cos z''_{''} = 0,$$

$$\gamma' = \gamma'' = \gamma'_{,} = \gamma''_{,} = \gamma'_{''} = \gamma''_{''} = x' = 0.$$

D'après cela

$$\begin{aligned}
D' &= \frac{P\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')},\\
D'' &= \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi'')},\\
P' &= \frac{D'\sin 2\psi' S}{\sin(i'+\psi')\cos(i'-\psi')},\\
S' &= 0,\\
S'' &= \frac{D''\sin(\psi'_{''}+\psi'')}{\sin(i''+\psi'_{''})}\left[1-\frac{\sin(i''-\psi'')\sin(\xi'_{''}-\xi''_{''})}{\sin(i''+\psi'')\sin(\psi'_{''}+\psi'')}\right],\\
P'' &= 0,
\end{aligned}$$

et le rapport des intensités dans le rayon ordinaire et dans le rayon extraordinaire après émergence,

$$(18)\quad \frac{P'^2+S'^2}{P''^2+S''^2}=\frac{\left[\frac{\sin 2\psi'\sin(i''+\psi'_{\prime\prime})}{\sin(\psi'_{\prime\prime}+\psi'')\sin(i'+\psi')}\frac{1}{\cos(\varphi-\varphi')\cos(i'-\psi')}\right]^2\frac{\sin^2(\varphi+\varphi'')}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\frac{P^2}{S^2}}{\left[1-\frac{\sin(i''-\psi'')}{\sin(i''+\psi'')}\frac{\sin(\xi'_{\prime\prime}-\xi''_{\prime\prime})}{\sin(\psi'_{\prime\prime}+\psi'')}\right]}.$$

Je vais encore appliquer les formules (9), (11), (13) au passage de la lumière à travers un milieu cristallisé séparé par deux plans parallèles d'un même milieu non cristallisé. Ce cas particulier, intéressant par lui-même à cause de son application à la théorie des couleurs que les lames minces cristallisées font apparaître dans la lumière polarisée, est surtout propre à la confirmation des formules (9), (11), (15), par le grand nombre et la variété des phénomènes qu'il offre à l'observateur.

Les formules (15) restent telles qu'elles sont pour ce cas; on a, au contraire, à faire dans les formules (7), (8), (9) et (11) les substitutions que voici :

$$\begin{array}{lll}
y'=x', & z'_{\prime}=z'_{\prime\prime}=z', & y'_{\prime\prime}=x',\\
y''=x'', & z''_{\prime}=z''_{\prime\prime}=z'', & \\
i'=i''=\varphi, & & \\
\psi'=\varphi', & \psi''=\varphi'', & \psi'_{\prime\prime}=\varphi',\\
\xi'_{\prime}=\xi'_{\prime\prime}=\varphi', & \xi''_{\prime}=\xi''_{\prime\prime}, & \\
\varkappa'=\gamma', & \gamma'_{\prime}=\gamma'_{\prime\prime}, & \gamma''_{\prime}=\gamma''_{\prime\prime}.
\end{array}$$

D'après cela nous obtenons, si pour la symétrie de l'expression nous mettons φ''' à la place de $\xi''_{\prime}$ ou $\xi''_{\prime\prime}$,

$$(19)\quad \begin{cases} P'=\dfrac{D'\sin x'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}+R''_{\prime}\sqrt{\dfrac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{\prime}}}\dfrac{\cos x'\sin(\varphi'-\varphi''')}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')},\\[2ex] S'=-\dfrac{D'\cos x'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}+R''_{\prime}\sqrt{\dfrac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{\prime}}}\dfrac{\sin x'\sin(\varphi-\varphi''')}{\sin(\varphi+\varphi')}; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} P''=\dfrac{D''\sqrt{\dfrac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}}\cos x'\sin(\varphi+\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\left[1+\dfrac{R''_{\prime\prime}}{D''}\sqrt{\dfrac{1-\gamma''^2}{1-\gamma''^2_{\prime}}}\dfrac{\sin(\varphi'-\varphi''')}{\sin(\varphi'+\varphi'')}\right],\\[3ex] S''=\dfrac{D''\sqrt{\dfrac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}}\sin x'\sin(\varphi'+\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}\left[1+\dfrac{R''_{\prime\prime}}{D''}\sqrt{\dfrac{1-\gamma''^2}{1-\gamma'^2_{\prime\prime}}}\dfrac{\sin(\varphi'-\varphi''')}{\sin(\varphi'+\varphi'')}\right], \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} R''_{\prime}=-D'\sin(\varphi-\varphi')\left\{\dfrac{\sin x'\cos z'\cos(\varphi+\varphi')-\cos x'\sin z'\cos(\varphi-\varphi')}{[\sin z'\sin z''\cos(\varphi-\varphi')+\cos z'\cos z''\cos(\varphi-\varphi'')]\sin(\varphi+\varphi''')-\cos z' K}\right\},\\[3ex] R''_{\prime\prime}=-D''\left\{\dfrac{[\cos x''\cos z'\cos(\varphi+\varphi'')+\sin x''\sin z'\cos(\varphi-\varphi')]\sin(\varphi-\varphi'')-\cos z' G}{[\sin z'\sin z''\cos(\varphi-\varphi')+\cos z'\cos z''\cos(\varphi-\varphi'')]\sin(\varphi+\varphi'')-\cos z' K}\right\}, \end{cases}$$

et

(22) $$K = \frac{\gamma''_{,}}{\sqrt{1-\gamma''^2_{,}}} \sin(\varphi' - \varphi''') \sin(\varphi' + \varphi''').$$

Si l'on ne veut conserver dans (19) et (20) que les premières puissances de $(\pi^2 - \mu^2)$, on peut poser

(23) $$\begin{cases} R''_{,} = -D' \dfrac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} \left[\sin x' \cos z' \dfrac{\cos(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')} - \cos x' \sin z' \right], \\ R''_{''} = -D'' \dfrac{\sin(\varphi - \varphi'')}{\sin(\varphi + \varphi'')} \left[\cos x' \sin z' \dfrac{\cos(\varphi + \varphi'')}{\cos(\varphi - \varphi'')} + \sin x' \sin z' \right]. \end{cases}$$

§ XIV.

Un rayon de lumière polarisé suivant l'azimut α est transmis par un milieu non cristallisé que limitent des plans parallèles ; il se dirige, après cette transmission, dans un azimut β, qui satisfait à la relation

$$\tang \beta = \frac{\tang \alpha}{\cos^2(\varphi - \varphi')} = \frac{P}{S \cos^2(\varphi - \varphi')};$$

ce rayon, reçu par une plaque de tourmaline, disparaît totalement si la direction du plan suivant lequel elle polariserait la lumière qui la traverse se trouve dans l'azimut β', pour lequel

(1) $$\tang \beta' = -\frac{S \cos^2(\varphi - \varphi')}{P}.$$

Substituons maintenant à la plaque non cristallisée une plaque mince de cristal, suffisamment mince pour que le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire ne soient pas séparés dans le rayon transmis. La lumière incidente doit ainsi rester polarisée dans l'azimut α où $\tang \alpha = \frac{P}{S}$, et je supposerai que la tourmaline soit encore dans l'azimut β', pour lequel $\tang \beta' = -\frac{S}{P} \cos^2(\varphi - \varphi')$. Le rayon ne sera pas complétement détruit, mais il y aura toujours certains azimuts de la ligne principale de la petite plaque cristalline, pour lesquels la lumière qui traverse est minimum. Ce sont ces azimuts que nous nous proposons de déduire de nos formules. Ils paraissent particulièrement propres à l'épreuve expérimentale d'où doit résulter la confirmation ou la réfutation des formules (17), (18) et (20). Je décomposerai la lumière en lumière polarisée suivant β' et en lumière polarisée perpendiculairement.

Les composantes du mouvement suivant β' proviennent de P' et S' dans l'équation (20) ; je les désignerai par O ; j'appellerai E celles qui dérivent de P'' et S'' ;

on aura alors

$$\mathrm{O} = \mathrm{P}' \sin\beta' + \mathrm{S}' \cos\beta',$$
$$\mathrm{E} = \mathrm{P}'' \sin\beta' + \mathrm{S}'' \cos\beta';$$

et en remplaçant $\sin\beta'$ et $\cos\beta'$ par leurs valeurs déduites de l'équation (1), et P', P'',... par leurs valeurs tirées de l'équation (20), § XIII,

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{O}\sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{S}^2\cos^2(\varphi-\varphi')} \\ = \dfrac{\mathrm{D}'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}\left[\mathrm{P}\cos x' + \mathrm{S}\sin x'\cos(\varphi-\varphi')\right] - \mathrm{R}''_{,}\sqrt{\dfrac{1-\gamma_{,}^{2}}{1-\gamma_{,}^{\prime\prime 2}}}\,\dfrac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}\left[\mathrm{P}\sin x' - \mathrm{S}\cos x'\cos(\varphi-\varphi')\right], \\ \mathrm{E}\sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{S}^2\cos^2(\varphi-\varphi')} \\ = -\sqrt{\dfrac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2}}\left[\mathrm{P}\sin x' - \mathrm{S}\cos x'\cos(\varphi-\varphi')\right]\left[\dfrac{\mathrm{D}''\sin(\varphi'+\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')} + \mathrm{R}''_{,,}\sqrt{\dfrac{1-\gamma''^2}{1-\gamma_{,}^{\prime\prime 2}}}\,\dfrac{\sin(\varphi'-\varphi''')}{\sin(\varphi+\varphi')}\right]. \end{cases}$$

D'après ces expressions, on voit que $\mathrm{O}^2 + \mathrm{E}^2$ ne peut, en général, être $= 0$, car O et E ne contiennent aucun facteur commun qui puisse être $= 0$; en sorte que la tourmaline, tout en se trouvant dans l'azimut β', ne peut faire disparaître en général le rayon transmis. Mais si la double réfraction est très-faible, et si l'on peut négliger les termes qui dépendent de $(\varphi'-\varphi'')$, on obtiendra, en mettant pour D' et D'' leurs valeurs tirées de l'équation (19),

$$(\mathrm{O}^2 + \mathrm{E}^2)\left[\mathrm{P}^2 + \mathrm{S}^2\cos^2(\varphi-\varphi')\right]$$
$$= 2\left[\mathrm{P}\cos x' + \mathrm{S}\sin x'\cos(\varphi-\varphi')\right]^2\left[\mathrm{P}\sin x' - \mathrm{S}\cos x'\cos(\varphi-\varphi')\right]^2 \frac{\sin^2 2\varphi\sin^2 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos^2(\varphi-\varphi')},$$

d'où il suit que $\mathrm{O}^2 + \mathrm{E}^2$ est presque $= 0$, à des quantités du deuxième ordre près, dans deux cas :

$$(3)\quad \begin{cases} 1^{\circ}.\ \text{Quand}\quad \mathrm{P}\cos x' + \mathrm{S}\sin x'\cos(\varphi-\varphi') = 0, \\ 2^{\circ}.\ \text{Quand}\quad \mathrm{P}\sin x' - \mathrm{S}\cos x'\cos(\varphi-\varphi') = 0. \end{cases}$$

De là on tire deux valeurs pour x', et de celles-ci, au moyen des équations (14), § XIII, deux azimuts ω, dans lesquels doit être placé le plan d'incidence pour que $\mathrm{O}^2 + \mathrm{E}^2$ disparaisse. On tire de la première, en posant

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{P}}\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\varphi'} = \operatorname{tang}\Pi_{,},$$

$$\cos(\Pi_{,} + \omega) = \frac{\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{1+\left[\dfrac{\mathrm{S}\cos(\varphi-\varphi')}{\mathrm{P}\cos\varphi'}\right]^2}},$$

et de la seconde, en posant

$$\tang \Pi'' = \frac{P}{S\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')},$$

$$\sin(\Pi_{''}+\omega) = \frac{\frac{C}{A}\tang\varphi'}{\sqrt{1+\left[\frac{P}{S}\frac{1}{\cos(\varphi-\varphi')\cos\varphi'}\right]^2}}.$$

On voit qu'il n'y a pas pour toute valeur de φ une valeur possible pour ω. Aussi longtemps que le rayon réfracté fait avec la normale à la surface réfringente des angles plus petits que l'inclinaison de l'axe sur la même ligne, l'azimut ω est possible pour toute valeur de φ, quelle que soit d'ailleurs la valeur de $\frac{P}{S}$, c'est-à-dire de l'azimut du plan de polarisation du rayon incident.

Si $\tang\varphi' > \frac{A}{C}$, on doit avoir, quand la première équation est satisfaite par une valeur possible de ω,

$$\frac{\sin^2\varphi'}{A^2} - 1 < \left[\frac{S\cos(\varphi-\varphi')}{P}\right]^2;$$

et si la seconde est aussi, et sous la même condition, vérifiée par une valeur possible de ω, on doit avoir

$$\frac{\sin^2\varphi'}{A^2} - 1 < \left[\frac{P}{S\cos(\varphi-\varphi')}\right]^2.$$

Si les deux valeurs de ω déterminées par l'équation (3) sont à la fois possibles, ces deux équations de condition doivent en même temps subsister. En les multipliant l'une par l'autre, on obtient encore une troisième condition indépendante de $\frac{P}{S}$ qui doit être remplie, savoir,

$$\sin^2\varphi' < 2A^2.$$

Nous pouvons ainsi poser

$$\sin\varphi' = (1+\alpha)A^2, \quad \alpha < 1:$$

nous n'avons besoin que de considérer les valeurs de α entre o et 1; car pour une valeur négative de α on a

$$\tang^2\varphi' < \frac{A^2}{C^2},$$

et dans ce cas, comme nous l'avons déjà remarqué, les deux valeurs de ω sont toujours possibles. On peut donc écrire ainsi les deux premières conditions:

$$(4) \qquad \frac{P}{S\cos(\varphi-\varphi')} > \sqrt{\alpha}, \quad \frac{P}{S\cos(\varphi-\varphi')} < \sqrt{\frac{1}{\alpha}}.$$

On obtient, si ω est déterminé par la première des équations (3),

$$(5)\qquad O_{,}^{2}+E_{,}^{2}=\frac{R_{,}''^{2}\,\dfrac{1-\gamma'^{2}}{1-\gamma_{,}''^{2}}\left[\dfrac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}\right]^{2}}{\sin^{2}x+\cos^{2}x\cos^{2}(\varphi-\varphi')};$$

$R_{,}''$ doit être déterminé par les équations (23) et (24), avec cette restriction que $\frac{P}{S}=-\tan x'\cos(\varphi-\varphi')$.

Si ω est déterminé par la seconde des équations (3), on a

$$(6)\qquad O_{''}^{2}+E_{''}^{2}=\frac{D'^{2}\sin^{2}2\varphi'}{\sin^{2}[(\varphi+\varphi')(\cos^{2}x+\sin^{2}x\cos^{2}(\varphi-\varphi')]},$$

où l'on doit faire entrer la valeur de D' tirée de l'équation (16), avec l'attention de faire $\frac{P}{S}=\cot x\cos(\varphi-\varphi')$; ce qui donne, quand on s'arrête seulement aux premières puissances de $(\varphi'-\varphi'')$, après quelques réductions :

$$(7)\qquad D'=\frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi')}\left[\frac{\gamma\sin(\varphi+\varphi')}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}+\frac{\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}\cos z'\,\frac{\cos\varphi'}{\cos(\varphi-\varphi')}\right]\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}.$$

Quand la double réfraction sera considérable, par exemple comme dans le spath calcaire, les observations donneront pour ω des valeurs un peu différentes de celles qu'on calcule à l'aide de l'équation (3). Cela aura lieu surtout dans les azimuts, pour lesquels $O^{2}+E^{2}$ est un minimum après substitution des valeurs complètes de l'équation (2). Les expressions (3) ne seront donc pas $=0$, mais auront des valeurs de l'ordre $\varphi'-\varphi''$, que je désignerai respectivement par X' et X''. Je chercherai les conditions sous lesquelles $O^{2}+E^{2}$ est un minimum, mais j'y tiendrai seulement compte des premières puissances de $(\varphi'-\varphi'')$. Posons donc

$$(8)\qquad P\cos x'+S\sin x'\cos(\varphi-\varphi')=X'.$$

En négligeant les puissances supérieures de $(\varphi-\varphi')$, nous obtenons

$$(9)\qquad\left\{\begin{aligned}O'\sqrt{P^{2}+S^{2}\cos^{2}(\varphi-\varphi')}&=\left[\frac{\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}{\sin^{2}(\varphi+\varphi')}X'+R_{,}''\sqrt{\frac{1-\gamma'^{2}}{1-\gamma_{,}''^{2}}}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi')}\cos(\varphi-\varphi')\right]\frac{S}{\cos x'},\\ E'\sqrt{P^{2}+S^{2}\cos^{2}(\varphi-\varphi')}&=\left[\frac{\sin 2\varphi\sin 2\varphi'}{\sin^{2}(\varphi+\varphi')}X'\right]\frac{S}{\cos x'}.\end{aligned}\right.$$

Ceci posé dans $O^{2}+E^{2}=\min.$, donne

$$(10)\qquad X'=-R_{,}''\sqrt{\frac{1-\gamma'^{2}}{1-\gamma_{,}''^{2}}}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi''')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')}{2\sin 2\varphi\sin 2\varphi'},$$

ou, en observant que d'après l'équation (16) du paragraphe précédent, eu égard à l'équation (8), on peut poser

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= \frac{R''_{,}}{D'}\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi''')}{2\sin 2\varphi'}\,\frac{S\cos(\varphi-\varphi')}{\cos x'},\\ D' &= -\frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi-\varphi')}\,\frac{S}{\cos x'},\end{aligned}\right.$$

$\frac{R''_{,}}{D'}$ se remplace, d'après l'équation (23), § XIII, par

$$\frac{R''_{,}}{D'} = -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\left[\sin x'\cos z'\,\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\cos x'\sin z'\right].$$

Des équations (8) et (11), on déduit x'. Si l'on désigne par Y' la première approximation de x', de sorte qu'on ait

$$\operatorname{tang} Y' = -\frac{P}{S\cos(\varphi-\varphi')},$$

on obtient

$$(12)\qquad \sin(x'-Y') = +\frac{R''_{,}}{D'}\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{2\sin 2\varphi'},$$

d'où l'on peut tirer ω au moyen de l'équation (14), § XIII. Cette valeur de ω réduit $O_{,}^2 + E^2$ à la moitié de la valeur fournie par l'équation (5).

Si l'on pose dans l'équation (2)

$$(13)\qquad P\sin x' - S\cos x'\cos(\varphi-\varphi') = X'',$$

et si l'on ne conserve que les termes du premier ordre par rapport à $(\varphi'-\varphi'')$, on obtient

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} O''\sqrt{P^2+S^2\cos^4(\varphi-\varphi')} &= \frac{D'\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}\,\frac{S\cos(\varphi-\varphi')}{\sin x'},\\ E''\sqrt{P^2+S^2\cos^4(\varphi-\varphi')} &= -\frac{D''\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}X'' = -\frac{\sin 2\varphi\,\sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\,\frac{S}{\sin x}X''.\end{aligned}\right.$$

On tire de l'équation (15), § XIII, si l'on ne conserve que les termes du premier ordre, et si l'on réduit,

$$D' = \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}$$

$$\left\{X''\sin(\varphi+\varphi') + S\left[\frac{\gamma'}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\cos(\varphi+\varphi') + \cos x'\sin(\varphi+\varphi')\right]\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'')\right\},$$

expression qui peut se transformer en

$$(15)\qquad D' = \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\left[X''\sin(\varphi+\varphi') + S\,\frac{C\cos\varphi - A\cos\omega\sin\varphi}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'')\right],$$

d'où résulte :

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l}(O''^2+E''^2)[P^2+S^2\cos^2(\varphi-\varphi')] \\ \dfrac{\sin^2 2\varphi\sin^2 2\varphi'}{\sin^4(\varphi+\varphi')}\,\dfrac{S^2}{\sin^2 x}\left\{\left[X'' + S\,\dfrac{(C\cos\varphi - A\cos\omega\sin\varphi)}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,\dfrac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\sin(\varphi'-\varphi'')\right]^2 + X''^2\right\}\end{array}\right.,$$

et la valeur pour laquelle $O''^2 + E''^2$ devient minimum est

$$(17)\qquad X'' = -\frac{S(C\cos\varphi - A\sin\varphi\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{2}.$$

De cette équation et de l'équation (13), quand on désigne par Y'' la première approximation de x', Y'' satisfaisant à la condition

$$(18\,a)\qquad \operatorname{tang} Y'' = \frac{S\cos(\varphi-\varphi')}{P},$$

on déduit :

$$(18)\qquad \sin(x'-Y'') = -\sin Y''\,\frac{(C\sin\varphi - A\cos\varphi\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\varphi-\varphi')}\,\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{2}.$$

La valeur de ω qui lui correspond sera trouvée à l'aide de l'équation

$$\operatorname{tang} x' = \frac{A\sin\omega}{C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega}.$$

Il est bon de remarquer quelques cas particuliers.

Si dans l'équation (12) on fait $P = 0$, $\operatorname{tang} x'$ devient $= 0$, car dans ce cas $\frac{R'}{D'}$ devient aussi $= 0$, $\sin x'$ et $\sin z'$ disparaissant en même temps. De même, si l'on fait $S = 0$ dans l'équation (18), $\operatorname{tang} x' = 0$. Ceci est strictement juste, comme le font voir les expressions O et E dans l'équation (2) ; le résultat qui s'en déduit immédiatement n'est pas moins exact, à savoir qu'un rayon polarisé parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence, conserve son plan de polarisation rigoureusement quand il est transmis par une plaque mince cristallisée, de manière que son plan d'incidence coïncide avec la section principale du cristal. Les deux cas suivants offrent un intérêt plus grand qu'aucun des autres.

1. Si dans l'équation (12) on fait $S = 0$, on détermine les conditions sous lesquelles un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence se trouve, le moins possible, modifié dans son azimut de polarisation par son passage à travers une lame mince.

Comme en même temps que $S = 0$, $\cos Y'$ est aussi $= 0$, et $\sin Y' = 1$, on a

$$\frac{R''_{,}}{D'} = -\operatorname{tang}(\varphi - \varphi')\operatorname{cotg}(\varphi + \varphi')\cos z',$$

et

(19) $$\sin(x' - Y') = -\cos x' = -\sqrt{\frac{1-\gamma'^2}{1-\gamma''^2_{,}}}\operatorname{tang}(\varphi - \varphi')\operatorname{cotang}(\varphi + \varphi')\cos z'\,\frac{\sin(\varphi' - \varphi''')}{2\sin 2\varphi'}.$$

Les formules (12) et (18) donnent en particulier la relation qui doit exister entre φ et ω pour que $O^2 + E^2$ devienne un minimum. On peut y regarder φ comme donné, et s'en servir pour déterminer ω, et c'est ce que nous avons fait jusqu'ici; mais à l'inverse on peut se donner ω et se proposer de trouver φ. Cette dernière signification de la formule (12) a de l'intérêt parce que les expériences peuvent en fournir la vérification dans le cas particulier représenté par l'équation (19). Il s'agit donc de déterminer, à l'aide de l'équation (19), l'angle d'incidence φ correspondant à une valeur donnée de ω. On peut, dans la formule (19), pour φ, φ' et $(\varphi' - \varphi''')$ mettre leurs valeurs qui résultent de $\cos x' = 0$, c'est-à-dire de

(20) $$C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega = 0.$$

Si l'on désigne par $\cos(x')$ la valeur de $\cos x'$ qui, d'après cette relation, doit sortir de l'équation (19), on a

(21) $$\frac{C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1-\gamma'^2}} = \cos(x'),$$

équation qui servira à trouver φ' et par conséquent φ; si l'on désigne la valeur de φ' qui doit se déduire de l'équation (20) par (φ'), et celle qui doit se déduire de l'équation (21) par $(\varphi') + \xi$, ξ étant une quantité de l'ordre $\cos(x')$, c'est-à-dire, à cause de l'équation (19), de l'ordre $(\varphi' - \varphi''')$, on a, en négligeant les puissances de $(\varphi' - \varphi''')$,

$$\xi = \frac{\sqrt{1-\gamma'^2}}{\gamma'}\cos(x').$$

Si l'on désigne par (φ) la valeur particulière de l'angle φ correspondante à (φ'), et par $(\varphi) + \psi_{,}$ la valeur de cet angle correspondante à $(\varphi') + \xi$, on a, par suite de l'équation $\sin(\varphi' + \xi) = \mu\sin[(\varphi) + \psi_{,}]$,

$$\psi_{,} = \frac{\cos(\varphi')}{\mu\cos(\varphi)}\xi_{,} = \frac{\sqrt{1-\gamma'^2}}{\mu\gamma'}\,\frac{\cos(\varphi')}{\cos(\varphi)}\cos(x');$$

si l'on observe que dans le degré d'approximation usité jusqu'ici,

$$\sin(\varphi' - \varphi''') = \frac{(1-\gamma''^2_{,})}{(1-\gamma''^2)}\sin(\varphi' - \varphi''),$$

on a finalement

$$(22)\qquad \psi_{,} = \frac{\sqrt{1-\gamma_{,}''^{2}}}{2\mu\gamma'}\,\frac{\cos\varphi'\cos z'}{\cos\varphi\sin 2\varphi'}\,\mathrm{tang}(\varphi-\varphi')\,\mathrm{cotang}(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'-\varphi''),$$

où pour les valeurs respectives de φ on doit mettre celles qui résultent de l'équation (20).

2. Si dans l'équation (18) on fait $P = 0$, $\cos Y'' = 0$, comme cela résulte clairement de l'équation (18 a), et l'on a

$$\cos x' = \frac{C(\cos\varphi - A\sin\varphi\cos\omega)}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}\,\frac{\mathrm{tang}(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi''')}{2},$$

ou bien, comme à la suite de l'équation $\cos Y'' = 0$ on a

$$C\cos\varphi - A\sin\varphi\cos\omega = \gamma'\cos(\varphi+\varphi'),$$

$$(23)\qquad \cos x' = \frac{\gamma'}{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}\,\mathrm{tang}(\varphi-\varphi')\cot(\varphi+\varphi')\,\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{2}.$$

A l'aide de cette relation on peut encore déterminer la valeur de φ qui correspond à une valeur donnée pour ω. Si l'on désigne la valeur de φ déterminée par l'équation (23) par $(\varphi+\psi_{,,})$, φ se rapportant à la valeur de φ' déterminée par l'équation (20), pour laquelle

$$\mathrm{tang}\,\varphi' = \frac{A}{C}\cos\omega,$$

on trouve, par des considérations semblables à celles qui, ci-dessus, nous ont fait trouver $\psi_{,}$,

$$\psi_{,,} = \frac{\sqrt{1-\gamma'^{2}}}{\mu\gamma'}\,\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}\cos x';$$

on doit remplacer $\cos x'$ par sa valeur tirée de l'équation (23). On a ainsi

$$\psi_{,,} = \frac{1}{2\mu}\,\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}\,\mathrm{tang}(\varphi-\varphi')\cot(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'-\varphi''):$$

pour φ et φ' on doit mettre les valeurs qui ressortent de l'équation (20).

Si l'on compare $\psi_{,}$ à $\psi_{,,}$, on voit qu'on a

$$\psi_{,} = \psi_{,,}\,\frac{\sqrt{1-\gamma_{,,}'^{2}}}{\gamma'}\,\frac{\cos z'}{\sin 2\varphi'}.$$

Au moyen des relations

$$\sqrt{1-\gamma_{,}'^{2}}\cos z' = -C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos\omega,\quad \text{et}\quad C\sin\varphi' - A\cos\omega\cos\varphi' = 0,$$

on trouve

$$\frac{\sqrt{1-\gamma_{\prime}''^{2}}}{\gamma'}\,\frac{\cos z'}{\sin 2\varphi'} = -\frac{\sqrt{1-\gamma_{\prime}''^{2}}}{\sqrt{1-\gamma_{\prime}'^{2}}},$$

ce qui permet de poser, puisqu'on néglige les carrés de $(\varphi' - \varphi'')$,

$$\psi_{\prime} + \psi_{\prime\prime} = 0.$$

§ XV.

Il faut présentement appliquer les principes établis dans le § II aux milieux cristallisés à deux axes optiques. A cette fin, j'établirai d'abord les formules générales qui déterminent les vitesses de propagation des ondes, les directions de leurs mouvements et la position des rayons qui leur appartiennent. Soient μ, ν, π les valeurs des trois axes d'élasticité; soient μ et π la plus petite et la plus grande de ces valeurs et ν la valeur moyenne. Prenons pour axes coordonnés x, y, z des parallèles aux trois axes d'élasticité μ, ν, π.

L'équation de la surface d'élasticité de Fresnel est, d'après cela,

$$(1) \qquad \rho^2 = \mu^2 a^2 + \nu^2 b^2 + \pi^2 c^2.$$

ρ désigne le rayon vecteur de cette surface et a, b, c les cosinus des angles que ce rayon vecteur fait avec les trois axes. Les deux vitesses de propagation d'une onde, selon qu'elle est ordinaire ou extraordinaire [*], s'obtiennent en menant par le centre de la surface d'élasticité un plan parallèle au plan de l'onde, et déterminant le plus grand et le plus petit rayon vecteur de cette section. Si α, β, γ désignent les cosinus des inclinaisons de la normale à l'onde plane sur les trois axes d'élasticité μ, ν, π, la valeur υ du plus grand ou du plus petit rayon vecteur est déterminée par l'équation suivante

$$(2) \qquad \frac{\alpha^2}{\upsilon^2-\mu^2} + \frac{\beta^2}{\upsilon^2-\nu^2} + \frac{\gamma^2}{\upsilon^2-\pi^2} = 0.$$

Je désignerai les deux racines de cette équation par o et e, de sorte que o ou e désigne la vitesse de propagation d'une onde plane parallèle à $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, selon que cette onde est ordinaire ou extraordinaire.

La direction du mouvement dans cette onde est perpendiculaire au rayon vecteur de son intersection avec la surface d'élasticité, rayon vecteur qui exprime sa vitesse de propagation. On trouve pour les cosinus o_1, o_2, o_3 des angles que la direction

---

[*] *Remarque.* Le sens de cette dénomination impropre ne peut être douteux que lorsque les deux axes optiques sont inclinés l'un sur l'autre de 90°. J'appelle onde ordinaire celle qui, dans le sens propre du mot, serait en réalité l'onde ordinaire, si l'on supposait l'angle des deux axes optiques diminué jusqu'à 0

du mouvement dans le plan de l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ forme avec les axes d'élasticité dans le cas d'une onde ordinaire,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} o_1 &= \frac{\alpha}{(e^2-\mu^2)\,\mathrm{E}},\\ o_2 &= \frac{\beta}{(e^2-\nu^2)\,\mathrm{E}},\\ o_3 &= \frac{\gamma}{(e^2-\pi^2)\,\mathrm{E}},\end{aligned}\right.$$

en posant, pour plus de simplicité,

$$\mathrm{E} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{e^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{e^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{e^2-\pi^2}\right)^2}.$$

Si l'on désigne les cosinus correspondants au cas où l'onde est extraordinaire par e_1, e_2, e_3, on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} e_1 &= \frac{\alpha}{(o^2-\mu^2)\,\mathrm{O}},\\ e_2 &= \frac{\beta}{(o^2-\nu^2)\,\mathrm{O}},\\ e_3 &= \frac{\gamma}{(o^2-\pi^2)\,\mathrm{O}};\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{O} = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{o^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{o^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{o^2-\pi^2}\right)^2}.$$

Ces valeurs (3) et (4) résultent immédiatement des expressions que j'ai données dans mon Mémoire sur la double réfraction (*Pogg. Ann.*, Bd. XXV, p. 445).

A un autre endroit (*Pogg. Ann.*, Bd. XXXIII), j'ai démontré que les racines o et e de l'équation (2) reçoivent une expression très-simple quand on rapporte la position du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ aux axes optiques, c'est-à-dire aux normales aux sections circulaires de la surface d'élasticité.

Si le plan d'ondes forme avec ces axes les angles $90° - u$ et $90° - u'$, il vient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} o^2 &= \mu^2 - (\mu^2-\pi^2)\sin^2\frac{u-u'}{2} = \frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\mu^2-\pi^2}{2}\cos(u-u'),\\ e^2 &= \mu^2 - (\mu^2-\pi^2)\sin^2\frac{u+u'}{2} = \frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\mu^2-\pi^2}{2}\cos(u+u').\end{aligned}\right.$$

Le rayon correspondant à l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ a pour direction la ligne dans laquelle se meut le point d'intersection de cette onde avec d'autres ondes $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$, qui dans leurs directions diffèrent infiniment peu de la première. Cette direction dans les cristaux ne coïncide pas avec la normale à l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, car avec la direction des ondes les vitesses de propagation changent aussi. Soit $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ une onde extraordinaire, et soit, après l'unité de temps, sa position donnée par l'équation

(a) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = e.$$

La position de deux autres ondes infiniment peu différentes en direction s'obtiendra en différentiant cette équation successivement par rapport à α et par rapport à β,

(b) $$x + \frac{d\gamma}{d\alpha} z = \frac{de}{d\alpha},$$

(c) $$y + \frac{d\gamma}{d\beta} \quad = \frac{de}{d\beta}.$$

Une ligne menée du centre $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ au point indépendant de $d\alpha$ et de $d\beta$ des trois plans (a), (b), (c) est la direction du rayon qui appartient à l'onde extraordinaire $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. On doit éliminer les différentielles par rapport à $d\alpha$ et $d\beta$.

Les quotients différentiels de γ se tirent de la condition

(d) $$\left\{ \begin{array}{c} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \dfrac{d\gamma}{d\alpha} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}, \quad \dfrac{d\gamma}{d\beta} = -\dfrac{\beta}{\gamma}; \end{array} \right.$$

les valeurs des quotients différentiels $\frac{de}{d\alpha}, \frac{de}{d\beta}$ se tirent par différentiation de l'équation (2) qui devient, en faisant $v = e$,

(e) $$\frac{\alpha^2}{e^2 - \mu^2} + \frac{\beta^2}{e^2 - \nu^2} + \frac{\gamma^2}{e^2 - \pi^2} = 0.$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à α, qu'on y remplace $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ par sa valeur tirée de (d), et qu'on pose, d'après l'équation (3),

(f) $$\left(\frac{\alpha}{e^2 - \mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{e^2 - \nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{e^2 - \pi^2}\right)^2 = \mathrm{E}^2,$$

on obtient

(g) $$e\mathrm{E}^2 \frac{de}{d\alpha} = \frac{\alpha}{e^2 - \mu^2} - \frac{\alpha}{e^2 - \pi^2};$$

on trouve tout pareillement

(h) $$e\mathrm{E}^2 \frac{de}{d\beta} = \frac{\beta}{e^2 - \nu^2} - \frac{\beta}{e^2 - \pi^2}.$$

Les valeurs de (d), de (g) et de (h), substituées dans (b) et (c), les changent dans les équations suivantes :

(i) $$x - \frac{\alpha}{\gamma} z = \alpha \left(\frac{1}{e^2 - \mu^2} - \frac{1}{e^2 - \pi^2}\right) \frac{1}{\mathrm{E}^2 e},$$

(k) $$y - \frac{\beta}{\gamma} z = \beta \left(\frac{1}{e^2 - \nu^2} - \frac{1}{e^2 - \pi^2}\right) \frac{1}{\mathrm{E}^2 e}.$$

auxquelles on joint

$$(l) \qquad z - z = 0,$$

si l'on multiplie les trois équations (i), (k), (l) respectivement par α, β, γ, et qu'on les ajoute, on a pour la somme

$$(m) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - \frac{z}{\gamma} = \left(\frac{\alpha^2}{e^2 - \mu^2} + \frac{\beta^2}{e^2 - \nu^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \pi^2}\right)\frac{1}{E^2 e};$$

mais, d'après l'équation (a), on a

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = e,$$

et d'après l'équation (b),

$$\frac{\alpha^2}{e^2 - \mu^2} + \frac{\beta^2}{e^2 - \nu^2} + \frac{\gamma^2}{e^2 - \pi^2} = 0.$$

En observant ces conditions, on trouve, d'après l'équation (m):

$$z = \left[e + \frac{1}{E^2 e (e^2 - \pi^2)}\right]\gamma.$$

Cette valeur, substituée dans les équations (i) et (k), conduit aux valeurs de x et de y. Il vient donc, si les ordonnées du point d'intersection sont désignées par x_e, y_e, z_e, pour indiquer qu'il appartient à un système d'ondes extraordinaires,

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} x_e &= \alpha\left[e + \frac{1}{E^2 e (e^2 - \mu^2)}\right], \\ y_e &= \beta\left[e + \frac{1}{E^2 e (e^2 - \nu^2)}\right], \\ z_e &= \gamma\left[e + \frac{1}{E^2 e (e^2 - \pi^2)}\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans le même temps que le plan d'ondes parcourt l'espace e, le rayon qui lui correspond parcourt l'espace $\sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}$ que nous poserons $= r_e$. La vitesse de propagation du rayon est donc r_e; on trouve, en ajoutant les trois équations (6), ayant égard à l'équation (e) et observant qu'à cause de l'équation (f),

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{E^4 e^2}\left[\frac{\alpha^2}{(e^2 - \mu^2)^2} + \frac{\beta^2}{(e^2 - \nu^2)^2} + \frac{\gamma^2}{(e^2 - \pi^2)^2}\right] = \frac{1}{E^2 e}, \\ &r_e^2 = e^2 + \frac{1}{e^2 E^2}. \end{aligned}\right.$$

Les cosinus des angles $(S_e a)$, $(S_e b)$, $(S_e c)$ que le rayon forme avec les trois axes d'élasticité, sont

$$(8) \qquad \cos(S_e a) = \frac{x_e}{r_e}, \quad \cos(S_e b) = \frac{y_e}{r_e}, \quad \cos(S_e c) = \frac{z_e}{r_e}.$$

Quand l'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ est une onde ordinaire, des considérations tout à fait identiques donnent pour les composantes de la vitesse du rayon suivant les trois axes d'élasticité,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x_o &= \alpha\left[o + \frac{1}{O^2 o\,(o^2-\mu^2)}\right],\\ y_o &= \beta\left[o + \frac{1}{O^2 o\,(o^2-\nu^2)}\right],\\ z_o &= \gamma\left[o + \frac{1}{O^2 o\,(o^2-\pi^2)}\right];\end{aligned}\right.$$

et pour la vitesse elle-même,

$$(10)\qquad r_o^2 = o^2 + \frac{1}{o^2 O^2}.$$

Au moyen de cette formule, on peut donc toujours, quand une onde est donnée, trouver le rayon qui lui appartient [*].

Je vais maintenant m'occuper du problème inverse, savoir, quand le rayon est donné, trouver l'onde dont il dérive.

Par l'équation (10) on trouve, en retranchant μ^2 des deux côtés,

$$(11)\qquad r_o^2 - \mu^2 = \frac{o^2 O^2 (o^2 - \mu^2) + 1}{o^2 O^2},$$

pendant que de l'équation (9) on tire

$$x_o = \frac{\alpha\,[O^2 o^2 (o^2 - \mu^2) + 1]}{O^2 o\,(o^2 - \mu^2)}.$$

Si l'on divise cette équation par la précédente, on obtient

$$\frac{x_o}{r_o^2 - \mu^2} = \frac{\alpha_o}{o^2 - \mu^2}.$$

On obtient deux équations semblables en remplaçant successivement x, α, μ par

---

[*] *Remarque.* Au moyen des équations (6) ou (9) on peut facilement déterminer α, β, γ et la vitesse de l'onde, et ces valeurs, portées dans (e), donnent une équation entre x, y, z. C'est l'équation de la surface des ondes. C'est M. le docteur Senf, maintenant à Dorpat, qui le premier a employé ce mode de calcul simple et élégant qui y conduit. Fresnel ne regardait pas son procédé comme présentable, et l'on abandonnera volontiers maintenant la marche suivie par Ampère (*Ann. de Chimie*, t. XXXIX). M. le docteur Senf a aussi le premier donné à l'équation de la surface des ondes la forme si convenable que voici :

$$\frac{\mu^2 x^2}{r^2 - \mu^2} + \frac{\nu^2 y^2}{r^2 - \nu^2} + \frac{\pi^2 z^2}{r^2 - \pi^2} = 0.$$

De cette forme résulte en même temps la construction donnée par Fresnel de la surface des ondes au moyen de l'ellipsoïde décrit autour des axes de la surface d'élasticité.

y, β, ν et par z, γ, π. On a donc

$$(12) \qquad \frac{x_o}{r_o^2-\mu^2} = \frac{\alpha_o}{o^2-\mu^2}, \quad \frac{y_o}{r_o^2-\nu^2} = \frac{\beta_o}{o^2-\nu^2}, \quad \frac{z_o}{r_o^2-\pi^2} = \frac{\gamma_o}{o^2-\pi^2}.$$

Si l'on ajoute les carrés de ces équations, et qu'on pose

$$(13) \qquad \left(\frac{x_o}{r_o^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{y_o}{r_o^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{z_o}{r_o^2-\pi^2}\right)^2 = S_o^2,$$

on a

$$(14) \qquad S_o^2 = o^2 O^2.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'équation (10), il vient

$$(15) \qquad o^2 = r_o^2 - \frac{1}{S_o^2}.$$

Au moyen de cette équation, on déduit de la position et de la vitesse de propagation du rayon la vitesse de propagation de l'onde. A l'aide des équations (14) et (12) on obtient les cosinus de l'inclinaison de la normale à l'onde sur les axes d'élasticité, savoir,

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} o\alpha &= x_o \left(1 - \frac{1}{r_o^2 - \mu^2 S_o^2}\right), \\ o\beta &= y_o \left(1 - \frac{1}{r_o^2 - \nu^2 S_o^2}\right), \\ o\gamma &= z_o \left(1 - \frac{1}{r_o^2 - \pi^2 S_o^2}\right) \end{aligned} \right.$$

On obtient des valeurs semblables, quand le rayon est un rayon extraordinaire, en remplaçant partout o par e, et au lieu de S_o mettant S_e qui peut être donné par l'équation (13), en remplaçant partout l'indice o par l'indice e.

Si l'on divise les équations (12) par l'équation (14), savoir, par $S_o = oO$, et qu'on tienne compte des équations (4), on trouve les cosinus e_1, e_2, e_3 de la direction du mouvement dans le rayon ordinaire déterminés par la direction de ce rayon, savoir,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} o_1 &= \frac{x_o}{(r_o^2 - \mu^2) S_o}, \\ o_2 &= \frac{y_o}{(r_o^2 - \nu^2) S_o}, \\ o_3 &= \frac{z_o}{(r_o^2 - \pi^2) S_o}. \end{aligned} \right.$$

De même on obtient les cosinus des angles que la direction du mouvement dans un rayon extraordinaire forme avec les axes d'élasticité, déterminés par les cosinus du rayon même,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1 &= \frac{x_e}{(r_e^2-\mu^2)\,\mathrm{S}_e},\\ e_2 &= \frac{y_e}{(r_e^2-\nu^2)\,\mathrm{S}_e},\\ e_3 &= \frac{z_e}{(r_e^2-\pi^2)\,\mathrm{S}_e}.\end{aligned}\right.$$

Pour le cosinus de l'angle qu'un rayon, quand il est ordinaire, fait avec la direction de son mouvement, on a

$$\frac{o_1 x_o + o_2 y_o + o_3 z_o}{r_o},$$

si l'on porte dans cette formule les valeurs de o_1, o_2, o_3 tirées de l'équation (3), et celles de x_o, y_o, z_o de l'équation (9), et qu'on observe que

$$\frac{\alpha^2}{e^2-\mu^2}+\frac{\beta^2}{e^2-\nu^2}+\frac{\gamma^2}{e^2-\pi^2}=0,$$

et que

$$\left[\frac{\alpha^2}{(e^2-\mu^2)(o^2-\mu^2)}+\frac{\beta^2}{(e^2-\nu^2)(o^2-\nu^2)}+\frac{\gamma^2}{(e^2-\pi^2)(o^2-\pi^2)}\right]\frac{1}{\mathrm{OE}}=0.$$

Puisque tel est le cosinus de l'inclinaison des deux directions déterminées par o_1, o_2, o_3 et e_1, e_2, e_6 qui sont perpendiculaires l'une à l'autre, on trouve alors

$$(18\,\mathrm{b})\qquad o_1 x_o + o_2 y_o + o_3 z_o = 0,$$

d'où il suit que *le rayon ordinaire est toujours perpendiculaire à la direction de son mouvement.* On trouve de même

$$(18\,\mathrm{c})\qquad e_1 x_e + e_2 y_e + e_3 z_e = 0.$$

Donc *les deux rayons, tant ordinaire qu'extraordinaire, sont perpendiculaires à la direction de leur mouvement.* Tel est le beau théorème qui s'élève contre une assertion de la théorie de Fresnel, comme une conséquence nécessaire de la définition du plan de polarisation adoptée par nous, nettement accusée par une construction géométrique simple de la surface des ondes et du rayon.

Les formules qui déterminent les rayons qui appartiennent à une onde donnée, aussi bien que celles qui déterminent l'onde correspondante à un rayon donné, deviennent dans quelques cas indéterminées. Je vais discuter ces cas, et cette discussion me conduira d'une manière très-simple à deux beaux théorèmes de Hamilton sur la réfraction conique (*Pogg. Ann.*, Bd. XXVIII). Je vais à cette fin m'occuper des formules (12), dans lesquelles je laisserai de côté l'indice o, et à la place de o je mettrai ϱ, qui désignera aussi bien la vitesse ordinaire que la vitesse extraordinaire des ondes ; de même r sans indice représentera les deux vitesses de propagation des rayons, mais de telle manière que r et ϱ désignent à la fois les vitesses ordinaires ou à la fois les vitesses extraordinaires.

Les relations (12) sont donc

$$(19)\qquad \frac{x}{r^2-\mu^2}=\frac{\alpha\upsilon}{\upsilon^2-\mu^2},\quad \frac{y}{r^2-\nu^2}=\frac{\beta\upsilon}{\upsilon^2-\nu^2},\quad \frac{z}{r^2-\pi^2}=\frac{\gamma\upsilon}{\upsilon^2-\pi^2}.$$

Quand on y fait $\beta = 0$, et qu'on détermine en même temps α et γ de manière que $\upsilon = \nu$, la valeur de y devient $= \frac{0}{0}$, et l'on doit conclure, puisque β et $\upsilon - \nu$ deviennent indépendamment l'un de l'autre $= 0$, que y n'a aucune valeur déterminée, mais un très-grand nombre de valeurs, à savoir, toutes les valeurs qui satisfont à la première et à la troisième des équations (19). Or ces deux équations déterminent une courbe, et tous les rayons qui sont menés de l'origine des coordonnées à cette courbe appartiennent à une seule et même onde, savoir, celle pour laquelle $\beta = 0$ et $\nu = \upsilon$; à cette onde appartient donc non-seulement une paire de rayons, mais un cône rayonnant. Cette onde, pour laquelle $\beta = 0$ et $\nu = \upsilon$, est parallèle à la section circulaire de la surface d'élasticité. On obtient les valeurs de α et de γ qui lui correspondent quand dans l'équation (2) on pose $\beta = 0$, d'où l'on déduit

$$\frac{\alpha^2}{\upsilon^2-\mu^2}+\frac{\gamma^2}{\upsilon^2-\pi^2}=0;$$

α et γ y sont déterminés de manière que $\upsilon = \nu$. On trouve

$$(20)\qquad \alpha=\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}},\qquad \gamma=\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans la première et la troisième des équations (19), et la valeur de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, il vient

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= (x^2+y^2+z^2-\mu^2)\,\frac{\nu}{\sqrt{(\pi^2-\mu^2)(\nu^2-\mu^2)}},\\ z &= -(x^2+y^2+z^2-\pi^2)\,\frac{\nu}{\sqrt{(\pi^2-\mu^2)(\pi^2-\nu^2)}}.\end{aligned}\right.$$

D'où il résulte que la courbe est un cercle. Le plan de ce cercle est perpendiculaire au plan $y = 0$, son centre est dans ce plan, et si l'on appelle les coordonnées des deux points d'intersection du plan des coordonnées $y = 0$ avec le cercle x', z' et x'', z'', on a

$$x'=\nu\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}},\qquad x''=\frac{\pi^2}{\nu}\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}};$$
$$z'=\nu\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}},\qquad z''=\frac{\mu^2}{\nu}\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}}.$$

Le diamètre du cercle est donc

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(z'-z'')^2}=\frac{1}{\nu}\sqrt{(\pi^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}=2R.$$

La ligne tirée de l'origine des coordonnées au point d'intersection (x', y', z') est perpendiculaire sur le diamètre du cercle qui serait mené de ce point d'intersection au point d'intersection marqué par (x'', y'', z''), et est par conséquent aussi perpendiculaire au plan du cercle. La comparaison de cette équation avec l'équation (20) fait voir que cette ligne, menée du centre au point (x', y', z'), est en même temps la normale à l'onde correspondante au *cône radieux*, c'est-à-dire l'axe optique.

La distance du point d'intersection x', y', z' au centre est ν. On peut donc, d'après cela, construire le cône de rayons qui appartient à l'onde plane parallèle à la section circulaire de la surface d'élasticité.

Si l'on appelle n l'inclinaison sur l'axe π déterminée par α et γ dans l'équation (20), n étant la demi-inclinaison de l'axe optique, il vient

$$\sin n = \sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}}, \qquad \cos n = \sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}}. \tag{22}$$

Si l'on introduit ses valeurs dans l'expression du diamètre, on obtient

$$2\mathrm{R} = \frac{1}{\nu}\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin 2n.$$

Si par l'axe optique on conduit un plan incliné d'un angle ω sur le plan déterminé par les deux axes optiques, la corde qui, dans le cercle (21), est tracée par ce plan, a pour expression $\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu}\sin 2n\cos\omega$, et par conséquent, si l'on désigne par q l'inclinaison du côté du cône situé dans ce plan sur l'axe optique,

$$\operatorname{tang} q = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\cos\omega. \tag{23}$$

C'est la forme la plus simple de l'équation du cône radieux.

Si l'on pose dans l'éq. (19) $y = 0$ et $r = \nu$, c'est-à-dire, si l'on suppose que le rayon se meuve dans la direction de la normale d'une section circulaire de l'ellipsoïde qui servit à Fresnel à construire les vitesses des rayons, β devient $= \frac{0}{0}$, ce qui, dans ce cas, doit vouloir dire que β a toutes les valeurs possibles, pourvu que la première et la troisième des équations (19) soient satisfaites. Quand $y = 0$ et $r = \nu$, on trouve

$$\left\{\begin{aligned} x &= \pi\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}} = \nu\sqrt{\frac{\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\pi^2}}} \\ &\text{et} \\ z &= \mu\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}} = \nu\sqrt{\frac{\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\pi^2}}{\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\pi^2}}}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Si l'on substitue dans la première et la troisième des équations (19) ces valeurs pour x, z et r, et si l'on pose en même temps $\alpha\rho = x'$, $\beta\rho = y'$, $\gamma\rho = z'$; x', y', z' étant les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur l'onde relative au rayon $y = 0$, $r = \nu$, on obtient

$$(25) \qquad x' = \frac{\pi(\rho^2 - \mu^2)}{\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}, \qquad z' = -\frac{\mu(\rho^2 - \pi^2)}{\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}.$$

$\rho = x'^2 + y'^2 + z'^2$. La courbe déterminée par ces équations est un cercle dont le plan est parallèle à l'axe y, et dont le centre est dans le plan (x, z).

Soient les coordonnées des points de rencontre de ce plan avec le cercle x'', z'' et x''', z'''; on a

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} x'' &= \frac{\mu^2\pi\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}{\mu^2(\nu^2 - \mu^2) + \pi^2(\pi^2 - \nu^2)}, \qquad & x''' &= \pi\sqrt{\frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}}, \\ z'' &= \frac{\pi^2\mu\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}{\mu^2(\nu^2 - \mu^2) + \pi^2(\pi^2 - \nu^2)}, \qquad & z''' &= \mu\sqrt{\frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}}. \end{aligned} \right.$$

Le diamètre de ce cercle s'obtient au moyen de l'équation

$$2R = \sqrt{(x'' - x''')^2 + (z'' - z''')^2} = \sqrt{\frac{(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}{\pi^2 + \mu^2 - \nu^2}}.$$

La ligne tirée de l'origine des coordonnées au point x'', y'', z'' est perpendiculaire au diamètre qui joint x'', y'', z'' et x''', y''', z''', et sa longueur est $\dfrac{\mu\pi}{\sqrt{\mu^2 + \pi^2 - \nu^2}}$.

La ligne tirée de l'origine des coordonnées au point x''', y''', z''' coïncide avec la normale à la section circulaire de l'ellipsoïde de Fresnel, et sa longueur $= \nu$.

Les lignes menées de l'origine des coordonnées à la périphérie du cercle, dont la construction est facile à la suite de ce qui a été dit, forment un cône elliptique qui est le lieu des normales aux ondes planes correspondantes au rayon perpendiculaire à la section circulaire de l'ellipsoïde. Si nous rapportons ce cône à un système d'axes coordonnés, semblable au système d'axes auquel nous avons rapporté précédemment le cône de l'équation (23), nous obtiendrons l'équation

$$(27) \quad \operatorname{tang}(q) = \cos\omega\sqrt{\frac{(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}{\pi^2\mu^2}} = \nu^2\cos\omega\sqrt{\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\pi^2}\right)\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}\right)}.$$

(q) représente l'inclinaison d'une génératrice quelconque de ce cône sur la génératrice qui va du sommet au point x'', y'', z''; ω désigne l'inclinaison du plan mené par ces deux génératrices sur le plan des deux axes optiques.

Si l'angle que la génératrice menée du sommet au point x''', y''' fait avec l'axe est designé par (n), $2(n)$ étant l'inclinaison de la normale à la section circulaire de l'ellipsoïde, on déduit immédiatement de l'équation (24),

$$\sin(n) = \sqrt{\frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\pi^2}}},$$

$$\cos(n) = \sqrt{\frac{\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\pi^2}}{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\pi^2}}}.$$

Ces valeurs, substituées dans tang (q), donnent

$$(28) \qquad \operatorname{tang}(q) = \nu^2 \left(\frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\pi^2}}{2}\right) \sin 2(n) \cos \omega.$$

Les différents coefficients de réfraction du rayon qui se meut le long de la normale à la section circulaire de l'ellipsoïde sont représentés par l'unité divisée par les lignes qui vont de l'origine à la circonférence du cercle (25), c'est-à-dire par $\frac{1}{v}$. On trouve

$$(29) \qquad v^2 = \nu^2 + \left(\frac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2}\right)^2 \sin^2 n \cos^2 n \cos^2 \omega.$$

D'où l'on voit que les coefficients de réfraction sont constants quand on se borne à prendre la seconde puissance de la différence du plus grand et du plus petit axe d'élasticité. On arrive à l'équation (29) le plus simplement possible de la manière suivante. On déduit de l'équation (25)

$$(30) \qquad -\frac{x'}{z} = \frac{\pi}{\mu}\,\frac{v^2 - \mu^2}{v^2 - \mu^2} \sqrt{\frac{\pi^2 - \nu^2}{\nu^2 - \pi^2}} = \frac{\pi}{\mu}\,\frac{v^2 - \mu^2}{v^2 - \pi^2} \cot n.$$

Si par le côté du cône qui est déterminé par l'équation (28), on fait passer un plan perpendiculaire au plan des deux axes optiques, et si l'on appelle α l'angle que la ligne d'intersection de ces deux plans forme avec la ligne qui est tirée de l'origine des coordonnées au point x'', z'', dans l'éq. (26), et si l'on pose de plus $\frac{x''}{z''} = \operatorname{tang} p$; x'', z'' ayant les valeurs déterminées dans l'équation (26), on obtient pour $\frac{x'}{z'}$, équation (30), une nouvelle expression, savoir,

$$\frac{x'}{z'} = \operatorname{tang}(p + \alpha).$$

On a, d'après l'équation (26),

$$\operatorname{tang} p = \frac{\mu}{\pi} \operatorname{tang} n,$$

n étant la moitié de l'inclinaison des deux axes optiques ; on a d'ailleurs

$$\operatorname{tang} \alpha = \cos \omega \operatorname{tang} (q),$$

équation dans laquelle pour $\cos (q)$ on doit mettre sa valeur déduite de l'éq. (28), et dans laquelle ω a la même signification que dans l'éq. (28). Si l'on porte ces valeurs pour p, α et (q) dans $\operatorname{tang} (p + \alpha)$, et si l'on met l'expression qui en résulte à la place de $\frac{x'}{z'}$ dans l'équation (30), on trouve l'expression donnée dans l'équation (29).

Si l'on rapporte la position du plan de l'onde aux axes optiques au lieu de la rapporter aux axes d'élasticité, on obtient, pour la plupart des formules ci dessus, des expressions très-simples que je présenterai ici, à cause de l'utilité dont elles nous seront plus tard.

Si u et u' sont les angles que la normale à l'onde fait avec les deux axes optiques, c'est-à-dire avec les normales aux sections circulaires de la surface d'élasticité, pendant que, comme ci-dessus, α, β, γ désignent les cosinus de la normale à l'onde avec les axes x, y, z, il vient

$$\alpha = \sin \left(\frac{u+u'}{2}\right) \sin \left(\frac{u-u'}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi^2 - \mu^2}{\nu^2 - \mu^2}},$$

$$\gamma = \cos \left(\frac{u+u'}{2}\right) \cos \frac{u-u'}{2} \sqrt{\frac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2 - \nu^2}}.$$

On a, d'après l'équation (5),

$$o^2 = \mu^2 + (\pi^2 - \mu^2) \sin^2 \frac{u'-u}{2},$$

et par conséquent,

$$o^2 - \mu^2 = (\pi^2 - \mu^2) \sin^2 \frac{u-u'}{2},$$

$$o^2 - \nu^2 = \mu^2 - \nu^2 + (\pi^2 - \mu^2) \sin^2 \frac{u-u'}{2} = \pi^2 - \nu^2 - (\pi^2 - \mu^2) \cos^2 \left(\frac{u-u'}{2}\right),$$

$$o^2 - \pi^2 = \qquad - (\pi^2 - \mu^2) \cos^2 \frac{u-u'}{2}.$$

Si l'on place ces valeurs dans l'expression de O^2, équation (4), savoir,

$$O^2 = \left(\frac{\alpha}{o^2 - \mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{o^2 - \nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{o^2 - \pi^2}\right)^2,$$

on obtient, en multipliant l'équation par $(\pi^2 - \mu^2)$,

$$(\pi^2 - \mu^2)^2 O^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)} \frac{\pi^2-\mu^2}{\nu^2-\mu^2}$$

$$+ \frac{1 - \sin^2\frac{u+u'}{2}\sin^2\frac{u-u'}{2}\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{\nu^2-\mu^2}\right) - \cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}}{\left(\frac{o^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}\right)}$$

$$+ \frac{\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}\right).$$

Si l'on réduit les termes du second membre de cette équation au même dénominateur, en multipliant le premier terme par $\frac{o^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2} = \frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2} + \sin^2\frac{u-u'}{2}$, et le troisième par $\frac{o^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2} = \frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2} - \cos^2\frac{u-u'}{2}$, on obtient, après quelques réductions,

$$O^2(\pi^2-\mu^2)^2 =$$

$$\frac{(\pi^2-\nu^2)\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2\frac{u-u'}{2} + (\nu^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right) + (\mu^2-\pi^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{(\pi^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\left[\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2} + \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\right]^2}.$$

Le numérateur de cette fraction se décompose dans les deux facteurs qui suivent :

$$\left[\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\right]\left[\mu^2-\nu^2+(\pi^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u'-u}{2}\right)\right];$$

on obtient donc

$$O^2(\pi^2-\mu^2)^2 = \frac{4\left[\sin^2\left(\frac{u'-u}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{u'+u}{2}\right)\right]}{\sin^2(u'-u)\left(\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2} + \sin^2\frac{u-u'}{2}\right)},$$

ou bien

$$\frac{1}{O^2} = \left(\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right)^2 \sin^2(u-u')\left[\frac{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2} - \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{\sin u \sin u'}\right]. \tag{31}$$

Par un calcul tout semblable, on trouve

$$\frac{1}{E^2} = \left(\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right)^2 \sin^2(u+u')\left[\frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right) - \frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}}{\sin u \sin u'}\right]. \tag{32}$$

Les quantités renfermées entre parenthèses, dans les équ. (31) et (32), ont une signification géométrique simple. Si l'on considère, en effet, la pyramide triangulaire dont les arêtes sont les deux axes optiques et la normale à l'onde, et si l'on appelle $2n$ l'angle que les deux axes optiques font entre eux, et $2j$ l'angle sous lequel sont inclinées entre elles les deux faces qui se coupent suivant la normale à l'onde, on a

$$\cos 2n = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos 2j;$$

et si l'on observe que, d'après l'équation (22),

$$\cos^2 n = \frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2} \quad \text{et} \quad \sin^2 n = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2},$$

on tire

$$(33) \qquad \sin^2 j = \frac{\dfrac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2} - \sin^2 \dfrac{u - u'}{2}}{\sin u \sin u'}, \qquad \cos^2 j = \frac{\sin^2 \left(\dfrac{u + u'}{2}\right) - \dfrac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}}{\sin u \sin u'}.$$

Ces valeurs, mises dans les équations (31) et (32), donnent donc

$$(34) \qquad \frac{1}{O} = \pm \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin (u - u') \sin j,$$

$$(35) \qquad \frac{1}{E} = \pm \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin (u + u') \cos j.$$

Je désignerai dans la suite par k l'angle j pour l'onde extraordinaire; je conserverai la lettre j pour l'onde ordinaire seule.

§ XVI.

Il nous faut maintenant rechercher l'équation qui dérive du principe de la conservation des forces vives. Nous reprendrons encore les considérations qui nous ont conduit au rapport des volumes de l'onde incidente et de l'onde réfractée dans les cristaux à un axe, § V, et nous emploierons aussi la même notation. Le volume de l'onde incidente est donc $\alpha H \cos \varphi$ et le volume de l'onde réfractée $\dfrac{H \sin \varphi'}{\sin \varphi} W$.

Nous tirons de l'équation (3), § V, pour l'onde ordinaire,

$$(1) \qquad W' = \alpha (\cos \varphi' - \sin \varphi' \operatorname{tang} q' \cos \psi').$$

q' désigne l'inclinaison du rayon sur la normale à l'onde et ψ' l'angle sous lequel le plan mené par la normale à l'onde ordinaire et le rayon de cette onde rencontre le plan d'incidence. Cet angle ψ' est calculé de manière que si l'on mène par le centre d'une sphère les deux normales N et n à l'onde incidente et à l'onde réfractée, et le rayon S, le côté NS du triangle sphérique NnS, déterminé par leurs rencontres avec la sphère, soit opposé à l'angle $180° - \psi'$, ou, ce qui revient au même, que $\psi' = 0$ si le rayon est dans le plan d'incidence et si l'inclinaison de S sur N est plus grande que celle de n sur N.

Il est facile de déduire les valeurs de tang q' et de cos ψ' des formules données. On a

$$\cos q' = \frac{\alpha' x_o + \beta' y_o + \gamma' z_o}{r_o};$$

si l'on y substitue les valeurs de x_o, y_o, z_o, et r_o de l'équation (9), § XV, on trouve

$$\cos q' = \frac{o}{\sqrt{o^2 + \frac{1}{O^2 o^2}}},$$

et par conséquent

$$\tang q' = \frac{1}{O\, o^2}. \tag{2}$$

Dans le triangle sphérique NnS, ci-dessus cité, le côté Nn $= \varphi'$ et nS $= q$; le troisième côté NS est l'inclinaison du rayon sur la normale à la surface réfringente. On a donc

$$\cos \mathrm{NS} = \frac{A x_o + B y_o + C z_o}{r_o},$$

A, B, C étant les cosinus des angles sous lesquels la normale N à la surface réfringente rencontre les parallèles aux trois axes d'élasticité. En mettant dans cette formule les valeurs de x_o, y_o, z_o, et r_o tirées de l'équation (9), § XV, on obtient

$$\cos \mathrm{NS} = \frac{o \cos \varphi + \frac{1}{O^2 o}\left(\frac{A\alpha'}{o^2 - \mu^2} + \frac{B\beta'}{o^2 - \nu^2} + \frac{C\gamma'}{o^2 - \pi^2}\right)}{o^2 + \frac{1}{o^2 O^2}}.$$

Enfin on a, pour l'angle $180° - \psi'$ opposé au côté NS,

$$-\cos \psi' = \frac{\cos \mathrm{NS} - \cos \varphi' \cos q'}{\sin \varphi' \sin q'},$$

et de là, quand pour cos NS, cos q et sin q on met leurs valeurs,

$$-\sin \varphi' \cos \psi' = \frac{1}{O}\left(\frac{A\alpha'}{o^2 - \mu^2} + \frac{B\beta'}{o^2 - \nu^2} + \frac{C\gamma'}{o^2 - \pi^2}\right). \tag{3}$$

Les considérations du § V nous donnent pareillement, pour l'onde extraordinaire,

$$W'' = \alpha(\cos \varphi'' - \sin \varphi'' \tang q'' \cos \psi''); \tag{4}$$

q'' et ψ'' ont la même signification pour cette onde que q' et ψ' pour l'onde ordinaire.

Nous trouvons ici, d'une manière toute semblable,

$$(5)\qquad \operatorname{tang} q'' = \frac{1}{Ec^2},$$

et

$$(6)\qquad -\sin\varphi''\cos\psi'' = \frac{1}{E}\left(\frac{A\alpha''}{c^2-\mu^2} + \frac{B\beta''}{c^2-\nu^2} + \frac{C\gamma''}{c^2-\pi^2}\right);$$

pour l'uniformité de la notation, j'ai désigné les cosinus des angles que la normale à l'onde forme avec les trois axes d'élasticité, par α'', β'' et γ''.

A la place des angles ψ' et ψ'', j'en introduirai d'autres; je prendrai les angles que les directions du mouvement dans l'onde ordinaire et dans l'onde extraordinaire font avec le plan d'incidence. J'appellerai ces angles x' et x''.

Comme il a été trouvé que les rayons sont perpendiculaires aux directions de leur mouvement,

$$x' = 90^\circ + \psi', \quad x'' = 90^\circ + \psi''.$$

On doit remarquer que, dans ces inégalités, x' et x'' sont comptées dans le même sens que ψ' et ψ''. D'après cela, on a

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\psi'\sin\varphi' &= \sin x'\sin\varphi' = -\frac{1}{O}\left(\frac{A\alpha'}{o^2-\mu^2} + \frac{B\beta'}{o^2-\nu^2} + \frac{C\gamma'}{o^2-\pi^2}\right),\\ \cos\psi''\sin\varphi'' &= \sin x''\sin\varphi'' = -\frac{1}{E}\left(\frac{A\alpha''}{e^2-\mu^2} + \frac{B\beta''}{e^2-\nu^2} + \frac{C\gamma''}{e^2-\pi^2}\right).\end{aligned}\right.$$

Les volumes correspondants, dans l'onde ordinaire et dans l'onde extraordinaire, deviennent, par suite,

$$\frac{\alpha H}{\sin\varphi}(\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin x'\sin^2\varphi'\operatorname{tang} q'),$$

et

$$\frac{\alpha H}{\sin\varphi}(\sin\varphi''\cos\varphi'' - \sin x''\sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'').$$

L'équation des forces vives est donc la suivante

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} (P^2 + S^2 - R_p^2 - R_s^2)\sin\varphi\cos\varphi = {} & D'^2(\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin x'\sin^2\varphi'\operatorname{tang} q')\\ & + D''^2(\sin\varphi''\cos\varphi'' - \sin x''\sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'').\end{aligned}\right.$$

P, S, R_p, R_s ont la même signification que ci-dessus, et D′ et D″ représentent les vitesses dans l'onde ordinaire et dans l'onde extraordinaire.

Pour former les équations qui résultent du principe de l'égalité des composantes, je décomposerai les vitesses D′ et D″ dans le rayon ordinaire et dans le rayon extraordinaire suivant les directions suivantes :

1°. Perpendiculairement au plan d'incidence; 2° perpendiculairement à la surface réfringente; 3° parallèlement au plan d'incidence et parallèlement à la surface réfringente. Ces composantes sont respectivement

$$\begin{array}{llcl}
\text{I.} & D'\sin x' & \text{et} & D''\sin x'', \\
\text{II.} & D'\cos x'\sin\varphi' & \text{et} & -D''\cos x''\sin\varphi'', \\
\text{III.} & D'\cos x'\cos\varphi' & \text{et} & -D''\cos x''\cos\varphi''.
\end{array}$$

Si nous décomposons suivant les trois mêmes directions les vitesses dans le rayon incident et dans le rayon réfléchi, nous obtenons

$$\begin{array}{llcl}
\text{I.} & P & \text{et} & R_p, \\
\text{II.} & -S\sin\varphi & \text{et} & -R_s\sin\varphi, \\
\text{III.} & -S\cos\varphi & \text{et} & +R_s\cos\varphi;
\end{array}$$

d'où nous déduisons, par le principe de l'égalité des composantes,

$$P + R_p = D'\sin x' + D''\sin x'', \tag{9}$$

$$(S + R_s)\sin\varphi = -D'\cos x'\sin\varphi' + D''\cos x''\sin\varphi'', \tag{10}$$

$$(S - R_s)\cos\varphi = -D'\cos x'\cos\varphi' + D''\cos x''\cos\varphi''. \tag{11}$$

Ces trois équations, combinées avec l'éq. (8), déterminent les quantités cherchées. Je vais montrer maintenant que l'équation (8) peut, dans ce cas comme dans le cas des cristaux à un axe, se remplacer par une équation linéaire.

Si l'on multiplie les équations (10) et (11) l'une par l'autre,

$$\begin{aligned}(S^2 - R_s^2)\sin\varphi\cos\varphi = D'^2\cos^2 x'\sin\varphi'\cos\varphi' + D''^2\cos^2 x''\sin\varphi''\cos\varphi'' \\ - D'D''\cos x'\cos x''\sin(\varphi' + \varphi'');\end{aligned}$$

et si l'on retranche ce produit de l'équation (8), on obtient

$$\begin{aligned}(P^2 - R_p^2)\sin\varphi\cos\varphi = {} & D'^2(\sin^2 x'\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin x'\sin^2\varphi'\operatorname{tang} q') \\ & + D''^2(\sin^2 x''\sin\varphi''\cos\varphi'' - \sin x''\sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'') \\ & + D'D''\cos x'\cos x''\sin(\varphi' + \varphi'').\end{aligned}$$

Cette équation est divisible par l'équation (9), et l'on obtient, par cette division,

$$\left\{\begin{aligned}(P - R_p)\sin\varphi\cos\varphi = {} & R'(\sin x'\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q') \\ & + R''(\sin x''\sin\varphi''\cos\varphi'' - \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'');\end{aligned}\right. \tag{12}$$

dans l'hypothèse où la relation suivante a lieu,

$$\begin{aligned}&\sin(\varphi' + \varphi'')[\sin x'\sin x''\cos(\varphi' - \varphi'') - \cos x'\cos x''] \\ &= \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q'\sin x'' + \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q''\cos x'.\end{aligned}$$

Pour démontrer la justesse de cette relation, je la mettrai d'abord sous une autre forme.

Si l'on remplace, à l'aide des équations (2) et (5), tang q' et tang q'' par leurs valeurs, savoir,

$$\tang q' = \frac{1}{o^2 O}, \quad \tang q'' = \frac{1}{e^2 E},$$

qu'on remarque en outre que

$$\frac{\sin^2 \varphi'}{o^2} = \frac{\sin^2 \varphi''}{e^2} = \sin^2 \varphi,$$

et que

$$\sin(\varphi' - \varphi'')\sin(\varphi' + \varphi'') = \sin^2\varphi\,(o^2 - e^2) = -\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u-u') - \cos(v-v')]\sin^2\varphi,$$

on trouve

$$\sin x' \sin x'' \cos(\varphi' - \varphi'') - \cos x' \cos x'' = \frac{-\left(\frac{\sin x''}{O} + \frac{\sin x'}{E}\right)}{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u - u') - \cos(v + v')]} \sin(\varphi' - \varphi'').$$

Avant de mettre pour $\frac{1}{O}$ et $\frac{1}{E}$ leurs valeurs déduites de l'équation (34), § XV, nous devons rechercher de quel signe nous les affecterons. Posons, dans l'équation (7),

$$A = 0, \quad C = 0,$$

nous obtenons

$$\cos\psi' \sin\varphi' = \sin x' \sin\varphi' = -\frac{1}{O}\frac{\beta'}{o^2 - \nu^2}.$$

D'après l'équation (5), § XV, on voit que puisque $\sin^2\frac{u-u'}{2}$ ne peut être plus grand que $\sin^2 n = \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 - \pi^2}$, o^2 ne peut être plus grand que ν^2 si, comme nous le supposons pour la symétrie, $\pi > \mu$. Par conséquent $o^2 - \nu^2$ est une quantité négative. Mais la valeur de $\cos\psi'$ est, dans ce cas où nous supposons $A = 0$, $C = 0$, toujours positive, comme cela paraît clairement par l'angle que le rayon fait avec l'axe d'élasticité ν, quand $\gamma' = 0$, angle plus grand que l'angle correspondant avec la normale à l'onde; $\frac{1}{O}$ doit donc être pris positivement, et par conséquent

$$\frac{1}{O} = \left(\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\right)\sin(u - u')\sin j;$$

u doit toujours être plus grand que u'.

Si l'on passe d'une normale α', β', γ' à une autre $-\alpha'$, β', γ', les angles u, u' échangent leur signification : l'arc qui précédemment était désigné par u doit être maintenant désigné par u', et réciproquement.

Pour discuter le signe qui convient à $\frac{1}{E}$, nous poserons dans l'équation (7)

$$B = 0, \quad C = 0,$$

de manière que

$$\cos\psi'' \sin\varphi'' = \sin x'' \sin\varphi'' = -\frac{1}{E}\frac{\alpha''}{e^2-\mu^2}.$$

La valeur de $e^2-\mu^2$ est toujours positive; la valeur de $\cos\psi$, quand on suppose de nouveau que $\pi^2 > \mu^2$, est, comme on voit, négative, si l'on pose $\beta'' = 0$, auquel cas le rayon fait avec l'axe d'élasticité μ un plus petit angle que la normale correspondante. Par conséquent il faut prendre aussi pour $\frac{1}{E}$ dans l'équation (34), §XV, le signe positif. Tant que la valeur de $\cos\psi''$ a son signe négatif, le signe de γ'' peut être positif ou négatif, c'est-à-dire que la normale à l'onde peut faire avec l'axe π un angle aigu ou obtus; ce n'est pas $\frac{\alpha''}{e^2-\mu^2}$ qui change de signe avec γ'', mais bien la valeur de $\frac{1}{E}$, donnée au § XV, équ. (34), car si γ'' est pris positivement, $u+u' < 180°$, et si γ'' est négatif, $u+u' > 180°$. D'après cela, on doit écrire

$$\frac{1}{E} = \pm\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin(v+v')\cos k,$$

où l'on prendra le signe négatif quand $\sin(v+v')$ sera négatif.

J'introduirai dans ce qui suit le signe $+$, pour la simplicité de l'expression, avec la réserve de changer ce signe $+$ en signe $-$ quand $\frac{1}{E}$ devra être négatif.

Si l'on met ces valeurs, maintenant plus exactement appréciées, de $\frac{1}{E}$ et de $\frac{1}{O}$ dans la relation (18), elle se change en la suivante :

$$(14)\quad \cos x'\cos x'' - \sin x'\sin x''\cos(\varphi'-\varphi'') = \left[\frac{\sin x''\sin j\sin(u-u') + \sin x'\cos k\sin(v+v')}{\cos(u-u') - \cos(v+v')}\right]\sin(\varphi'-\varphi'').$$

Cette relation peut se traduire par une construction géométrique à la surface de la sphère. Nous menons par le centre d'une sphère les deux axes optiques et les deux normales à l'onde ordinaire et à l'onde extraordinaire; soient A, A', O, E, *fig.* 9, les intersections de ces quatre lignes avec la surface. Le plan d'incidence coupe ainsi la sphère suivant le grand cercle OE. Les arcs AO, A'O sont u et u'; les arcs AE, A'E sont v, v'; l'arc EO $= (\varphi'-\varphi'')$; l'arc AA' $= 2n$. La direction du mouvement dans l'onde ordinaire O est dans le plan bisecteur de l'angle AOA' $= 2j$; la section de la sphère par ce plan est OO'. Si l'on construit EE' de manière à diviser en deux parties égales l'angle AEA' $= 2k$, et si l'on tire Ee perpendiculaire à EE', Ee est la section de la sphère par le plan dans lequel se fait le mouvement de l'onde extraordinaire E. Comme ces directions de mouvements sont perpendiculaires sur leurs normales respectives $O'ON = x'$ et $eEN = x''$. N désigne l'intersection de la sphère avec la normale à la surface réfringente.

A l'aide de cette construction je me suis convaincu de l'exactitude de la relation (14), mais d'une manière quelque peu pénible. La démonstration plus simple que voici m'a été communiquée par M. le professeur Jacobi.

Soient les angles EAO et EA'O désignés encore par α et α', et soit $EO = (\varphi' - \varphi'') = \Delta$; les triangles EAO et EA'O donnent les équations suivantes :

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\alpha\cos u &= \cos(x''-k)\cos(x'+j)\cos\Delta - \sin(x''-k)\sin(x'+j),\\
\sin\alpha'\cos u' &= \cos(x''+k)\cos(x'-j)\cos\Delta - \sin(x''+k)\sin(x'-j),\\
-\sin\alpha\cos\upsilon &= \sin(x''-k)\sin(x'+j)\cos\Delta - \cos(x''-k)\cos(x'+j),\\
-\sin\alpha'\cos\upsilon' &= \sin(x''+k)\sin(x'-j)\cos\Delta - \cos(x''+k)\cos(x'-j).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie les deux premières par $\sin x''$, les deux dernières par $\sin x'$, et qu'on pose

$$\begin{aligned}
\cos k &= \cos(x''+k)\cos x'' + \sin(x''+k)\sin x'',\\
&= \cos(x''-k)\cos x'' + \sin(x''-k)\sin x'',\\
\sin j &= -\sin(x'-j)\cos x' + \cos(x'-j)\sin x',\\
&= -\cos(x'+j)\sin x' + \sin(x'+j)\cos x',
\end{aligned}$$

on obtient

$$(b)\quad\left\{\begin{aligned}
-\sin\alpha\cos u\sin x'' &= \sin(x'+j)\cos k - [\sin(x'+j)\cos x'' + \cos(x'+j)\sin x''\cos\Delta]\cos(x''-k),\\
-\sin\alpha'\cos u'\sin x'' &= \sin(x'-j)\cos k - [\sin(x'-j)\cos x'' + \cos(x'-j)\sin x''\cos\Delta]\cos(x''+k),\\
-\sin\alpha\cos\upsilon\sin x' &= \cos(x''-k)\sin j - [\cos(x''-k)\cos x' - \sin(x''-k)\sin x'\cos\Delta]\sin(x'+j),\\
-\sin\alpha'\cos\upsilon'\sin x' &= -\cos(x''+k)\sin j - [\cos(x''+k)\cos x' - \sin(x''+k)\sin x'\cos\Delta]\sin(x'-j).
\end{aligned}\right.$$

On a de plus

$$(c)\quad\left\{\begin{aligned}
-\sin\alpha\sin u &= \sin\Delta\cos(x''-k), &\quad \sin\alpha\sin\upsilon &= \sin(x'+j)\sin\Delta,\\
-\sin\alpha'\sin u' &= \sin\Delta\cos(x''+k), &\quad \sin\alpha'\sin\upsilon &= \sin(x'-j)\sin\Delta.
\end{aligned}\right.$$

On déduit des équations (b) et (c)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}\sin x''\sin(u-u') &= \cos k[\cos(x''-k)\sin(x'-j) - \cos(x''+k)\sin(x'+j)]\\
&\quad + 2\cos(x''+k)\cos(x''-k)\sin j(\cos x'\cos x'' - \sin x'\sin x''\cos\Delta),\\
\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}\sin x'\sin(\upsilon+\upsilon') &= -\sin j[\cos(x''-k)\sin(x'-j) - \cos(x''+k)\sin(x'+j)]\\
&\quad + 2\sin(x'-j)\sin(x'+j)\cos k(\cos x'\cos x'' - \sin x'\sin x''\cos\Delta),
\end{aligned}$$

et de là

$$(d)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}[\sin x''\sin j\sin(u-u') + \sin x'\cos k]\sin(\upsilon+\upsilon')\\
&= 2[\cos(x''+k)\cos(x''-k)\sin^2 j + \sin(x'+j)\sin(x'-j)\cos^2 k](\cos x'\cos x'' - \sin x'\sin x''\cos\Delta);
\end{aligned}\right.$$

d'où se déduit la relation obtenue.

On a, en effet,

$$(e)\quad \begin{cases} \cos 2n = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos 2j = \cos(u-u') - 2\sin u \sin u' \sin^2 j, \\ \cos 2n = \cos \upsilon \cos \upsilon' + \sin \upsilon \sin \upsilon' \cos 2k = \cos(\upsilon+\upsilon') + 2\sin \upsilon \sin \upsilon' \sin^2 k. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\cos(u-u') - \cos(\upsilon+\upsilon') = 2(\sin u \sin u' \sin^2 j + \sin \upsilon \sin \upsilon' \cos^2 k),$$

d'où l'on déduit, d'après (c),

$$\frac{\sin\alpha \sin\alpha'}{\sin^2\Delta}[\cos(u-u') - \cos(\upsilon+\upsilon')] = 2[\cos(x''-k)\cos(x''+k)\sin^2 j + \sin(x'-j)\sin(x'+j)\cos^2 k].$$

Si l'on divise (d) par cette équation, on obtient

$$(f)\quad \frac{\sin x'' \sin j \sin(u-u') + \sin x' \cos k \sin(\upsilon+\upsilon')}{\cos(u-u') - \cos(\upsilon+\upsilon')} \sin\Delta = \cos x' \cos x'' - \sin x' \sin x'' \cos\Delta,$$

laquelle est la relation qu'il s'agissait de prouver.

On déduit encore de l'équation (a), d'une manière semblable, quelques relations qui, plus tard, nous seront utiles. Si l'on multiplie les deux premières équations (a) par $\cos x''$ et les deux dernières par $\sin x'$, on obtient

$$\begin{aligned} \sin\alpha \cos u \cos x'' &= +\sin k \sin(x'+j) - \cos(x''-k)[\sin(x'+j)\sin x'' - \cos(x'+j)\cos x'' \cos\Delta], \\ \sin\alpha' \cos u' \cos x'' &= -\sin k \sin(x'-j) - \cos(x''+k)[\sin(x'-j)\sin x'' - \cos(x'+j)\cos x'' \cos\Delta], \\ -\sin\alpha \cos\upsilon \sin x' &= \sin j \cos(x''-k) - \sin(x'+j)[\cos(x''-k)\cos x' - \sin(x''-k)\sin x' \cos\Delta], \\ -\sin\alpha' \cos\upsilon' \sin x' &= -\sin j \cos(x''+k) - \sin(x'-j)[\cos(x''+k)\cos x' - \sin(x''+k)\sin x' \cos\Delta], \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha \sin\alpha'}{\sin\Delta}\sin(u-u')\cos x'' &= \sin k[\sin(x'-j)\cos(x''-k) + \sin(x'+j)\cos(x''+k)] \\ &\quad - 2\sin j \cos(x''+k)\cos(x''-k)(\cos x' \sin x'' + \sin x' \cos x'' \cos\Delta), \\ \frac{\sin\alpha \sin\alpha'}{\sin\Delta}\sin(\upsilon-\upsilon')\sin x' &= \sin j[\cos(x''-k)\sin(x'-j) + \cos(x''+k)\sin(x'+j)] \\ &\quad - 2\sin k \sin(x'+j)\sin(x'-j)(\cos x' \sin x'' + \sin x' \cos x'' \cos\Delta). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(g)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha \sin\alpha'}{\sin\Delta}[\sin(u-u')\cos x'' \sin j - \sin(\upsilon-\upsilon')\sin x' \sin k] \\ = -2[\sin^2 j \cos(x''+k)\cos(x''-k) - \sin^2 k \sin(x'+j)\sin(x'-j)](\cos x' \sin x'' + \cos x'' \sin x' \cos\Delta). \end{cases}$$

On a, en outre, par l'équation (e),

$$\cos(u-u') - \cos(\upsilon-\upsilon') = 2(\sin u \sin u' \sin^2 j - \sin \upsilon \sin \upsilon' \cos^2 k),$$

et à cause de l'équation (e),

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin^2\Delta}[\cos(u-u')-\cos(\upsilon-\upsilon')]=2[\cos(x''-k)\cos(x''+k)\sin^2 j-\sin(x'-j)\sin(x'+j)\cos^2 k].$$

En prenant cette équation pour diviseur de (g), on obtient

$$\text{(h)}\quad -\sin\Delta\frac{\sin(u-u')\cos x''\sin j-\sin(\upsilon-\upsilon')\sin x'\sin k}{\cos(u-u')-\cos(\upsilon-\upsilon')}=\cos x'\sin x''+\cos x''\sin x'\cos\Delta.$$

On obtient une autre relation utile de la manière suivante. On multiplie les deux premières équations (a) par $\sin x''$ et la troisième et la quatrième par $\cos x'$,

$$\sin\alpha\cos u\sin x''=-\cos k\sin(x'+j)+\cos(x''-k)[\sin(x'+j)\cos x''+\cos(x'+j)\sin x''\cos\Delta],$$
$$\sin\alpha'\cos u'\sin x''=-\cos k\sin(x'-j)+\cos(x''+k)[\sin(x'-j)\cos x''+\cos(x'-j)\sin x''\cos\Delta],$$
$$-\sin\alpha\cos\upsilon\cos x'=-\cos j\cos(x''-k)+\sin(x'+j)[\cos(x''-k)\sin x'+\sin(x''-k)\cos x'\cos\Delta],$$
$$-\sin\alpha'\cos\upsilon'\cos x'=-\cos j\cos(x''+k)+\sin(x'-j)[\cos(x''+k)\sin x'+\sin(x''+k)\cos x'\cos\Delta].$$

D'où résulte

$$\frac{-\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}\sin x''\sin(u+u')=-\cos k[\sin(x'+j)\cos(x''+k)+\sin(x'-j)\cos(x''-k)]$$
$$+2\cos(x''-k)\cos(x''+k)\cos j(\sin x'\cos x''+\cos x'\sin x''\cos\Delta),$$
$$\frac{-\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}\cos x'\sin(\upsilon+\upsilon')=-\cos j[\cos(x''-k)\sin(x'-j)+\cos(x''+k)\sin(x'+j)]$$
$$+2\sin(x'+j)\sin(x'-j)\cos k(\cos x''\sin x'+\cos x'\sin x''\cos\Delta).$$

Par conséquent

$$\frac{-\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\Delta}[\sin x''\cos j\sin(u+u')-\cos x'\cos k\cos(\upsilon+\upsilon')]$$
$$=2[\cos(x''-k)\cos(x''+k)\cos^2 j-\sin(x'+j)\sin(x'-j)\cos^2 k](\cos x''\sin x'+\sin x''\cos x'\cos\Delta).$$

D'ailleurs

$$\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin^2\Delta}[\cos(u+u')-\cos(\upsilon+\upsilon')]=-2[\cos^2 j\cos(x''-k)\cos(x''+k)-\cos^2 k\sin(x'+j)\sin(x'-j)];$$

par conséquent

$$\text{(i)}\quad \sin\Delta\frac{\sin x''\cos j\sin(u+u')-\cos x'\cos k\cos(\upsilon+\upsilon')}{\cos(u+u')-\cos(\upsilon+\upsilon')}=(\cos x''\sin x'+\sin x''\cos x'\cos\Delta).$$

§ XVII.

Les equations d'où dépendent les intensités des rayons réfléchis et réfractés sont donc les suivantes :

$$
\begin{aligned}
(S+R_s)\sin\varphi &= -D'\cos x'\sin\varphi' + D''\cos x''\sin\varphi'',\\
(S-R_s)\cos\varphi &= -D'\cos x'\cos\varphi' + D''\cos x''\cos\varphi'',\\
P+R_p &= D'\sin x' + D''\sin x'',\\
(P-R_p)\sin\varphi\cos\varphi &= D'(\sin x'\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q')\\
&\quad + D''(\sin x''\sin\varphi''\cos\varphi'' - \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'').
\end{aligned}
$$

On déduit de là

$$
(1)\qquad \left\{\begin{aligned} R_p &= pP + s'S,\\ R_s &= p'P + sS,\end{aligned}\right.
$$

où les coefficients p, p', s, s' ont les valeurs suivantes :

$$
(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
Np &= \cos x''\sin(\varphi+\varphi'')[\sin x'\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q']\\
&\quad + \cos x'\sin(\varphi+\varphi')[\sin x''\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') + \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q''],\\
Ns &= -\cos x'\sin(\varphi-\varphi')[\sin x''\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') - \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'']\\
&\quad - \cos x''\sin(\varphi-\varphi'')[\sin x'\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q'],\\
Np' &= -\sin 2\varphi\cos x'\cos x''\sin(\varphi'-\varphi''),\\
Ns' &= \sin 2\varphi\left[\begin{aligned}&\sin x'\sin x''\sin(\varphi'-\varphi'')\cos(\varphi'+\varphi'')\\ &-\sin x''\sin^2\varphi'\operatorname{tang} q' + \sin x'\sin^2\varphi''\operatorname{tang} q''\end{aligned}\right].
\end{aligned}\right.
$$

N a pour valeur

$$
N = \left\{\begin{aligned}
&\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')[\sin x'\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q']\\
&+\cos x'\sin(\varphi+\varphi')[\sin x''\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') - \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'']
\end{aligned}\right\}.
$$

Pour les vitesses dans les rayons réfractés, on trouve

$$
(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
ND' &= 2\sin\varphi\cos\varphi\,\{P\cos x''\sin(\varphi+\varphi'') - S[\sin x''\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') - \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'']\},\\
ND'' &= 2\sin\varphi\cos\varphi\,\{P\cos x'\sin(\varphi+\varphi') + S[\sin x'\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q']\}.
\end{aligned}\right.
$$

De là, on déduit les intensités de la lumière dans les rayons réfractés ordinaire et extraordinaire. Leurs valeurs sont respectivement D'^2U', D''^2U'',

$$
(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
U' &= \frac{\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin x'\sin^2\varphi'\operatorname{tang} q'}{\sin\varphi\cos\varphi},\\
U'' &= \frac{\sin\varphi''\cos\varphi'' - \sin x''\sin^2\varphi''\operatorname{tang} q''}{\sin\varphi\cos\varphi}.
\end{aligned}\right.
$$

Employons ces formules, pour les faire mieux comprendre, aux trois cas très-simples que voici :

1. *Quand le plan d'incidence divise en deux parties égales l'angle aigu des axes op-*

tiques, alors

$$u - u' = 0, \quad \frac{1}{o^2 O} = \operatorname{tang} q' = 0, \quad \upsilon + \upsilon' = 2\upsilon.$$

En outre

$$\sin x' = 0, \qquad \cos x'' = 0, \quad \cos x' = \mp 1,$$

selon que la normale à la surface réfringente est du côté de l'axe π ou du côté de l'axe ν, par rapport à la normale à l'onde réfractée, supposé, pour la commodité de la démonstration, que l'axe π est celui qui divise en deux parties égales l'angle aigu des deux axes optiques. Dans les mêmes conditions $\sin x'' = \pm 1$.

D'après les équations (1), (2), (3), on trouve $p' = 0$, $s' = 0$.

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} R_s &= -\frac{\sin(\varphi - \varphi')\, S}{\sin(\varphi + \varphi')}, \\ R_p &= \frac{\left[\sin(\varphi - \varphi'')\cos(\varphi + \varphi'') \pm \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}\right] P}{\sin(\varphi + \varphi'')\cos(\varphi - \varphi'') \mp \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}}, \\ D' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, S}{\sin(\varphi + \varphi')}, \\ D'' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, P}{\sin(\varphi + \varphi'')\cos(\varphi - \varphi'') \mp \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}}, \\ U' &= \frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}, \\ U'' &= \frac{\sin\varphi''\cos\varphi'' \mp \dfrac{\sin^2\varphi''}{e^2 E}}{\sin\varphi\cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

2. *Quand le plan d'incidence divise en deux parties égales l'angle obtus des deux axes optiques*, ou, ce qui est la même chose, *coïncide avec le plan des axes* μ *et* ν; alors

$$\upsilon + \upsilon' = 180^\circ,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{e^2 E} = \operatorname{tang} q'' = 0, \quad (u - u') = 180^\circ - 2u'.$$

En outre

$$\cos x' = 0, \qquad \sin x'' = 0,$$

et

$$\sin x' = \pm 1, \quad \cos x'' = \mp 1,$$

selon que la normale au plan de réfringence est du côté de l'axe ν ou du côté de l'axe

μ par rapport à la normale à l'onde réfractée. On trouve $p'=0$, $s'=0$.

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
R_s &= -\frac{\sin(\varphi-\varphi'')\,S}{\sin(\varphi+\varphi'')},\\
R_p &= \frac{\left[\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')\pm\frac{\sin^2\varphi'}{o^2O}\right]P}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\mp\frac{\sin^2\varphi'}{o^2O}},\\
D' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\,P}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\mp\frac{\sin^2\varphi'}{o^2O}},\\
D'' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\,S}{\sin(\varphi+\varphi'')},\\
U' &= \frac{\sin\varphi'\cos\varphi\mp\frac{\sin^2\varphi'}{o^2O}}{\sin\varphi\cos\varphi},\qquad U''=\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''}{\sin\varphi\cos\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

5. *Le plan d'incidence coïncide avec le plan des deux axes optiques.* Ici nous avons deux cas à distinguer :

1°. *Les normales aux ondes réfractées sont dans l'angle obtus des axes optiques,*

$$\sin x'=0,\quad \cos x''=0,\quad j=0,\quad k=0,\quad \frac{1}{O}=0,$$

et

$$\cos x'=\mp 1,\quad \sin x''=\pm 1.$$

On doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur selon que la normale au plan réfringent est située du côté de l'axe π ou du côté de l'axe μ par rapport à la normale à l'onde réfractée. On trouve $p'=0$, $s'=0$.

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
R_s &= -\frac{\sin(\varphi-\varphi')\,S}{\sin(\varphi+\varphi')},\\
R_p &= \frac{\left[\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'')\pm\frac{\sin^2\varphi''}{e^2E}\right]P}{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'')\mp\frac{\sin^2\varphi''}{e^2E}},\\
D' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\,S}{\sin(\varphi+\varphi')},\\
D'' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\,P}{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'')\mp\frac{\sin^2\varphi''}{e^2E}},\\
U' &= \frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi},\qquad U''=\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''\mp\frac{\sin^2\varphi''}{e^2E}}{\sin\varphi\cos\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

2°. *Les normales aux ondes réfractées sont situées dans l'angle aigu des axes optiques*,

$$\cos x' = 0, \quad \sin x'' = 0, \quad 2j = 180°, \quad 2k = 180°, \quad \frac{1}{E} = 0,$$

et

$$\sin x' = \pm 1, \quad \cos x'' = \mp 1,$$

selon que la normale au plan de réfringence est du côté de l'axe π ou du côté de l'axe μ par rapport à la normale à l'onde réfractée. On a encore $p' = 0$, $s' = 0$.

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} R_s &= -\frac{\sin(\varphi - \varphi'')\,S}{\sin(\varphi + \varphi'')}, \\ R_p &= \frac{\left[\sin(\varphi - \varphi')\cos(\varphi + \varphi') \pm \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}\right] P}{\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi') \mp \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}}, \\ D' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, P}{\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi') \mp \dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}}, \\ D'' &= \frac{\pm 2\sin\varphi\cos\varphi\, S}{\sin(\varphi + \varphi'')}, \\ U' &= \sin\varphi'\cos\varphi \mp \frac{\sin^2\varphi'}{o^2 O}, \\ U'' &= \frac{\sin\varphi''\cos\varphi''}{\sin\varphi\cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Je démontrerai, dans le paragraphe suivant, que celles de ces formules qui se rapportent aux rayons réfléchis sont encore exactes pour le cas particulier, intermédiaire entre les deux cas 1° et 2°, où la normale à l'onde réfractée coïncide avec l'axe optique; il suffit alors de poser $\varphi' = \varphi''$.

§ XVIII.

Je vais actuellement appliquer les formules (1), (2), (3) du précédent paragraphe à un cas plus difficile en apparence que celui de la double réfraction, au cas de la réfraction conique. Je rechercherai les intensités de lumière et la position des plans de polarisation pour diverses arêtes du cône lumineux que forme le rayon incident en s'épanouissant. Les formules (1), (2), (3) deviennent, dans ce cas, complétement indéterminées, puisque x' et x'', j et k peuvent avoir toute valeur; elles prennent la nature des expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$ par des valeurs déterminées de deux quantités indépendantes l'une de l'autre. Dans des cas semblables, la signification du symbole $\frac{0}{0}$ mérite un examen tout spécial. J'aurai recours à la *fig.* 10. Soient menés par le centre d'une sphère les deux axes optiques qui rencontrent sa surface en A et A'; par le même centre faisons passer la normale au plan de réfringence, les normales aux ondes ordinaire et extraordinaire, et le rayon incident correspondant; ces lignes rencontrent la surface sphérique respectivement en B, O, E et S. Le plan d'incidence est ainsi celui du grand cercle BEOS. J'ai supposé que la normale au plan de réfringence se trouve située dans le plan des axes optiques, et dans l'angle aigu de ces axes; plus tard j'examinerai le cas général. Les mouvements de l'onde ordinaire O se font dans le plan du cercle OO' qui divise en deux parties égales l'angle AOA'; le rayon ordinaire est en o, de manière que l'angle oOO' soit un angle droit, et que la tangente de l'arc $o\mathrm{O} = \frac{1}{o^2\mathrm{O}}$, o et O étant pris avec la signification donnée, § XV, équations (5) et (4). Cela résulte des équations (2), § XVI, et (18 b), § XV. Dans l'onde extraordinaire E le mouvement a lieu dans le plan du cercle EE', bisecteur de l'angle AEC; le rayon extraordinaire est en e, de manière que eEE' soit un angle droit, et que la tangente de $e\mathrm{E} = \frac{1}{e^2\mathrm{E}}$. Les angles AOA' et AEA' sont ceux que nous avons déjà désignés par $2j$ et $2k$, l'angle SEE'' est notre x'', et SOO' notre x'.

Imaginons maintenant que le rayon incident se déplace successivement de S en S' et en S'', mais de telle sorte que la normale à l'onde ordinaire se meuve dans le cercle AO pendant que le plan de réfringence B demeure invariable; O et E tombent toujours très-près l'un de l'autre et ils coïncident quand O est arrivé en A, S' en S''. En suivant les différentes positions des plans de polarisation de O et de E pendant le mouvement de O suivant AO vers A, nous voyons que lorsque O et E coïncident l'un et l'autre en A, ces plans de polarisation ont pris les positions Aa et Ab; Ab divise en deux parties égales l'angle A'AO et Aa divise semblablement l'angle OAS''. Nous avons ainsi à cette limite

$$\mathrm{S''A}a = x', \quad \mathrm{S''A}b = x''.$$

L'angle

$$2j = 2k = \mathrm{BAD} = 360^\circ - 2x' = 2x'' - 180^\circ,$$

et par conséquent

$$x' + x'' = 270^\circ.$$

Le rayon ordinaire relatif à la normale à l'onde A est situé en b', le rayon extraordinaire correspondant en a'. Je désignerai les arcs Ab' et Aa' par q' et q'', ce qui donnera

$$\mathrm{tang}\, q' = \frac{1}{o^2\mathrm{O}} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin x',$$

$$\mathrm{tang}\, q'' = \frac{1}{e^2\mathrm{E}} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin x'' = -\frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \cos x'',$$

car $o^2 = e^2 = \nu^2$, et dans la formule $\frac{1}{O} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(u - u') \sin j$, l'angle $u' = 0$ et $u = 2n$, que de même dans $\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(v + v') \cos k$, l'angle $v' = 0$ et $v = 2n$. Si, de plus, nous posons

$$180^\circ - x' = \omega, \quad (\omega = \text{l'angle } a'\text{AS}''),$$

il viendra

$$(1) \qquad \tang q' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin \omega, \quad \tang q'' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \cos \omega.$$

En écrivant ces formules, on doit observer que l'arc q'' est dans l'azimut ω, pendant que l'arc q' est situé dans l'azimut $\omega - 90^\circ$; si l'on appelle cet azimut ω', $\omega = \omega' + 90^\circ$. Cette valeur étant substituée à ω dans tang q', donne

$$\tang q' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \cos \omega';$$

d'où résulte, pour $\omega = \omega'$, $q' = q''$.

La ligne AO peut être inclinée d'un angle quelconque sur AA', c'est-à-dire l'angle S''AO peut croître de 0 à $+\pi$ et de 0 à $-\pi$; en même temps ω, qui est toujours égal à la moitié de S''AO, peut avoir toutes les valeurs entre $+\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{1}{2}\pi$. Par conséquent les équations (1) représentent un cône dont les arêtes figurent tous les rayons qui correspondent à la normale A. C'est le même cône auquel nous avons été conduits ci-dessus, § XV, équations (23), par d'autres considérations.

Les considérations actuelles font pénétrer d'une manière plus précise dans sa nature physique. On doit considérer le rayon incident S'' comme un cône dont tous les côtés ont été réunis à l'axe. Chaque côté du cône, quoique tous aient maintenant la même direction, a produit deux rayons a' et b' dont le lieu est un cône elliptique autour de l'axe A, lequel est coupé suivant un cercle par un plan perpendiculaire à A.

J'appelle les deux rayons a' et b' rayons conjugués. Quand le rayon a' est donné, on trouve son conjugué b' en menant par l'axe A et le rayon a' un plan, et un second plan par A perpendiculairement au premier; ce second plan coupe le cône suivant le rayon b'. Les deux rayons conjugués sont polarisés perpendiculairement l'un à l'autre, et chacun d'eux perpendiculairement au plan qui passe par sa direction et par A. Si l'on désigne par I l'amplitude de la vibration dans le rayon incident, les deux rayons conjugués a' b' proviennent de la partie $\frac{\mathrm{I}\beta}{2\pi}$, 2π représentant la circonférence d'un cercle dont le rayon est 1, et β un élément de cette circonférence, car on doit se représenter les côtés du cône qui se confondent en S'' comme doués tous de vitesses oscillatoires égales. Je désignerai les vitesses dans les rayons b' et a' par $\frac{Q'\beta}{2\pi}$ et $\frac{Q''\beta}{2\pi}$. Pour trouver l'expression de leurs valeurs, nous avons à poser dans l'éq. (3), § XVII,

$$P = \frac{P\beta}{2\pi}, \qquad S = \frac{S\beta}{2\pi},$$
$$x' = 180^\circ - \omega, \quad x'' = 90^\circ + \omega,$$
$$j = k = \omega, \qquad \varphi' = \varphi'',$$
$$D' = \frac{Q'\beta}{2\pi}, \qquad D'' = \frac{Q''\beta}{2\pi}.$$

On trouve, d'après cela,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} N &= -\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi' \sin 2n\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\right],\\ NQ' &= -2\sin\varphi\cos\varphi\left\{P\sin(\varphi+\varphi')\sin\omega + S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]\cos\omega\right\},\\ NQ'' &= -2\sin\varphi\cos\varphi\left\{P\sin(\varphi+\varphi')\cos\omega - S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]\sin\omega\right\}, \end{aligned}\right.$$

$$U' = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin^2\omega\sin^2\varphi'\sin 2n\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$U'' = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi' - \cos^2\omega\sin^2\varphi'\sin 2n\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

La valeur de Q'' appartient au rayon dont l'inclinaison sur l'axe A est q'' et qui se trouve dans l'azimut ω. La valeur de Q' appartient au rayon dont l'inclinaison est q' et qui se trouve dans l'azimut $\omega - 90^\circ$. Si à la place de ω on introduit $\omega' = \omega - 90^\circ$, on voit que pour $\omega' = \omega$, $Q' = Q''$. On peut, par conséquent, remplacer les deux équations (2), comme nous l'avons vu à l'occasion des deux équations (1), par une équation dans laquelle la vitesse est exprimée en fonction de l'azimut correspondant du rayon, par conséquent par la valeur de Q''.

A ce propos on doit observer qu'alors chacune des arêtes du cône doit être regardée comme double, comme représentant en premier lieu un rayon ordinaire, en second lieu un rayon extraordinaire, quoique dans ces deux cas la même vitesse et la même direction appartiennent aux mouvements. On peut donc les ajouter, et obtenir la vitesse correspondante à chaque côté du cône, en multipliant Q'' par 2. Je désignerai par q l'inclinaison d'un côté du cône sur l'axe A dans l'azimut ω, et par Q la vitesse dans le rayon lumineux représenté par ce côté ; il viendra alors

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang} q = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\cos\omega,\\ &Q = 4\sin\varphi\cos\varphi\left\{\frac{P\sin(\varphi+\varphi')\cos\omega - S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]\sin\omega}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule contient la loi d'après laquelle un rayon incident s'épanouit suivant les arêtes du cône de réfraction, quand, polarisé primitivement dans l'azimut dont la tangente est $\frac{P}{S}$, il tombe sur un plan de réfringence dont la normale est située dans l'angle aigu des deux axes optiques.

L'intensité de la lumière qui vient suivant l'arête du cône située dans l'azimut ω par rapport au plan des axes optiques est donnée par l'équation

$$Q^2 U = \frac{Q^2 \left(\sin \varphi' \cos \varphi' - \cos^2 \omega \sin^2 \varphi' \sin 2n \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \right)}{\sin \varphi \cos \varphi}.$$

Entre φ et φ' on a la relation

$$\nu \sin \varphi = \sin \varphi';$$

φ' est ici l'inclinaison de la normale à la surface réfringente sur l'axe optique. Si l'on pose $\varphi' = 0$, c'est-à-dire si l'on suppose que le plan suivant lequel la lumière pénètre dans le cristal est perpendiculaire à l'axe optique, on obtient

$$(Q) = 4 (P \cos \omega - S \sin \omega),$$

d'où l'on voit clairement que, suivant le côté du cône situé dans l'azimut de la polarisation primitive, la lumière est nulle, et qu'elle est un maximum suivant le côté dont l'azimut est perpendiculaire au plan de polarisation primitif. Un rapport semblable a lieu généralement; il est seulement modifié par la réfraction des ondes, car on peut toujours mettre l'équation (3) sous la forme

$$Q = A \sin (B - \omega).$$

Mais, en réalité, ce n'est pas un rayon qui tombe à la surface du milieu que nous considérons, mais un faisceau cylindrique de rayons; celui-ci n'engendre pas un cône lumineux simple, mais la lumière refractée s'épanouit dans un espace qui est circonscrit par l'enveloppe d'une infinité de cônes réfractés. Il résulte de là que la distribution de la lumière, aussi bien que la position de son plan de polarisation, se trouvent modifiées. Avant de m'occuper de ces modifications, il est bon d'examiner ce qu'il advient des formules (1) et (2), § XVII, pour la lumière réfléchie dans les cas particuliers où l'onde réfractée est perpendiculaire à l'un des axes optiques. Les vitesses réfléchies R_p et R_s doivent être considérées comme composées des vitesses réfléchies qui appartiennent aux rayons réfractés isolés dans les azimuts x' et x''; les vitesses partielles réfléchies, ayant les mêmes directions, s'ajoutent et donnent en conséquence

$$R_p = \int (p P + s' S) \frac{\beta}{2\pi},$$

$$R_s = \int (p' P + s S) \frac{\beta}{2\pi}.$$

Le signe $\int$ indique une sommation par rapport à toutes les valeurs de x' et x'' de o à 2π.

Les quantités p, p', s, s' sont, en général, des fonctions de ces quantités. Mais on trouve par les équations (2), § XVII,

$$(4)\quad \begin{cases} Np = -\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \sin^2\varphi' \sin 2n\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\right], \\ Ns = +\sin(\varphi-\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi' \sin 2n\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\right], \\ Np' = 0, \\ Ns' = 0, \end{cases}$$

d'où il résulte que

$$\int p\beta = p\,2\pi,\quad \int s\beta = s\,2\pi,\quad \int p' = 0,\quad \int s' = 0,$$

et que, si au lieu de N on met sa valeur tirée de l'équation (2), on obtient

$$(5)\quad \begin{cases} R_p = \dfrac{\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \sin^2\varphi' \sin 2n\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \sin^2\varphi' \sin 2n\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}}, \\ R_s = -\dfrac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}. \end{cases}$$

Ce sont exactement les formules que l'on déduit des équations (7) et (8), § XVII, quand on y fait $\varphi' = \varphi''$. La réfraction conique n'exerce donc aucune influence sur la réflexion.

Les mouvements Q, donnés par l'équation (3), se font perpendiculairement à l'azimut ω; si l'on décompose ces mouvements suivant l'azimut 0° et 90°, et si l'on fait les sommes des composantes correspondantes respectivement à ces deux azimuts, leurs valeurs doivent coïncider avec celles de D' et de D'' déduites de l'équation (7) ou de l'équation (8) du § XVII, quand on y fait $\varphi' = \varphi''$; on le trouve en effet.

Les composantes des vitesses dans l'azimut 0°, sont

$$-\ Q \sin\omega \frac{\beta}{2\pi},$$

et dans l'azimut 90°,

$$Q \cos\omega \frac{\beta}{2\pi}.$$

Les sommes

$$-\int Q \sin\omega \frac{\beta}{2\pi} \quad \text{et} \quad \int Q \cos\omega \frac{\beta}{2\pi}$$

doivent donc être égales aux valeurs de D′ et de D″ des équations (7) et (8), § XVII, ces sommes étant prises pour tous les côtés du rayon incident que nous nous sommes imaginé comme un cône lumineux réduit à son axe. Nous devons rappeler que ω est toujours la moitié de l'angle S″AO, je le désigne par α. Si l'on donne à α toutes les valeurs entre $+\pi$, $-\pi$, on obtient les rayons réfractés qui correspondent à tous les côtés du rayon incident; on peut en place de β écrire $d\alpha$.

Par là la première somme se change en

$$-\int Q \sin \omega \frac{\beta}{2\pi} = -\int_{-\pi}^{+\pi} Q \sin \frac{1}{2}\alpha \frac{d\alpha}{2\pi},$$

ou encore

$$-\int Q \sin \omega \frac{\beta}{2\pi} = -\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} Q \sin \omega \frac{d\omega}{\pi}.$$

De même

$$\int Q \cos \omega \frac{\beta}{2\pi} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} Q \cos \omega \frac{d\omega}{\pi}.$$

En substituant pour Q la valeur que lui assigne l'équation (3), on obtient

$$-\int Q \sin \omega \frac{\beta}{2\pi} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi S}{\sin(\varphi + \varphi')},$$

$$\int Q \cos \omega \frac{\beta}{2\pi} = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi P}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2 \varphi'}.$$

Ce sont les valeurs que donnent, au § XVII, les formules (7) et (8) pour D′ et D″, quand on fait $\varphi' = \varphi''$.

Jusqu'à présent j'ai admis que le plan de réfringence est perpendiculaire au plan des axes optiques. Je considérerai présentement le cas général pour lequel le plan de réfringence a une position quelconque.

Soit φ' l'angle de la normale à ce plan avec l'axe optique, et λ l'angle que le plan mené par cette normale et l'axe optique, c'est-à-dire que le plan d'incidence fait avec le plan des deux axes optiques. Cet angle λ est compté dans le même sens que l'angle ω ci-dessus. Les plans de polarisation de deux rayons conjugués quelconques du cône elliptique sont situés dans les azimuts x' et x''; ces deux lettres ont la même signification que dans les formules (1), (2), (3), § XVII.

Soit

$$\omega' = 180^\circ - x' = x'' - 90^\circ,$$

ω' désigne ainsi l'azimut du rayon extraordinaire par rapport au plan d'incidence. Alors l'angle que précédemment nous avions désigné par ω, c'est-à-dire, l'azimut du rayon extraordinaire par rapport au plan des axes optiques $= \omega' + \lambda$. On a, par conséquent, d'après l'équation (1), § XVIII,

$$\operatorname{tang} q' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin(\omega' + \lambda),$$

$$\operatorname{tang} q'' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \cos(\omega' + \lambda).$$

En introduisant ω' à la place de x' et de x'', et ces valeurs de tang q' et tang q'' dans l'équation (3), § XVII, et en substituant $\frac{P\beta}{2\pi}$, $\frac{S\beta}{2\pi}$ à P et à S, on obtient, si l'on désigne encore par $\frac{Q'\beta}{2\pi}$, $\frac{Q''\beta}{2\pi}$ les vitesses dans les deux rayons conjugués,

$$Q' = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\left\{P\sin(\varphi+\varphi')\sin\omega' + S\left[\cos\omega'\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\cos(\omega'+\lambda)\right]\right\}}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\cos\lambda\right]},$$

$$Q'' = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\left\{P\sin(\varphi+\varphi')\cos\omega' - S\left[\sin\omega'\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\sin(\omega'+\lambda)\right]\right\}}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\cos\lambda\right]}.$$

Les valeurs de q' et Q' appartiennent aux rayons qui sont dans l'azimut $\omega' - 90°$; si l'on introduit cet azimut dans les formules qui les expriment, c'est-à-dire si l'on remplace ω' par $\omega' + 90°$, on trouve

$$q' = q'', \quad Q' = Q''.$$

On peut donc encore ici considérer le rayon situé dans l'azimut ω' comme résultant de deux rayons, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire, tous deux de même vitesse et de même direction. On obtient, d'après cela, la vitesse dans un rayon situé dans l'azimut ω' en multipliant Q'' par 2. Si donc on appelle Q la vitesse vibratoire d'un rayon dans l'azimut ω', et q son inclinaison sur l'axe optique, on a, en mettant à la place de ω' sa valeur $\omega - \lambda$,

$$(6)\quad Q = 2Q'' = \frac{4\sin\varphi\cos\varphi\left\{P\sin(\varphi+\varphi')\cos(\omega-\lambda) - S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin(\omega-\lambda) - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\sin\omega\right]\right\}}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\cos\lambda\right]}.$$

Si l'on pose $\lambda = 0$, on voit se reproduire le cas représenté par l'équation (3); mais $\lambda = 180°$ représente le cas où la normale au plan de réfringence est dans l'angle obtus des axes optiques; on obtient, dans ce cas,

$$Q = -\frac{4\sin\varphi\cos\varphi\left\{P\sin(\varphi+\varphi')\cos\omega - S\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]\sin\omega\right\}}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\right]}.$$

Pour les rayons réfléchis, on obtient les vitesses en faisant les sommes des vitesses partielles qui correspondent à chaque rayon réfracté du cône elliptique.

On a ainsi

$$R_p = P\int\frac{p\beta}{2\pi} + S\int\frac{s'\beta}{2\pi},$$

$$R_s = P\int\frac{p'\beta}{2\pi} + S\int\frac{s\beta}{2\pi}.$$

On trouve

$$\int\frac{\beta}{2\pi}p = \frac{\left[\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin^2\varphi'\sin 2n\cos\lambda\right]}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin^2\varphi'\sin 2n\cos\lambda},$$

$$\int\frac{\beta}{2\pi}s = -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')},$$

$$p' = 0,$$

$$\int\frac{\beta}{2\pi}s' = -\frac{\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2\varphi\sin\varphi'\sin 2n\sin\lambda}{\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin^2\varphi'\sin 2n\cos\lambda\right]}.$$

Pour obtenir ces mêmes formules on peut se fonder sur des considérations totalement indépendantes de la réfraction conique, en cherchant les valeurs de p, s, p', s' pour un plan réfringent quelconque, quand le plan d'incidence passe par l'un des axes optiques, et que le rayon est réfracté de telle manière que l'onde réfractée soit perpendiculaire à l'axe optique, ce qui revient à poser, dans l'équation (2), § XVII,

$$x' = 180° + \frac{1}{2}\lambda, \quad x'' = 90° - \frac{1}{2}\lambda,$$

$$\operatorname{tang} q' = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin\frac{1}{2}\lambda, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} q'' = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\cos\frac{1}{2}\lambda.$$

La réfraction conique n'exerce donc, en général, aucune sorte d'influence sur les phénomènes de réflexion.

Il nous reste encore à examiner comment s'opère la distribution de la lumière dans le cône elliptique, quand la lumière incidente n'est pas polarisée. La lumière naturelle doit être regardée comme résultant d'une série de mouvements vibratoires exécutés suivant des directions quelconques et avec une rapidité telle que dans un temps très-court on puisse en supposer un même nombre dans toute direction.

Si dans l'expression de Q on met pour P et S leurs valeurs $P = I \sin\beta$ et $S = I \cos\beta$, I^2 désignant l'intensité de la lumière incidente, et β un azimut d'oscillation ; si l'on forme, en outre, le carré de Q, et si l'on multiplie ce carré par $\frac{d\beta}{2\pi}$, on obtiendra l'intensité de la lumière I'^2 dans un rayon quelconque du cône en prenant l'intégrale de $UQ^2\frac{d\beta}{2\pi}$ de 0 à $+2\pi$. On a ainsi

$$I'^2 = \int_0^{2\pi} UQ^2 \frac{d\beta}{2\pi},$$

c'est-à-dire

$$I'^2 = 8I^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \left\{ \frac{\cos^2(\omega-\lambda)\sin^2(\varphi+\varphi') + \left[\sin(\omega-\lambda)\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \sin^2\varphi' \cos\lambda\right]^2}{\left[\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \sin^2\varphi' \cos\lambda\right]^2 \sin^2(\varphi+\varphi')} \right\} U.$$

$$U = \frac{\sin\varphi' \cos\varphi' - \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \cos^2(\omega-\lambda)\sin^2\varphi'}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

Si l'on néglige $\pi^2-\mu^2$, on obtient comme première approximation,

$$I'^2 = 2I^2 \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')} \left[\frac{\cos^2(\omega-\lambda)}{\cos^2(\varphi-\varphi')} + \sin^2(\omega-\lambda)\right],$$

d'où l'on voit que c'est seulement lorsque le plan de réfringence est perpendiculaire à l'axe optique que la lumière est uniformément répandue sur le cône. En général, l'intensité de la lumière a un maximum pour $\omega = \lambda$, et un minimum pour $\omega = \lambda - 90^\circ$; le rapport du maximum au minimum est comme 1 est à $\cos^2(\varphi-\varphi')$. Dans les observations de M. Lloyd sur l'arragonite (*Pogg. Ann.*, Bd. XXVIII), cette différence était assez petite pour échapper à l'observation, car $(\varphi-\varphi')$ surpassait à peine 9°.

En réalité nous n'avons pas affaire à un rayon de lumière, mais à un cylindre de rayons. Soient, *fig.* 15, AA′DD′ l'intersection du plan d'incidence avec le faisceau cylindrique incident, ABC et A′B′C′ les intersections du même plan avec les surfaces coniques de réfraction qui appartiennent aux deux rayons incidents AD, AD′; AB et A′B′ les directions des axes optiques. Les mouvements qui sont envoyés vers un point quelconque F émanent de tous les points de la section AA′ du faisceau cylindrique incident par le plan réfringent. Si par ce point on tire FG parallèle à l'axe optique, et si, avec FG comme génératrice, on décrit le cône FGE, ce cône sera coupé par le plan de réfringence, en général, suivant une ellipse. La portion de cette ellipse comprise dans l'intérieur de la section AA′ du cylindre des rayons incidents par le plan de réfringence, contient tous les points de cette section AA′ dont les mouvements atteignent en même temps le point F. Ces mouvements n'ont pas lieu tous dans la même direction, ils doivent être d'abord décomposés, puis ajoutés pour donner le mouvement de F. Cela conduit à des calculs pénibles, et le résultat dépend encore, dans les cas les plus simples, des transcendantes elliptiques.

Je me bornerai à traiter la question dans un cas simple et tout particulier; le calcul n'offre pour ce cas aucune difficulté analytique, et il est utile pour mettre le principe dans tout son jour. Je supposerai que le plan réfringent est perpendiculaire à l'axe optique, et que les rayons incidents forment un cylindre droit. Soit ABC, *fig.* 11, l'intersection de ce cylindre avec le plan de réfringence, le diamètre AB de cette section circulaire $= 2\rho$. Par un point quelconque D intérieur au cristal, et distant de d du plan réfringent, menons une ligne parallèle à l'axe optique qui rencontre en E, le plan réfringent. Menons, en outre, par DE le plan des deux axes optiques dont la trace sur ce même plan réfringent est EF. Sur cette ligne prenons

$$EG = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} d \sin 2n = R,$$

et du point G comme centre, avec GE pour rayon, décrivons un cercle. Le cône déterminé par le point D et par ce cercle est le cône de réfraction correspondant au point D. Les mouvements du cylindre incident transmis vers D émanent des rayons qui coupent le plan de réfringence suivant l'arc de cercle HI. Il est, d'après cela, facile de déterminer sur le plan parallèle au plan de réfringence mené par D, quels sont les points qui ont part au mouvement. Les limites de ces points sont telles que les cercles décrits par les points E aux conditions données touchent le cercle ABC, telles, par conséquent, que $GN = R \pm \rho$. Si par le point E on mène la ligne EM parallèle à GN, et la ligne BA parallèle à EF, on a

$$NM = EG = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n\, d.$$

Le point M est donc indépendant de d quant à sa position, et ME est toujours la distance du point central N au centre G du cercle décrit par E. Aux points limites D qui reçoivent encore la lumière de ABC, appartient donc la série des points E pour lesquels $ME = R \pm \rho$. Ces points sont ainsi compris entre deux cercles concentriques PQ et P′Q′ décrits du point M comme centre avec les rayons

$$MP = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} d \sin 2n - \rho, \quad \text{et} \quad MP' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} d \sin 2n + \rho.$$

On n'a plus qu'à faire passer par ces deux cercles deux cylindres droits pour obtenir les points limites du plan parallèle au plan réfringent (mené par D), qui reçoivent encore les rayons du cylindre incident dont la base est ABC. Si $R = \rho$, le rayon du cercle intérieur ABC devient égal à o. Si $R < \rho$, le rayon de ce cercle devient négatif, ce qui veut dire qu'il devient, comme dans la *fig.* 12, tangent intérieurement au cercle ABC. Mais ce cercle a encore ici une autre destination; il circonscrit tous les points E qui sont tels que si des points G avec R comme rayon on décrit des cercles, ces cercles ne coupent pas le cercle ABC. Vers les points D correspondants à ces points E arrivent, par conséquent, tous les rayons d'un cône complet de réfraction. Dans l'anneau compris entre AQP et RQ'P' se trouvent les points qui ne reçoivent qu'une partie des rayons de ce cône.

Soit la position du point D déterminée par sa distance $R + x$ à l'axe optique mené par M et par l'angle des deux plans menés l'un par l'axe optique et le point D, l'autre par ce même axe et le point N, c'est-à-dire par l'angle $PME = \Pi$. Si l'on décrit du point M comme centre et du rayon ρ le cercle *abc*, et du point E avec le rayon R un cercle qui coupe le premier aux points h et i, l'arc hi sera égal à HI et les rayons Eh, Ei, EM seront inclinés sur PA d'un angle double de l'angle d'inclinaison des lignes EH, EI, En; n désignant l'intersection de GN avec le cercle décrit du point G.

Soit l'angle $MEh = MEi = z'$; on a

$$\sin^2 \frac{1}{2} z' = \frac{\rho^2 - x^2}{2R(R+x)}.$$

Supposons qu'un rayon Ev forme avec EM l'angle z, et que le point V dans l'intérieur du cercle ABC réponde à v, de telle sorte que EV forme avec En l'angle $\frac{1}{2} z$. Soit désignée par Q la vitesse du mouvement de V à E. Cette vitesse est une fonction de l'inclinaison de VE sur AB, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}(\Pi + z)$, et elle est dirigée perpendiculairement à VE.

Si nous la décomposons suivant EN et perpendiculairement à cette direction, et si nous nommons la première composante p', la seconde s', nous aurons

$$p' = Q \sin \frac{1}{2} z, \quad s' = Q \cos \frac{1}{2} z.$$

Si nous multiplions ces composantes par l'élément de l'arc HI, c'est-à-dire par $R\,dz$, et si nous faisons une somme de composantes élémentaires semblables de $-z'$ à $+z'$, nous obtiendrons les composantes p et s du mouvement envoyé en E par l'arc HI,

$$p = R \int_{-z'}^{+z'} Q \sin \frac{1}{2} z\,dz, \quad s = R \int_{-z'}^{+z'} Q \cos \frac{1}{2} z\,dz.$$

Si nous portons dans cette équation la valeur de Q de l'équation (4), nous aurons

$$\begin{aligned} p &= \frac{4R}{1+\nu} \int \left[P \cos \frac{1}{2}(\Pi + z) - S \sin \frac{1}{2}(\Pi + z) \right] \sin \frac{1}{2} z\,dz, \\ s &= \frac{4R}{1+\nu} \int \left[P \cos \frac{1}{2}(\Pi + z) - S \sin \frac{1}{2}(\Pi + z) \right] \cos \frac{1}{2} z\,dz, \end{aligned}$$

d'où

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} p &= -\frac{4R}{1+\nu}\left(P\sin\frac{1}{2}\Pi + S\cos\frac{1}{2}\Pi\right)(z' - \sin z'),\\ s &= -\frac{4R}{1+\nu}\left(P\cos\frac{1}{2}\Pi - S\sin\frac{1}{2}\Pi\right)(z' + \sin z'),\end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$\sin^2\frac{1}{2}z' = \frac{\rho^2 - x^2}{2R(R+x)},$$

$\rho + x$ désigne la distance du point D ou du point E au bord intérieur, et $\rho - x$ la distance du même point au bord extérieur de l'anneau à l'intérieur duquel sont placés tous les points qui reçoivent l'ébranlement. Quand $\rho^2 - x^2$ devient négatif le point déterminé en position par $R + x$, par Π et par d ne reçoit plus aucun mouvement; mais quand $\frac{\rho^2 - x^2}{2R(R+x)} = 1$ ou > 1, on doit substituer à z dans l'équation (10) la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à 1, c'est-à-dire π.

Dans ce cas on obtient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} p\sin\frac{1}{2}\Pi - s\cos\frac{1}{2}\Pi &= -\frac{4R\pi P}{1+\nu},\\ p\cos\frac{1}{2}\Pi + s\sin\frac{1}{2}\Pi &= -\frac{4R\pi S}{1+\nu}.\end{aligned}\right.$$

Les quantités du premier membre sont les composantes des vitesses envoyées vers D, perpendiculairement et parallèlement au plan des axes optiques, ainsi que P et S sont les composantes correspondantes dans la lumière incidente. Dans ce cas, le plan de polarisation demeure donc le même pour la lumière réfractée et pour la lumière incidente. Ceci subsiste pour tous les rayons dont les points E sont situés dans l'intérieur du cercle APQ, *fig.* 12; à partir de là, c'est-à-dire pour les points qui sont situés en dehors de ce cercle, le plan de polarisation tourne jusqu'à ce que les rayons qui éclairent les points les plus extérieurs dans le cercle BP'Q' soient polarisés perpendiculairement à leur azimut, c'est-à-dire perpendiculairement à la ligne tirée du point B à chacun d'eux.

Les formules (11) sont, au reste, les mêmes que nous avons trouvées pour D' et D'' au § XVII, équations (7) et (8), quand nous avons posé

$$\nu\sin\varphi = \sin\varphi' = \sin\varphi'' \quad \text{et} \quad \varphi = 0.$$

Quand $R > \rho$ il y a la moitié de l'espace APQ sans lumière. Les rayons lumineux de la surface extérieure, aussi bien que ceux de la surface intérieure de l'anneau, sont de polarisés perpendiculairement à leur azimut, c'est-à-dire que les premiers sont polarisés perpendiculairement au plan qui serait mené par leur direction et l'axe optique B, les derniers perpendiculairement au plan qui serait conduit par leur direction et l'axe optique A.

Si la lumière incidente n'était pas polarisée, nous déduirions de l'équation (10)

$$p^2 = \frac{8R^2}{(1+\nu)^2} I^2 (z' - \sin z')^2,$$
$$s^2 = \frac{8R^2}{(1+\nu)^2} I^2 (z' + \sin z')^2.$$

Pour $z' = 0$, c'est-à-dire $x = \pm \rho$, la lumière est polarisée perpendiculairement à l'azimut $\frac{1}{2}\Pi$. Pour $\sin z = 0$ et $z = \pi$ la lumière est à l'état naturel. Pour les autres directions la lumière est seulement polarisée en partie perpendiculairement à l'azimut $\frac{1}{2}\Pi$, et la portion polarisée est donnée par l'équation

$$\frac{s^2 - p^2}{s^2 + p^2} = \frac{2z\sin z}{z^2 + \sin^2 z}.$$

§ XIX.

Je m'occuperai, dans ce paragraphe, de la recherche de l'angle de polarisation, et d'abord des cas les plus simples pour lesquels le problème permet une solution complète. Ce sont les trois cas où le plan d'incidence coïncide avec l'un des trois plans rectangulaires déterminés par les axes d'élasticité pris deux à deux. Il suffit de poser, dans les formules (5), (6), (7) et (8), § XVII, $R_p = 0$, et d'en tirer φ. Cet angle φ est l'angle de la polarisation complète.

1. *Le plan d'incidence est bissecteur de l'angle de deux axes optiques ;* on a, d'après l'équation (5), § XVII,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = R_p &= \sin(\varphi - \varphi'') \cos(\varphi + \varphi'') \pm \frac{\sin^2 \varphi''}{e^2 E}, \\ \frac{1}{E} &= \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos k \sin 2\upsilon. \end{aligned} \right.$$

Si l'on appelle ξ l'inclinaison de la normale de l'onde extraordinaire sur l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle aigu des deux axes optiques, on a

$$\sin 2\upsilon \sin k = \sin 2n \cos \xi, \quad \text{et} \quad \operatorname{cotang} k = \sin \xi \operatorname{cotang} n,$$

ces valeurs, substituées dans $\frac{1}{E}$, donnent

$$\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos^2 n \sin 2\xi = \frac{\pi^2 - \nu^2}{2} \sin 2\xi.$$

Substituant cette valeur dans la première des éq. (1), et observant en même temps que

$\frac{\sin^2\varphi''}{\nu^2} = \sin^2\varphi$, on obtient

(2) $$o = \sin(\varphi - \varphi'')\cos(\varphi + \varphi'') \pm \frac{\pi^2 - \nu^2}{2} \sin 2\xi \sin^2\varphi.$$

D'après cela, on peut éliminer ξ au moyen de l'inclinaison du plan réfléchissant sur l'axe d'élasticité qui divise l'angle aigu des deux axes optiques. Soit $90° - \mathrm{I}$ la valeur de cette inclinaison; on a

(3) $$\xi - \varphi'' = \mathrm{I}, \quad \text{ou} \quad \xi + \varphi'' = \mathrm{I}.$$

selon que, dans l'équation (2), le signe de $\frac{\pi^2 - \nu^2}{2}$ est additif ou soustractif; car, d'après l'équation (5), § XVII, on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que $\mathrm{I} < \xi$ ou $\mathrm{I} > \xi$. Si l'on substitue la valeur de ξ, donnée par l'équation (3), on peut réunir les deux équations en une seule qui réponde à la fois aux valeurs positives et négatives de I, et l'on obtient

(4) $$o = \sin(\varphi - \varphi'')\cos(\varphi + \varphi'') - \frac{\pi^2 - \nu^2}{2} \sin^2\varphi \sin^2(\mathrm{I} - \varphi'').$$

D'ailleurs entre φ et φ'' a lieu la relation

$$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\,[\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\upsilon],$$

qui, par l'élimination de υ au moyen de ξ et de I, se change en

(5) $$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\left[\frac{\pi^2 + \nu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \nu^2}{2}\cos 2(\mathrm{I} - \varphi'')\right].$$

Si l'on développe les équations (4) et (5) par rapport à $\sin 2\varphi''$ et à $\cos 2\varphi''$, on en déduit facilement les valeurs suivantes :

$$\sin 2\varphi'' = -\frac{(\pi^2 - \nu^2)[1 - (\pi^2 + \nu^2)\sin^2\varphi]\sin^2\varphi \sin 2\mathrm{I} - \sin 2\varphi\,[1 - (\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}]}{[(\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\sin 2\mathrm{I}]^2 + [1 - (\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}]^2},$$

$$\cos 2\varphi'' = \frac{[1 - (\pi^2 + \nu^2)\sin^2\varphi][1 - (\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}] + (\pi^2 - \nu^2)\sin 2\varphi\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}}{[(\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\sin 2\mathrm{I}]^2 + [1 - (\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\cos 2\mathrm{I}]^2}.$$

Si l'on ajoute les carrés de ces deux équations, on trouve, après quelques réductions pour l'angle de polarisation cherché,

(6) $$\sin^2\varphi = \frac{(1 - \nu^2)\cos^2\mathrm{I} + (1 - \pi^2)\sin^2\mathrm{I}}{1 - \pi^2\nu^2}.$$

2. *Si le plan d'incidence est bissecteur de l'angle obtus des deux axes optiques, et perpendiculaire à leur plan*, on a l'équation (6), § XVII, à traiter de la même manière. Il est facile d'ailleurs d'en avoir le résultat. Ce résultat peut aussi se déduire de l'équation (6) en changeant π^2 en μ^2, I en I'; $90° - \mathrm{I}'$ est l'inclinaison du plan réflecteur sur l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle obtus des axes optiques.

On a, par conséquent, dans ce cas,

$$\text{(b)}\qquad \sin^2\varphi = \frac{(1-\nu^2)\cos^2 I' + (1-\mu^2)\sin^2 I'}{1-\nu^2\mu^2}.$$

3. *Si le plan d'incidence coïncide avec le plan des axes optiques*, on doit poser dans les formules (7), § XVII, $R_p = 0$. Cette équation $R_p = 0$ se change, par une introduction de ξ et de I analogue à celle qu'on a faite dans l'équation (2) de ce paragraphe, en

$$(7)\qquad 0 = \sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin^2(I-\varphi'')\sin^2\varphi;$$

pour la relation entre φ et φ'' on obtient

$$(8)\qquad \sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\left[\frac{\pi^2+\mu^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos 2(I-\varphi'')\right],$$

d'où l'on tire

$$(9)\qquad \sin^2\varphi = \frac{(1-\mu^2)\cos^2 I + (1-\pi^2)\sin^2 I}{1-\mu^2\pi^2}.$$

Cette dernière équation fournit la solution de l'équation $R_p = 0$ (8), § XVII, en changeant μ^2 en π^2 et π^2 en μ^2, et remplaçant I par I'; I' ayant la même signification que ci-dessus. Mais comme on a ici $I + I' = 90°$, on voit que la formule (9) de l'angle de polarisation ne subit pas de changement par ces substitutions.

D'après les considérations qui, dans le § VIII, nous ont conduits à l'équation (3), et qui peuvent s'adapter à tous les milieux réfléchissants cristallins, à quelque classe de cristaux qu'ils appartiennent, l'angle de la polarisation complète dépend aussi, dans ce cas, en général de l'équation

$$(10)\qquad ps + p's' = 0.$$

Je vais mettre cette équation sous une forme plus simple. Si l'on pose

$$\begin{aligned}
\sin x' \sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi') + \sin^2\varphi' \tang q' &= A',\\
\sin x'' \sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') + \sin^2\varphi'' \tang q'' &= A'',\\
-\sin x' \sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \sin^2\varphi' \tang q' &= B',\\
-\sin x'' \sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') + \sin^2\varphi'' \tang q'' &= B'',
\end{aligned}$$

les formules pour p, p', s, s', (2), § XVII, se transforment dans les suivantes :

$$\begin{aligned}
Np &= A'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'') + A''\cos x'\sin(\varphi+\varphi'),\\
Ns &= B'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'') + B''\cos x'\sin(\varphi-\varphi'),\\
Ns' &= A'B'' - A''B',\\
Np' &= -\cos x'\cos x''\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'').
\end{aligned}$$

Ces expressions, substituées dans l'équation (10), donnent

$$\left.\begin{array}{l}[A'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')+A''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')][B'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')+B''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')]\\ \quad+(A'B''-A''B')\cos x'\cos x''\sin 2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')\end{array}\right\}=0.$$

Si l'on développe les multiplications, on voit bientôt que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$[A'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')+A''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')][B'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')+B''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')]=0.$$

Des deux facteurs de cette équation, le premier contient seul les racines qui répondent à la question; on peut s'en convaincre en posant la différence des deux axes d'élasticité $=0$. L'angle de la polarisation complète dépend donc seulement de

$$A'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')+A''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')=0,$$

ou, après remplacement des valeurs A' et A'', de

$$(11)\quad \sin x'\cos x''\cos(\varphi+\varphi')+\sin x''\cos x'\cos(\varphi+\varphi'')+\frac{\sin^2\varphi'\tang q''\cos x''}{\sin(\varphi-\varphi')}+\frac{\sin^2\varphi''\tang q''\cos x'}{\sin(\varphi-\varphi'')}=0.$$

Si pour tang q' et tang q'' on met leurs valeurs tirées des équations (2) et (5), § XVI, et pour $\frac{\sin^2\varphi'}{o^2}$ et $\frac{\sin^2\varphi''}{e^2}$ la quantité $\sin^2\varphi$, on obtient

$$\begin{aligned}&\sin x'\cos x''\cos(\varphi+\varphi')+\sin x''\cos x'\cos(\varphi+\varphi'')\\&+\sin^2\varphi\left[\frac{\sin j\sin(u-u')\cos x''}{\sin(\varphi-\varphi')}+\frac{\cos k\sin(\upsilon+\upsilon')\cos x'}{\sin(\varphi-\varphi'')}\right]\frac{\pi^2-\mu^2}{2}=0.\end{aligned}$$

Je déduirai une expression approchée de $\sin\varphi$, en ayant seulement égard aux premières puissances de la différence des axes d'élasticité. Dans le terme multiplié par $\pi^2-\mu^2$ on peut alors poser $j=k$, $u=\upsilon$ et $u'=\upsilon'$, $\sin x'=-\cos x''$ et $\cos x'=-\sin x''$, et enfin $\varphi'=\varphi''$.

Si l'on pose d'ailleurs

$$\cos(\varphi+\varphi'')=\cos(\varphi+\varphi')+\sin(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'-\varphi''),$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\cos(\varphi+\varphi')+\cos^2x'\sin(\varphi+\varphi')\sin(\varphi'-\varphi'')\\&=\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2(\varphi-\varphi')}[\cos j\sin(u+u')\cos x'-\sin j\sin(u-u')\sin x']\frac{\pi^2-\mu^2}{2}.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\sin(\varphi'-\varphi'')=-\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\frac{\sin u\sin u'\sin^2\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi'},$$

on obtient

$$(12)\qquad \cos(\varphi+\varphi')=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{[\cos j\sin(u+u')\cos x'-\sin j\sin(u-u')]\sin x'}{\sin(\varphi-\varphi')}\\ +\dfrac{\sin(\varphi+\varphi')}{\sin\varphi'\cos\varphi'}\cos x'\sin u\sin u'\end{array}\right\}\sin^2\varphi\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2}.$$

Je désignerai par α la quantité multipliée par $\frac{\pi^2-\mu^2}{2}$, de sorte que

$$\cos(\varphi+\varphi')=\alpha\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2}.$$

En négligeant les puissances supérieures de $\frac{\pi^2-\mu^2}{2}$, on obtient

$$\sin^2\varphi+\sin^2\varphi'=1-\sin\varphi\cos\varphi\,\alpha\,(\pi^2-\mu^2);$$

et comme

$$\sin^2\varphi'=\sin^2\varphi\left[\frac{\pi^2+\mu^2}{2}-\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u-u')\right],$$

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2+\mu^2}{2}}\left\{1+[\cos(u-u')\sin^2\varphi-\sin 2\varphi\,\alpha]\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right\},$$

remettant pour α sa valeur

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{1+\frac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)}$$

$$\times\left\{1+\left\{\begin{array}{l}\cos(u-u')-\dfrac{\sin(\varphi+\varphi')\sin 2\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi'}\sin u\sin u'\cos^2 x'\\ -\sin 2\varphi\,\dfrac{[\cos j\sin(u+u')\cos x'-\sin j\sin(u-u')\sin x']}{\sin(\varphi-\varphi')}\end{array}\right\}\sin^2\varphi\,\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right\}.$$

On peut donner à cette formule plus de concision en posant

$$\cos^2 x'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x',$$

et en observant que la première approximation $\cos(\varphi+\varphi')=0$ donne

$$\frac{\sin(\varphi+\varphi')\sin 2\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi'}=2\quad\text{et}\quad\sin(\varphi-\varphi')=-\cos 2\varphi.$$

Elle devient

$$(13)\quad\left\{\begin{array}{l}\sin^2\varphi=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)}\\ \times\left\{1+\left\{\begin{array}{l}\cos u\cos u'-\sin u\sin u'\cos 2x'\\ +\operatorname{tang}2\varphi[\cos j\sin(u+u')\cos x'-\sin j\sin(u-u')\sin x']\end{array}\right\}\sin^2\varphi\,\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2}\right\}.\end{array}\right.$$

Dans cette expression de $\sin^2\varphi$ doivent être placées, à la place de u, u', x', leurs valeurs exprimées en fonction de la valeur approchée de $\sin^2\varphi = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}(\mu^2+\pi^2)}$ et des quantités qui déterminent la position du plan réfléchissant et l'azimut du plan de réflexion.

Supposons que la normale au plan réfléchissant forme avec les deux axes optiques les angles U et U'. Soit X l'azimut du plan de réflexion compté à partir du plan qui divise en deux parties égales l'angle que font entre eux les deux plans menés par la normale au plan réfringent, et les deux axes optiques. Soit 2J cet angle lui-même. On a

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos u &= \cos\varphi'\cos U + \sin\varphi'\sin U\cos(X+J),\\
\cos u' &= \cos\varphi'\cos U' + \sin\varphi'\sin U'\cos(X-J),\\
-\cos(x'+j)\sin u &= \sin\varphi'\cos U - \cos\varphi'\sin U\cos(X+J),\\
-\cos(x'-j)\sin u' &= \sin\varphi'\cos U' - \cos\varphi'\sin U'\cos(X-J),\\
\sin(x'+j)\sin u &= \sin U\sin(X+J),\\
\sin(x'-j)\sin u' &= \sin U'\sin(X-J).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine, à l'aide de ces formules, u, u', x', j dans l'équation (13), et qu'on fasse dans la partie multipliée par $\pi^2-\mu^2$, $\varphi' = 90^\circ - \varphi$, on obtient, après quelques réductions,

$$(15)\quad \sin^2\varphi = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(\mu^2+\pi^2)}\left\{1-\left[\cos U\cos U' - \sin U\sin U'\begin{pmatrix}\cos(X-J)\cos(X+J)\\ +\sin(X-J)\sin(X+J)\cos 2\varphi\end{pmatrix}\right]\frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{(\pi^2-\mu^2)}{2}\right\}.$$

On peut éliminer J au moyen des relations

$$\begin{aligned}
2\sin U\sin U'\cos^2 J &= \cos 2n - \cos(U+U'),\\
-2\sin U\sin U'\sin^2 J &= \cos 2n - \cos(U-U'),
\end{aligned}$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned}
\sin^2\varphi &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}(\mu^2+\pi^2)}\\
&\times\left\{1-\left\{\begin{matrix}\cos U\cos U' + [\cos(U-U') - \cos 2n]\cos^2\varphi\\ -\sin U\sin U'(\cos^2 X + \sin^2 X\cos 2\varphi)\end{matrix}\right\}\frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right\},
\end{aligned}$$

et en substituant à $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ leurs valeurs approchées,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\sin^2\varphi &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)}\\
&\times\left\{1+\frac{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\cos 2n}{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}-1}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2} - \left[\begin{matrix}\cos U\cos U'(1+\pi^2+\mu^2)\\ -\sin U\sin U'\cos 2X\end{matrix}\right]\frac{\frac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)}{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}-1}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Mais on peut, puisque nous avons négligé le carré de $\pi^2 - \mu^2$, écrire

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}(\mu^2+\pi^2)}\left[1-\frac{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\cos 2n}{1-\frac{(\mu^2+\pi^2)^2}{2}}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right]=\frac{1}{1+\frac{\mu^2+\pi^2}{2}+\frac{\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\cos 2n}{1-\frac{\mu^2+\pi^2}{2}}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2}},$$

et cette formule se change, quand on substitue à $\cos 2n$ sa valeur $\frac{\pi^2+\mu^2-2\nu^2}{\pi^2-\mu^2}$, dans

$$\frac{1-\frac{\mu^2+\pi^2}{2}}{1-\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\nu^2},$$

de là on déduit enfin

$$\sin^2\varphi=\frac{1-\frac{\mu^2+\pi^2}{2}}{1-\frac{\pi^2+\mu^2}{2}\nu^2}\left[1+\frac{\cos U\cos U'(1+\pi^2+\mu^2)-\sin U\sin U'\cos 2X}{1-\left(\frac{\mu^2+\pi^2}{2}\right)^2}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right].$$

Les conséquences les plus remarquables qui dérivent immédiatement de cette expression approchée de l'angle de polarisation complète sont les suivantes :

1. Il existe pour tout plan réflecteur deux azimuts du plan d'incidence perpendiculaires l'un à l'autre, dans lesquels l'angle de la polarisation complète est un maximum et un minimum. Ces azimuts divisent symétriquement le système des angles de polarisation, c'est-à-dire que dans les deux plans d'incidence qui s'inclinent également sur le plan du maximum ou du minimum de l'angle de polarisation se trouvent les angles de polarisation d'égale inclinaison. Les deux plans du plus petit et du plus grand angle de polarisation sont parallèles au plus grand et au plus petit rayon vecteur de la section déterminée dans la surface d'élasticité par le plan réfléchissant.

2. Si le plan réfléchissant est perpendiculaire à l'un des axes optiques, auquel cas $U=0$, ou $U'=0$, les angles de la polarisation complète sont égaux dans tous les azimuts.

Ces théorèmes ont la plus grande analogie avec les théorèmes que nous avons donnés pour les cristaux à un axe, et je présume qu'ils ne sont pas non plus ici approximatifs, mais rigoureux.

§ XX.

Le plan de polarisation du rayon complétement polarisé par réflexion, forme avec le plan d'incidence, l'angle α, et pour la détermination de cet angle les considérations du § VIII, dans le cas des cristaux à un axe, ont conservé toute leur valeur. On a donc

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{s'}{s}.$$

s' et s doivent être exprimées au moyen des valeurs de φ, φ', φ'' déterminées par l'angle de polarisation complète correspondant, § XIX. Nous avons trouvé ci-dessus, § XVII, équation (2),

$$(2) \qquad \mathrm{N}s' = \sin 2\varphi \left[\begin{array}{c} \sin x' \sin x'' \sin(\varphi'-\varphi'') \cos(\varphi'+\varphi'') \\ -\sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' \sin x'' + \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x' \end{array} \right].$$

Pour s on tire de l'équation (2), § XVII, en éliminant tang q' et tang q'' au moyen de l'équation (11), § XIX,

$$\mathrm{N}s = -\sin 2\varphi [\cos x' \sin x'' \sin(\varphi-\varphi') + \cos x'' \sin x' \sin(\varphi-\varphi'')];$$

on a, par conséquent,

$$(3) \qquad \operatorname{tang} \alpha = -\frac{\sin x' \sin x'' \sin(\varphi'-\varphi'') \cos(\varphi'+\varphi'') - \sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' \sin x'' + \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x'}{\cos x' \sin x'' \sin(\varphi-\varphi') + \cos x'' \sin x' \sin(\varphi-\varphi'')}.$$

Si, d'après les équations (2) et (5), § XVI, on pose

$$\operatorname{tang} q' = \frac{1}{o^2 \mathrm{O}}, \quad \operatorname{tang} q'' = \frac{1}{e^2 \mathrm{E}},$$

et d'après l'équation (34), § XV,

$$\frac{1}{\mathrm{O}} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(u-u') \sin j, \qquad \frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(v+v') \cos k,$$

et

$$\frac{\sin^2\varphi'}{o^2} = \frac{\sin^2\varphi''}{e^2} = \sin^2\varphi$$

et

$$\sin^2\varphi \frac{\pi^2-\mu^2}{2} = \frac{\sin^2\varphi' - \sin^2\varphi''}{\cos(v+v') - \cos(u-u')},$$

on obtient

$$(4) \operatorname{tang} \alpha = -\sin(\varphi'-\varphi'') \left\{ \frac{\sin x' \sin x'' \cos(\varphi'+\varphi'') + \left[\dfrac{\sin(u-u') \sin j \sin x'' - \sin(v+v') \cos k \sin x'}{\cos(u-u') - \cos(v+v')} \right] \sin(\varphi'+\varphi'')}{\cos x' \sin x'' \sin(\varphi-\varphi') + \cos x'' \sin x' \sin(\varphi-\varphi'')} \right\}.$$

Numériquement on peut toujours calculer la déviation du plan de polarisation au moyen de l'angle de la polarisation complète, de l'azimut du plan d'incidence et des quantités qui déterminent la position du plan réfléchissant; mais on peut encore donner à l'équation une forme plus convenable pour cet objet. L'élimination analytique complète de x', x'', u, u', υ, υ' paraît conduire à des calculs trop longs ; je me contenterai, en conséquence, d'avoir égard dans cette élimination à la première puissance de $\pi^2-\mu^2$, ou, ce qui revient au même, de $\sin(\varphi'-\varphi'')$. Si l'on s'en tient à cette approximation, on peut poser dans la formule (4)

$$u=\upsilon,\quad u'=\upsilon',\quad \sin x''=-\cos x',\quad \cos x''=-\sin x',\quad k=j,$$

et dans la partie multipliée par $\sin(\varphi'-\varphi'')$, $\varphi'=\varphi''$, on obtient

$$(5)\quad \operatorname{tang}\alpha=-\frac{\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin(\varphi-\varphi'')}\left\{\frac{\sin u\sin u'\sin 2x'\cos 2\varphi'+[\sin u\cos u'\cos(x+j)+\sin u'\cos u\sin(x-j)]\sin 2\varphi'}{2\sin u\sin u'}\right\}.$$

De l'équation (14) du précédent paragraphe on déduit

$$\sin u\cos u'\sin(x+j)+\sin u'\cos u\sin(x-j)=\begin{bmatrix}\sin U\cos U'\sin(X+J)\\+\sin U'\cos U\sin(X-J)\end{bmatrix}\cos\varphi'+\sin U\sin U'\sin 2X\sin\varphi',$$

$$\sin u\sin u'\sin 2x=-\begin{bmatrix}\sin U\cos U'\sin(X+J)\\+\sin U'\cos U\sin(X-J)\end{bmatrix}\sin\varphi'+\sin U\sin U'\sin 2X\cos\varphi'.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (5), donnent, après avoir posé..........

$$\frac{-\sin(\varphi'-\varphi'')}{2\sin u\sin u'}=\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin 2\varphi'},$$

$$(6)\quad \operatorname{tang}\alpha=\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin 2\varphi'\sin(\varphi-\varphi')}\left\{\begin{array}{l}\sin U\sin U'\sin 2X\cos\varphi'\\+[\sin(U+U')\sin X\cos J+\sin(U-U')\cos X\sin J]\times\sin\varphi'\end{array}\right\}.$$

De $\operatorname{tang}\alpha=0$ on déduit

$$(7)\quad \sin U\sin U'\sin 2X\cos\varphi'+[\sin(U+U')\sin X\cos J+\sin(U-U')\cos X\sin J]\sin\varphi'=0,$$

d'où l'on déduira X après avoir posé pour φ' la valeur correspondante à l'angle de polarisation. Examinons les cas les plus simples où le plan réflecteur est parallèle à l'un des axes d'élasticité.

1. $U-U'=0$. Ceci donne

$$(\sin U\cos\varphi'\cos X+\cos U\cos J\sin\varphi')\sin X=0.$$

La polarisation complète sans déviation du plan de polarisation a lieu ainsi

(a) pour $\sin X=0$,

(b) pour $\cos X=-\operatorname{cotang} U\operatorname{tang}\varphi'\cos J$.

Ces conditions déterminent quatre azimuts de polarisation complète sans déviation.

2. $U+U'=0$ nous donne

$$(\sin U\sin X\cos\varphi'+\cos U\sin J\sin\varphi')\cos X=0,$$

d'où

(c) $\cos X=0$,

(d) $\sin X=-\operatorname{cotang} U'\sin J\operatorname{tang}\varphi'$.

5. Quand le plan réfléchissant est parallèle à l'axe moyen d'élasticité, il vient ou $J = 0$, ou $J = 90^\circ$. Nous avons, dans le premier cas,

$$\sin X = 0, \tag{e}$$

$$\cos X = -\frac{\sin(U+U')\operatorname{tang}\varphi'}{2\sin U\sin U'}, \tag{f}$$

et dans le second cas,

$$\cos X = 0, \tag{g}$$

$$\sin X = -\frac{\sin(U-U')\operatorname{tang}\varphi'}{2\sin U\sin U'}. \tag{h}$$

Il y a donc, en général, dans ces derniers cas, outre la section principale, deux autres azimuts où la polarisation complète a lieu sans déviation de son plan. Ces azimuts feront l'objet d'un examen plus approfondi. Les équations (b) et (d) peuvent être comprises dans une même équation.

Soit $90^\circ - \xi$ l'inclinaison du plan réfléchissant sur l'axe d'élasticité qui divise en deux moitiés l'angle $2n$ des axes optiques, de sorte que

$$\cos U = \cos\xi\cos n,$$

$$\sin J = \frac{\sin n}{\sin U}.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation (b), donnent

$$\cos X = -\operatorname{tang}\varphi'.\frac{\operatorname{tang}\xi\cos^2 n}{\operatorname{tang}^2\xi + \sin^2 n}. \tag{8}$$

L'équation (d) donne une équation toute semblable, à cette difference près qu'à n on substitue $n' = 90^\circ - n$ et que ξ ne désigne pas, comme dans l'équation (8), l'inclinaison sur l'axe π, mais sur l'axe μ. Les propriétés du plan réfléchissant exprimées par l'equation (8) se déduisent plus facilement de la même équation quand on écrit

$$\operatorname{tang}\xi = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tang}\varphi'\cos^2 n}{\cos X} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\varphi'\cos^4 n}{4\cos^2 X} - \sin^2 n}, \tag{9}$$

d'où il résulte qu'à chaque valeur de cos X correspondent deux valeurs positives de tang ξ, mais que $\cos^2 X$ a un maximum qui ne peut être dépassé. Nous distinguons deux cas : 1° le maximum de cos X est réel.

La condition de réalité est

$$\operatorname{tang}^2\varphi' < \frac{4\operatorname{tang}^2 n}{\cos^2 n}. \tag{10}$$

Le maximum même est

$$\cos X = -\frac{\operatorname{tang}\varphi'\cos^2 n}{2\sin n},$$

et il a lieu pour un plan défini par la condition

$$\text{tang}\,\xi = \sin n. \tag{11}$$

La limite de possibilité de ce maximum est

$$\text{tang}^2 \varphi' = \frac{4 \,\text{tang}^2 n}{\cos^2 n}.$$

Alors $\cos X = -1$; pour le plan réfléchissant reste $\text{tang}\,\xi = \sin n$,

2° Le maximum de $\cos X$ n'est pas réel. Ceci a lieu quand

$$\text{tang}^2 \varphi' > \frac{4 \,\text{tang}^2 n}{\cos^2 n}.$$

$\cos X$ devient ici -1 pour

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang}\,\xi' = \frac{1}{2}\,\text{tang}\,\varphi' \cos^2 n - \frac{1}{2}\sqrt{\text{tang}^2 \varphi' \cos^4 n - 4 \sin^2 n}, \\ \text{et} \\ \text{tang}\,\xi'' = \frac{1}{2}\,\text{tang}\,\varphi' \cos^2 n + \frac{1}{2}\sqrt{\text{tang}^2 \varphi' \cos^4 n - 4 \sin^2 n}. \end{array} \right.$$

Sur tous les plans réflecteurs compris entre les deux plans déterminés par ξ' et ξ'' il n'y a que la section principale pour laquelle la polarisation complète puisse avoir lieu sans déviation du plan de polarisation. Entre $\xi = \xi'$ et $\xi = 0$, et entre $\xi = \xi''$ et $\xi = 90°$ paraissent, outre la section principale, deux nouveaux azimuts qui ont semblable propriété.

Comme l'angle de polarisation ne varie pas beaucoup pour le même cristal, ces résultats peuvent être rendus plus sensibles par un exemple.

Soit l'angle de polarisation $= 56°$, ce qui donne pour φ' environ $34°$. De l'équation (10) on déduit

$$\text{tang}^2 n > \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi'}{\cos \varphi'},$$

$\varphi' = 34°$ donne $n > 17° \frac{1}{2}$. Quand donc l'angle des deux axes optiques, c'est-à-dire $2n$, est compris entre 35 et $180° - 35°$, les azimuts sans déviation du plan de polarisation sont possibles aussi bien sur les plans qui sont parallèles au plus grand des axes d'élasticité que sur les plans qui sont parallèles au plus petit. Si l'angle des axes optiques est en dehors de ces limites, il n'y a plus qu'un seul système de plans réflecteurs qui présente des azimuts semblables.

J'arrive aux plans réfléchissants, qui sont parallèles à l'axe moyen d'élasticité. Si l'on désigne encore par ξ leur inclinaison sur l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle des deux axes optiques, on a à poser, dans l'équation (f);

$$U = n + \xi,$$
$$U' = n - \xi,$$

et dans l'équation (h),

$$U = n + \xi,$$
$$U' = n - \xi$$

Comme dans l'équation (h) l'angle X est compté à partir du plan perpendiculaire à la section principale, je ferai correspondre son zéro à celui de X dans l'équation (f) où cet angle est compté à partir de la section principale elle-même; dans l'équation (h), à la place de X je mettrai X — 90°; par là les équations (f) et (h) rentrent dans une même équation

$$(13) \qquad \cos X = -\frac{\sin\xi\cos\xi}{\sin^2\xi - \sin^2 n}\tang\varphi'.$$

Les azimuts X sans déviation forment donc toujours un angle obtus avec l'azimut de l'axe optique le plus voisin, que la normale au plan réfléchissant soit dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus des axes optiques. Si l'on renverse l'équation (13), on peut l'écrire

$$(14) \qquad \tang\xi = \sqrt{\frac{\tang^2\varphi'}{4\cos^4 n\cos^2 X} + \tang^2 n} - \frac{\tang\varphi'}{2\cos^2 n\cos X},$$

où cos X peut être positif ou négatif. On voit que cet azimut sans déviation ne subsiste plus, ou plutôt à cause des équations (e) et (g), qu'il n'y a de plan de polarisation sans déviation que lorsque le plan d'incidence coïncide avec la section principale, de

$$\tang\xi' = \sqrt{\frac{\tang^2\varphi'}{4\cos^4 n} + \tang^2 n} - \frac{\tang\varphi'}{2\cos^2 n}$$

à

$$\tang\xi'' = \sqrt{\frac{\tang^2\varphi'}{4\cos^4 n} + \tang^2 n} + \frac{\tang\varphi'}{2\cos^2 n}.$$

En dehors de ces limites apparaissent de nouveaux azimuts sans déviation qui croissent jusqu'à 90°, limite qu'ils atteignent sur les plans perpendiculaires aux axes d'élasticité. L'angle que forment entre eux les plans correspondants à ξ' et ξ'', a une expression très-simple que voici :

$$\tang(\xi'' - \xi') = \tang\varphi'.$$

Si l'on désigne par (ζ') et (ζ'') en général deux valeurs de ξ dans l'équation (14) qui correspondent à X et à 90° — X, on a

$$(15) \qquad \tang(\zeta'' - \zeta') = \frac{\tang\varphi'}{\cos X}.$$

C'est assurément un résultat inattendu que, relativement aux plans qui sont perpendiculaires aux axes optiques, il y ait pour chaque azimut, excepté pour $\sin X = 0$, une déviation du plan de polarisation, et que cette déviation ait lieu malgré l'égalité de l'angle de polarisation dans tous les azimuts. Cette déviation se déduit de l'équation (6) quand on y fait $U = 0$, $J = 0$. On trouve

$$(16) \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{\pi^2 - \mu^2}{4} \frac{\sin^2 \varphi \sin n \sin X}{\cos \varphi' \sin (\varphi - \varphi')}.$$

Sur chaque plan réfléchissant il y a toujours au moins deux azimuts dans lesquels la déviation du plan de polarisation est égale à o, c'est-à-dire que l'équation (7), qui est du quatrième degré par rapport à X, a toujours au moins deux racines réelles. Ceci résultera du paragraphe suivant.

Pour l'azimut de la plus grande déviation, on déduit de l'équation (6), en la différentiant par rapport à X, et regardant φ, φ' comme constants, ce qui est permis dans un calcul approximatif,

$$(17) \qquad 2 \cos \varphi' \sin U \sin U' \cos 2X + \sin \varphi' [\sin (U + U') \cos J \cos X - \sin (U - U') \sin J \sin X] = 0;$$

et si l'on désigne par m cet azimut maximum, on obtient

$$(18) \qquad \operatorname{tang} m = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{\sin 2\varphi' \sin (\varphi - \varphi')} \left[\frac{2 \sin U \sin U' \cos \varphi' \cos^3 X + \sin (U + U') \cos J \sin \varphi'}{\sin X} \right].$$

§ XXI.

Dans le paragraphe précédent nous avons cherché la rotation du plan de polarisation par la réflexion sous l'angle de polarisation. Pour déterminer en général les rotations des plans de polarisation par réflexion, nous ferons les conventions qui suivent.

1. Je désignerai par δ_s la rotation que fait éprouver la réflexion à un rayon primitivement polarisé parallèlement au plan d'incidence ;

2. Par $90° - \delta_p$ la rotation que subit un rayon primitivement polarisé perpendiculairement au plan d'incidence ;

3. Par d_s l'azimut de la polarisation primitive d'un rayon incident, tel que dans le rayon réfléchi le plan de polarisation soit parallèle au plan d'incidence ;

4. Et par $90° - d_p$ l'azimut de la polarisation primitive dans lequel le rayon réfléchi est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence. On a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tang} \delta_s = \dfrac{s'}{s}, & \operatorname{tang} d_s = -\dfrac{s'}{p}; \\ \operatorname{tang} \delta_p = \dfrac{p'}{p}, & \operatorname{tang} d_p = -\dfrac{p'}{s}. \end{array} \right.$$

s, s', p, p' ont les valeurs données au § XVII, équations (2), d'après lesquelles ces angles peuvent être calculés dans chaque cas donné. La relation de ces angles entre eux est générale et subsiste pour tout milieu réfléchissant.

J'examinerai dans quelles circonstances ces angles δ_s, δ_p, d_s, d_p disparaissent; nous avons en conséquence à étudier les équations

$$p' = 0, \quad \text{et} \quad s' = 0,$$

qui deviennent, si l'on y substitue les valeurs tirées des équations (2), § XVII,

$$(\pi) \qquad \sin(\varphi' - \varphi'')\cos x' \cos x'' = 0,$$

$$(\sigma) \quad \sin x' \sin x'' \sin(\varphi' - \varphi'')\cos(\varphi' + \varphi'') + \sin x' \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' - \sin x'' \sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' = 0.$$

Je m'occuperai seulement de la première approximation de ces équations, et je négligerai ce qui dépend de la seconde puissance et des puissances supérieures de $\sin(\varphi' - \varphi'')$. Si l'on s'en tient à ce degré d'approximation, l'équation (π) se change en $\sin 2x' = 0$, et cette équation, développée au moyen de l'équation (14), § XIX, donne

$$(\pi') \quad 0 = \sin\varphi'[\sin(U + U')\cos J \sin X + \sin(U - U')\sin J \cos X] - \cos\varphi' \sin U \sin U' \sin 2X;$$

la seconde équation (σ) donne la même formule qui a été trouvée, équation (7), § XX, à cela près que, dans l'équation actuelle, φ' ne se rapporte pas à l'angle de polarisation, mais peut recevoir toute valeur. On a ainsi

$$(\sigma') \quad 0 = \sin\varphi'[\sin(U + U')\cos J \sin X + \sin(U - U')\sin J \cos X] + \cos\varphi' \sin U \sin U' \sin 2X.$$

Ces équations représentent deux surfaces coniques intérieures au cristal: si l'on prend les arêtes de ces cônes normales aux ondes, et si l'on construit les directions qu'elles prennent à la sortie du cristal, on obtient l'ensemble des directions suivant lesquelles les rayons doivent tomber sur le plan du cristal pour que leur plan de polarisation, primitivement parallèle ou perpendiculaire, n'éprouve pas de changement par réflexion. Les deux surfaces coniques sont du troisième ordre; elles sont égales entre elles; elles ont commune la normale au plan réflecteur, mais l'une est par rapport à l'autre tournée autour de cette ligne de 180°. Je n'ai donc qu'à examiner avec attention le cône (π'). Ce cône nous sera très-utile dans l'étude de la réfraction.

Comme $\operatorname{tang}\varphi' = 0$, aussi bien quand $\sin X = 0$ que lorsque $\cos X = 0$, deux branches du cône doivent passer par la normale au plan de réfringence et se couper à angle droit suivant cette normale. Si $X = J$,

$$\operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang} U',$$

et si $X = -J$,

$$\operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang} U.$$

Le cône passe donc toujours par les deux axes optiques.

Si $\operatorname{tang} X = -\dfrac{\sin(U - U')}{\sin(U + U')}\operatorname{tang} J$,

$$\varphi' = 90^\circ.$$

L'azimut X déterminé par cette équation est toujours négatif, puisque nous prenons toujours $U' < U$. Si nous l'appelons $-X'$, il vient

$$\operatorname{tang} U \sin(J - X') = \operatorname{tang} U' \sin(J + X).$$

Soient N, U, U' les intersections du plan réflecteur par sa normale et les deux axes optiques; ces trois lignes étant menées par le point O au-dessous de ce plan. Si l'on suppose que la ligne NP divise l'angle UNU' de manière à donner

$$\sin UNP : \sin U'NP = \operatorname{tang} U' : \operatorname{tang} U,$$

NP sera une ligne parallèle au côté du cône.

Si l'on suppose, en outre, mené par N un plan perpendiculaire au plan des deux axes optiques, la ligne d'intersection des deux plans OS est un côté du cône. Cette dernière propriété du cône (π') se vérifie très-facilement si l'on considère N, U, U' comme les points de rencontre d'une sphère décrite du point O, avec la normale et les deux axes optiques. On n'a plus qu'à mener par N un grand cercle perpendiculaire à UU', et à démontrer que

$$NS = \varphi', \quad SNU' = J - X \quad \text{et} \quad UNS = J$$

satisfont à l'équation (π').

Nous avons donc pour le cône (π') cinq côtés déterminés et la position de deux plans tangents. Ce cône coupera le plan réfléchissant, en général, suivant une courbe qui a sensiblement la forme ANSU'NUB. Les lignes NH et NH' représentent les directions du plus grand et du plus petit rayon vecteur de la section que le plan réflecteur déterminerait dans la surface d'élasticité.

Une propriété générale de ce cône est digne d'attention : dans l'intérieur de l'angle azimutal HNP il n'existe pour φ' que des valeurs négatives, qui sont telles que la polarisation primitivement perpendiculaire du rayon incident ne subit pas de modification par réflexion. Nous avons appelé X' cet angle HNP, et nous l'avons déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang} U \sin(J - X') = \operatorname{tang} U' \sin(J + X').$$

Dans la partie du cône NU'S φ' atteint un maximum. On déduit ce maximum de l'équation (π') en faisant $\frac{d\varphi'}{dX} = 0$: il a lieu dans l'azimut

$$(3) \qquad \operatorname{tang} X = \sqrt[3]{\operatorname{tang} J \frac{\sin(U - U')}{\sin(U + U')}};$$

sa valeur est

$$(4) \quad \operatorname{tang}\varphi' = \frac{2 \sin U \sin U' \sqrt{[\sin J \sin(U - U')]^{\frac{4}{3}} + [\cos J \sin(U + U')]^{\frac{4}{3}} - [\sin J \cos J \sin(U - U') \sin(U + U')]^{\frac{4}{3}}}}{\sqrt{\sin^2(U - U')\sin^2 J + \sin^2(U + U')\cos^2 J}\,\left\{[\sin(U - U')\sin J]^{\frac{2}{3}} + [\sin(U + U')\cos J]^{\frac{2}{3}}\right\}}.$$

La valeur de ce maximum est importante pour la question des azimuts suivant lesquels la polarisation primitive, parallèle ou perpendiculaire, n'est pas changée pour un angle d'incidence donné φ'. Tant que la valeur de φ' correspondante à cette valeur de φ n'est pas plus petite que la valeur donnée, éq. (4), il existe toujours quatre azimuts qui répondent à la question; dans le cas contraire il n'y en a plus que deux. Ceci s'applique à l'équation (7) du paragraphe précédent, qui est la même que celle notée (σ') dans ce paragraphe, laquelle, comme on l'a déjà remarqué, ne se distingue de (π') qu'en ce que à chaque valeur de X doit correspondre une valeur négative de φ'. Dans l'équation (7) φ' est l'angle de réfraction donné en fonction de l'angle de polarisation, et X est à déterminer.

Après les considérations qui précèdent, on peut toujours se représenter clairement la position de la surface conique (π'), quel que soit le plan réfléchissant; mais nous mentionnerons encore les cas limites où ce plan est parallèle aux axes d'élasticité. Si le plan réflecteur est parallèle au plus grand ou au plus petit des axes d'élasticité, on posera

$$U - U' = 0 \quad \text{ou} \quad U + U' = 180^{\circ},$$

l'équation (π') se résout alors en deux facteurs dont l'un représente un plan, l'autre un cône du deuxième ordre. Le plan passe toujours par la normale au plan réfléchissant, et est perpendiculaire à celui des axes d'élasticité qui est parallèle à ce dernier plan. Le cône passe toujours par les deux axes optiques et par la normale au plan réfléchissant qu'il coupe suivant un cercle. Quand le plan réfléchissant est perpendiculaire à l'un des axes d'élasticité, (π') représente deux plans qui se coupent à angle droit parallèlement aux deux autres axes d'élasticité. Quand le plan réfléchissant est parallèle à l'axe moyen d'élasticité, (π') représente pareillement un plan et un cône du deuxième ordre. Le plan passe dans ce cas par les deux axes optiques, le cône par la normale au plan réfléchissant qu'il rencontre suivant un cercle.

Soient, *fig.* 14, N, U, U' les traces sur le plan réflecteur de la normale et des deux axes optiques, ces trois lignes étant menées par le même point O; soit NS le cercle suivant lequel le plan est coupé par le cône; la proportion harmonique suivante a lieu:

$$\sin \text{UON} : \sin \text{U'ON'} = \sin \text{UON} : \sin \text{U'ON}.$$

Le cône est donc le même, quelle que soit celle des lignes ON ou ON' qui soit normale au plan de réfringence, et il existe toujours deux plans réfléchissants correspondants dans l'angle obtus et dans l'angle aigu des deux axes optiques qui ont le même cône elliptique. Ce cône se change en une ligne droite quand le plan réfléchissant est perpendiculaire à l'un des axes optiques.

L'azimut δ d'un rayon polarisé primitivement dans l'azimut a est, après la réflexion,

$$\tang \delta = \frac{\frac{p}{s} \tang a + \tang \delta_s}{1 + \tang a \, d_p}.$$

§ XXII.

Le cône (π'), considéré au paragraphe précédent, est important pour l'étude des cas dans lesquels un des deux rayons réfractés disparaît, dans l'hypothèse où la lumière incidente serait primitivement polarisée parallèlement ou perpendiculairement au plan d'incidence. Si la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, on a, par l'équation (2), § XVII,

$$D' : D'' :: \sin(\varphi + \varphi'') \cos x'' : \sin(\varphi + \varphi') \cos x' ;$$

d'où résulte que le rayon ordinaire ou le rayon extraordinaire disparaît selon que

$$\cos x'' = o \quad \text{ou} \quad \cos x' = o.$$

Mais comme, en général, x' est compté de telle manière que si $\varphi' = \varphi''$,

$$\cos x'' = -\sin x',$$

les deux angles sont racines d'une même équation, savoir, de $\sin 2x' = o$, c'est-à-dire de l'équation (π'). Si l'on imagine, *fig.* 13, une sphère décrite du point O commun à la normale et aux axes optiques OU et OU', chaque côté OD' du cône (π') pour lequel l'angle $ND'd = 90°$, D'D étant bissectrice de l'angle UD'U', est un rayon réfracté d'après la loi du rayon ordinaire, issu d'un rayon incident qui, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, n'a pas produit de rayon extraordinaire. Chaque côté OD'' pour lequel ND'' divise en deux parties égales l'angle UD''U' est le rayon extraordinaire d'un rayon incident qui, polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, ne produit pas de rayon ordinaire. Il est facile de trouver, d'après cela, les directions des rayons incidents. Désignons dans le premier cas l'inclinaison de D' sur N par φ', dans le second cas l'inclinaison de D'' sur N par φ'', et les angles d'incidence correspondants à φ' et à φ'' par ξ' et ξ'', il vient

$$\sin \xi' = \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{\frac{\pi^2 + \mu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos(u - u')}},$$

$$\sin \xi'' = \frac{\sin \varphi''}{\sqrt{\frac{\pi^2 + \mu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos(u + u')}}.$$

Il n'y aura, dans un cas donné, aucune difficulté à discuter pour quelle partie du cône (π') $\cos x' = o$, et pour quelle partie $\sin x' = o$. Dans la *fig.* 13, par exemple, pour la partie du cône UND'U, $\cos x'$ est partout $= o$, tandis que pour les deux parties U'SND'' et UB, c'est $\sin x'$ qui est nul. Si le plan réfringent est parallèle à l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle obtus des deux axes optiques, c'est-à-dire si $U - U' = o$, $\cos x' = o$ pour tous les côtés du cône elliptique pour lesquels $\varphi' < U$; mais $\sin x' = 0$ pour tous les côtés pour lesquels $\varphi' > U$ et pour les rayons qui suivent la section principale. L'inverse a lieu pour les surfaces réfringentes parallèles à l'axe d'élasticité qui divise en deux parties égales l'angle aigu des axes optiques, c'est-à-dire pour lequel $U + U' = 180°$. Si le plan réfringent est parallèle à l'axe moyen d'élasticité, les rayons du cône elliptique satisfont à la condition $\cos x' = 0$ quand la normale au plan réfringent est située dans l'angle obtus des axes optiques, et à la condition $\sin x' = 0$ quand elle est dans l'angle aigu. Pour les rayons incidents dans la section principale compris dans l'angle obtus des axes optiques, $\sin x'$ est $= 0$; pour les rayons qui sont dans l'angle aigu, $\cos x' = 0$.

Quand les rayons incidents sont polarisés parallèlement au plan d'incidence, on a, d'après l'équation (3), § XVII,

$$\begin{aligned} D' : D'' = \sin x'' \sin(\varphi + \varphi'') \cos(\varphi - \varphi'') \\ - \sin^2 \varphi'' \operatorname{tang} q'' : \sin x' \sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi') - \sin^2 \varphi' \operatorname{tang} q'. \end{aligned}$$

Le rayon extraordinaire est donc tout près de disparaître, car $\operatorname{tang} q'$ et $\operatorname{tang} q''$ sont seulement de petites quantités dépendantes de $(\varphi' - \varphi'')$, quand $\sin x' = 0$, et le rayon ordinaire est à son tour dans le même cas quand $\sin x'' = 0$. Ces deux cas sont compris encore dans $\sin 2x' = 0$, c'est-à-dire dans l'équation (π').

Les côtés du cône, *fig.* 13, pour lesquels $\sin x' = 0$ sont approximativement les directions réfractées d'après la loi du rayon ordinaire que doit suivre un rayon polarisé parallèlement au plan d'incidence pour que le rayon extraordinaire disparaisse, et les côtés pour lesquels $\cos x' = 0$ sont les rayons réfractés d'après la loi du rayon extraordinaire qui, polarisés parallèlement au plan d'incidence, ne produisent pas de rayon ordinaire. Au moyen des valeurs approchées fournies par l'éq. (π'), c'est-à-dire par $\sin 2x' = 0$, on calcule facilement des valeurs plus exactes

$$\sin 2x' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{4} \frac{\sin^2 \varphi \cos x' \sin(u - u') \sin j}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')},$$

$$\sin 2x'' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{4} \frac{\sin^2 \varphi \cos x'' \sin(\upsilon + \upsilon') \cos k}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')}.$$

La relation qui doit exister entre la position du plan de polarisation du rayon incident, son angle d'incidence et l'azimut du plan d'incidence, pour que le rayon ordinaire ou le rayon extraordinaire disparaisse, résulte généralement de l'équation (3), § XVII. Quand l'angle d'incidence et l'azimut du plan d'incidence sont donnés, on a immédiatement, pour l'azimut a' du plan de polarisation primitif dans lequel subsiste le rayon ordinaire seul,

$$\operatorname{tang} a' = - \operatorname{tang} x' \cos(\varphi - \varphi') + \frac{\sin^2 \varphi' \operatorname{tang} q'}{\cos x' \sin(\varphi + \varphi')}, \tag{1}$$

et pour l'azimut a'' dans lequel un rayon extraordinaire seul paraît,

$$\operatorname{tang} a'' = + \operatorname{tang} x'' \cos(\varphi - \varphi'') - \frac{\sin^2 \varphi'' \operatorname{tang} q''}{\cos x'' \sin(\varphi + \varphi'')}. \tag{2}$$

Quand les rayons incidents sont polarisés dans les azimuts a' ou a'', les expressions des vitesses dans les rayons réfractés et réfléchis sont d'une simplicité remarquable.

1. Dans l'azimut a', il vient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} D' &= -\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos x'\sin(\varphi+\varphi')}S,\\ R_s &= -\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')}S,\\ R_p &= -\frac{\sin x'\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')+\sin^2\varphi'\operatorname{tang}q'}{\cos x'\sin(\varphi+\varphi')}S,\end{aligned}\right.$$

et pour l'azimut δ' du plan de polarisation dans le rayon réfléchi,

$$\operatorname{tang}\delta' = -\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\operatorname{tang}a' + \frac{2\sin 2\varphi\sin^2\varphi'\operatorname{tang}q'}{\sin 2(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')\cos x'}.$$

2. Dans l'azimut a'', on a

$$\begin{aligned} D'' &= \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')}S,\\ R_s &= -\frac{\sin(\varphi-\varphi'')}{\sin(\varphi+\varphi'')}S,\\ R_p &= \frac{\sin x''\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'')+\sin^2\varphi''\operatorname{tang}q''}{\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')}S,\end{aligned}$$

et pour l'azimut δ'' du plan de polarisation du rayon réfléchi,

$$\operatorname{tang}\delta'' = -\operatorname{tang}a''\frac{\cos(\varphi+\varphi'')}{\cos(\varphi-\varphi'')} - \frac{2\sin 2\varphi\sin^2\varphi''\operatorname{tang}q''}{\cos x''\sin 2(\varphi-\varphi'')\sin(\varphi+\varphi'')}.$$

§ XXIII.

Je vais étudier actuellement l'émergence d'un rayon d'un cristal à deux axes. Je désignerai la vitesse dans le rayon émergent selon que ce rayon est ordinaire ou extraordinaire par D' ou D'', et les vitesses dans les deux rayons réfléchis, selon qu'ils proviennent de D' ou de D'', par $R'_{,}$ et $R''_{,}$ ou $R'_{,,}$ et $R''_{,,}$. Je décompose le rayon émergent en deux rayons, l'un polarisé parallèlement au plan d'émergence, l'autre polarisé perpendiculairement à ce plan, et j'appelle les vitesses respectives S' et P' quand elles dérivent de D', S'' et P'' quand elles dérivent de D''. Je désigne, en outre, les azimuts des directions des vitesses D' et D'' par rapport au plan d'incidence, par y' et y'', et je les compte de telle manière que $y' - 90°$ et $y'' - 90°$ soient les azimuts des rayons correspondants à D' et à D''. Ces angles $y' - 90°$ et $y'' - 90°$ doivent toujours être positifs et sont égaux à 0, quand les rayons sont placés dans le plan d'incidence, et font un plus grand angle avec la normale au plan de réfringence que les normales des ondes planes qui leur correspondent; au contraire, si le rayon est placé entre la normale à l'onde et la normale au plan de réfringence, $y' - 90^\circ$ et $y'' - 90^\circ$ doivent être égaux à 180°. Soient $z'_{,}$ et $z''_{,}$ pour $R'_{,}$ et $R'_{,,}$, $z'_{,,}$ et $z''_{,,}$ pour $R'_{,,}$ et $R''_{,,}$, les azimuts par rapport au plan d'incidence des directions des mouvements dans les rayons réfléchis à l'intérieur du milieu. Ces angles sont calculés de telle manière qu'ils coïncident respectivement avec les angles y' et y'' quand le rayon émergent est perpendiculaire au plan de réfringence. Soient encore ψ' et ψ'' les angles que les normales aux ondes de D' et de D'' font avec la normale au plan de réfringence; les angles des normales aux ondes $R'_{,}$, $R''_{,}$ et $R'_{,,}$, $R''_{,,}$, avec la même normale, seront $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, et $\xi'_{,,}$, $\xi''_{,,}$.

Je désigne par ι' l'inclinaison du rayon émergent sur la normale au plan réfringent quand il dérive de D', et par ι'' quand il provient de D''. J'appelle enfin p' et p'' les inclinaisons des rayons D' et D'' sur la normale à l'onde qui leur appartient, et $r'_{,}$, $r''_{,}$ et $r'_{,,}$, $r''_{,,}$ les inclinaisons des rayons $R'_{,}$, $R''_{,}$ et $R'_{,,}$, $R''_{,,}$ sur les normales à leurs ondes respectives. Les angles p' et p'' doivent être toujours positifs, les angles $z'_{,}$, $z'_{,,}$ et $z''_{,}$, $z''_{,,}$ négatifs quand les rayons $R'_{,}$, $R'_{,,}$ et $R''_{,}$ ne sont pas dans l'azimut $z'_{,} - 90^\circ$, $z'_{,,} - 90^\circ$ et $z''_{,} - 90^\circ$, $z''_{,,} - 90^\circ$ relativement au plan d'incidence, mais dans les azimuts $z'_{,} + 90^\circ$, $z'_{,,} + 90^\circ$ et $z'_{,,} + 90^\circ$, $z''_{,,} + 90^\circ$. Ces notations admises, on trouve, en désignant les valeurs qui reçoivent le mouvement des rayons incidents D' et D'', dans les rayons réfléchis $R'_{,}$, $R''_{,}$ et $R'_{,,}$, $R''_{,,}$, et dans les rayons réfractés P', S' et P'', S'', par Q', Q'', $Q'_{,}$, $Q''_{,}$, $Q'_{,,}$, $Q''_{,,}$, T', T'':

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
T' &= \alpha \sin\iota' \cos\iota',\\
T'' &= \alpha \sin\iota'' \cos\iota'',\\
Q' &= \alpha(\sin\psi' \cos\psi' - \sin^2\psi' \sin y' \operatorname{tang} p'),\\
Q'' &= \alpha(\sin\psi'' \cos\psi'' - \sin^2\psi'' \sin y'' \operatorname{tang} p''),\\
Q'_{,} &= \alpha(\sin\xi'_{,} \cos\xi'_{,} + \sin^2\xi'_{,} \sin z'_{,} \operatorname{tang} r'_{,}),\\
Q''_{,} &= \alpha(\sin\xi''_{,} \cos\xi''_{,} + \sin^2\xi''_{,} \sin z''_{,} \operatorname{tang} r''_{,}),\\
Q'_{,,} &= \alpha(\sin\xi'_{,,} \cos\xi'_{,,} + \sin^2\xi'_{,,} \sin z'_{,,} \operatorname{tang} r'_{,,}),\\
Q''_{,,} &= \alpha(\sin\xi''_{,,} \cos\xi''_{,,} + \sin^2\xi''_{,,} \sin z''_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,}).
\end{aligned}\right.$$

Les équations qui résultent du principe de la conservation des forces vives sont

1. Quand l'onde incidente est une onde ordinaire,

$$D'^2 Q' = R'^2_{,} Q'_{,} + R''^2_{,} Q''_{,} + (P'^2 + S'^2)\, T';$$

2. Quand l'onde incidente est extraordinaire,

$$D''^2 Q'' = R'^2_{,,} Q'_{,,} + R''^2_{,,} Q''_{,,} + (P''^2 + S''^2)\, T''.$$

En remplaçant dans ces équations les volumes par leurs valeurs tirées des équations (1), nous obtenons, dans le premier cas,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&D'^2(\sin\psi' \cos\psi' - \sin^2\psi' \sin y' \operatorname{tang} p') - R'^2_{,}(\sin\xi'_{,} \cos\xi'_{,} + \sin^2\xi'_{,} \sin z'_{,} \operatorname{tang} r'_{,})\\
&- R''^2_{,}(\sin\xi''_{,} \cos\xi''_{,} + \sin^2\xi''_{,} \sin z''_{,} \operatorname{tang} r''_{,}) = (P'^2 + S'^2)\sin\iota' \cos\iota';
\end{aligned}\right.$$

et dans le second cas,

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&D''^2(\sin\psi''\cos\psi'' - \sin^2\psi''\sin y''\tang p'') - R'^2_{,,}(\sin\xi'_{,,}\cos\xi'_{,,} + \sin^2\xi'_{,,}\sin x'_{,,}\tang x'_{,,})\\
&- R''^2_{,,}(\sin\xi''_{,,}\cos\xi''_{,,} + \sin^2\xi''_{,,}\sin z''_{,,}\tang r''_{,,}) = (P''^2 + S''^2)\sin\iota''\cos\iota''.
\end{aligned}\right.
$$

Quant aux angles ι', ι'', ψ', ψ'', $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, $\xi'_{,,}$, $\xi''_{,,}$, on a pour les déterminer les relations suivantes :

$$
(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&a.\quad \sin^2\psi' = o^2\sin^2\iota' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u - u')\right]\sin^2\iota',\\
&b.\quad \sin^2\xi'_{,} = o_{,}^2\sin^2\iota' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u_{,} - u'_{,})\right]\sin^2\iota',\\
&c.\quad \sin^2\xi''_{,} = e_{,}^2\sin^2\iota' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(\upsilon_{,} + \upsilon'_{,})\right]\sin^2\iota',\\
&\alpha.\quad \sin^2\psi'' = e^2\sin^2\iota'' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(\upsilon + \upsilon')\right]\sin^2\iota'',\\
&\beta.\quad \sin^2\xi'_{,,} = o_{,,}^2\sin^2\iota'' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u_{,,} - u'_{,,})\right]\sin^2\iota'',\\
&\gamma.\quad \sin^2\xi''_{,,} = e_{,,}^2\sin^2\iota'' = \left[\frac{\mu^2+\pi^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(\upsilon_{,,} + \upsilon'_{,,})\right]\sin^2\iota'',
\end{aligned}\right.
$$

où la signification de o, e, $o_{,}$, $e_{,}$, $o_{,,}$, $e_{,,}$ est claire par elle-même, et où les inclinaisons des normales aux ondes D', D'', $R'_{,}$, $R''_{,}$, $R'_{,,}$, $R''_{,,}$ sur les axes optiques sont respectivement désignées par u, u'; υ, υ'; $u_{,}$, $u'_{,}$; $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$; $u_{,,}$, $u'_{,,}$; $\upsilon_{,,}$, $\upsilon'_{,,}$. Ces angles sont déterminés par les relations suivantes. Soient U et U′ les inclinaisons de la normale à la surface réfringente sur les deux axes optiques, et soit le plan d'incidence situé dans l'azimut X, cet azimut étant compté à partir de la direction que suivrait le mouvement si le plan réfringent était le plan de l'onde ordinaire, et tel que pour $\psi' = 0$, $X = y'$. Soit 2I l'angle que les deux plans déterminés par la normale au plan de réfringence et les deux axes optiques forment entre eux; soient $2i$ et $2k$ les angles correspondants pour les normales aux ondes D′ et D″; et soient $2i'$ et $2k'$ ces angles pour les normales $R'_{,}$ et $R''_{,}$, et $2i''$ et $2k''$ pour $R'_{,,}$ et $R''_{,,}$. Les relations suivantes ont lieu :

$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos u &= \cos U\cos\psi' + \sin U\sin\psi'\cos(X + I),\\
\cos u' &= \cos U'\cos\psi' + \sin U'\sin\psi'\cos(X - I),\\
-\sin u\cos(y' + i) &= \cos U\sin\psi' - \sin U\cos\psi'\cos(X + I),\\
-\sin u'\cos(y' - i) &= \cos U'\sin\psi' - \sin U'\sin\psi'\cos(X - I),\\
\sin u\sin(y' + i) &= \sin U\sin(X + I),\\
\sin u'\sin(y' - i) &= \sin U'\sin(X - I);
\end{aligned}\right.
$$

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos \upsilon &= \cos U \cos \psi'' + \sin U \sin \psi'' \cos (X+I),\\
\cos \upsilon' &= \cos U' \cos \psi'' + \sin U' \sin \psi'' \cos (X-I),\\
\sin \upsilon \sin (y''-k) &= \cos U \sin \psi'' - \sin U \cos \psi'' \cos (X+I),\\
\sin \upsilon' \sin (y''+k) &= \cos U' \sin \psi'' - \sin U' \cos \psi'' \cos (X-I),\\
-\sin \upsilon \sin (y''-k) &= \sin U \sin (X+I),\\
-\sin \upsilon' \sin (y''+h) &= \sin U' \sin (X-I).
\end{aligned}\right.$$

On déduit facilement ces formules de trigonométrie sphérique de la *fig.* 9, où sont indiquées les points de rencontre avec une sphère des normales aux ondes $D'_,$, $D''_,$ des axes optiques et de la normale au plan réfringent; toutes ces lignes étant menées par le centre de cette surface.

Au moyen des équations (5), on peut exprimer u, u', y', i en fonction de l'angle d'incidence ψ' et des angles U, U' et X qui déterminent la position du plan réfringent et la position du plan d'incidence; et comme ces deux plans sont donnés dans tous les cas, on peut, au moyen de l'équation (5), exprimer les angles u, u', y', i en fonction de ψ'. Pareillement, les angles υ, υ', y'', k sont donnés par l'équation (6) comme des fonctions de l'angle ψ''. L'angle I est déterminé par U et U', et l'angle des deux axes optiques $2n$. On a, en effet,

$$\cos 2n = \cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos 2I.$$

On déduit des équations (5) et (6) deux systèmes semblables en mettant pour ψ et ψ'' $-\xi'_,$ et $-\xi''_,$, à la place de y' et de y'' les angles $z'_,$ et $z''_,$, à la place de i et k les angles i' et k', à la place de u et u' les angles $u_,$ et $u'_,$, et enfin à la place de υ, υ' les angles $\upsilon_,$, $\upsilon'_,$:

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos u_, &= \cos U \cos \xi'_, - \sin U \sin \xi'_, \cos (X+I),\\
\cos u'_, &= \cos U' \cos \xi'_, - \sin U' \sin \xi'_, \cos (X-I),\\
\sin u_, \cos (z'_, + i') &= \cos U \sin \xi'_, + \sin U \cos \xi'_, \cos (X+I),\\
\sin u'_, \cos (z'_, - i') &= \cos U' \sin \xi'_, + \sin U' \cos \xi'_, \cos (X-I)\\
\sin u_, \cos (z'_, + i') &= \sin U \sin (X+I),\\
\sin u'_, \sin (z'_, - i') &= \sin U' \sin (X-I);
\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
\cos \upsilon_, &= \cos U \cos \xi''_, - \sin U \sin \xi''_, \cos (X+I),\\
\cos \upsilon'_, &= \cos U' \cos \xi''_, - \sin U' \sin \xi''_, \cos (X-I),\\
-\sin \upsilon_, \sin (z''_, - k') &= \cos U \sin \xi''_, + \sin U \cos \xi''_, \cos (X+I),\\
-\sin \upsilon'_, \sin (z''_, + k') &= \cos U' \sin \xi''_, + \sin U' \cos \xi''_, \cos (X-I),\\
-\sin \upsilon_, \sin (z''_, - k') &= \sin U \sin (X+I),\\
-\sin \upsilon'_, \sin (z''_, + k') &= \sin U' \sin (X-I).
\end{aligned}\right.$$

Enfin on obtient deux systèmes de relations semblables pour $u_{,,}$, $u'_{,,}$, $\upsilon_{,,}$, $\upsilon'_{,,}$,... en changeant partout l'indice inférieur $_{,}$ en $_{\prime\prime}$, et en remplaçant i' et k' par i'' et k''. Je désigne ces relations par (9) et (10).

Si l'on substitue, dans les équations (4), a, b, c, les valeurs de u, u', $u_{,}$, $u'_{,}$, $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$, on obtient trois équations dont la première contient seulement $\psi'_{,}$, la seconde $\xi'_{,}$ et la troisième $\xi''_{,}$. Il est facile de s'assurer que toutes les trois, développées, conduisent à la même équation du 4^{e} degré, de telle sorte que ψ', $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ sont trois racines de cette équation. La quatrième racine, que je désignerai par $\psi''_{,}$ est l'inclinaison sur le plan réfringent de l'onde extraordinaire correspondant à ι'. On trouve pareillement que ψ'', $\xi'_{\prime\prime}$, $\xi''_{\prime\prime}$ sont trois racines d'une autre équation du quatrième degré dont la quatrième, $\psi'_{\prime\prime}$, est l'angle de réfraction de l'onde ordinaire correspondant à ι''. Quand $\iota' = \iota''$, on a

$$\psi' = \psi'_{\prime\prime}, \quad \psi'' = \psi''_{,} \quad \text{et} \quad \xi'_{,} = \xi'_{\prime\prime}, \quad \xi''_{,} = \xi''_{\prime\prime},$$

et de plus ψ', ψ'', $\xi'_{,} = \xi'_{\prime\prime}$, $\xi''_{\prime\prime} = \xi''_{,}$ sont les quatre racines de la même équation du quatrième degré.

Il existe certains cas particuliers, faciles à voir, où ces équations du quatrième degré se laissent facilement décomposer en deux équations du deuxième degré. On peut aussi, en général, recourir pour les résoudre à des méthodes d'approximation, et les relations de (5) à (10) servent alors. Quand le rayon incident est un rayon ordinaire, et d'après les équations (4), a, on détermine l'angle ι au moyen de l'équation (5); cette valeur, portée dans les équations (4), b, c, fournit pour $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ une première approximation dans laquelle on néglige les carrés de $\pi^2 - \mu^2$ quand on substitue ψ' à $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ dans les valeurs de $u_{,}$, $u'_{,}$ et $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$ dans les équations (7) et (8). Si l'on porte, d'après cela, dans les équations (7) et (8), les valeurs approchées trouvées ci-dessus pour $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$, on obtient $u_{,}$, $u'_{,}$ et $\upsilon_{,}$, $\upsilon'_{,}$ exactes jusqu'à la première puissance de $\pi^2 - \mu^2$; de celles-ci on forme les expressions de

$$\cos(u' - u'_{,}), \quad \cos(\upsilon_{,} + \upsilon'_{,}),$$

qu'on porte dans l'équation (4), b, c, d'où l'on déduit les valeurs de $\xi'_{,}$ et $\xi''_{,}$ exactes jusqu'à la seconde puissance de $\pi^2 - \mu^2$. Ce degré d'approximation sera suffisant dans tous les cas. Une route toute semblable conduit aux valeurs approchées de $\xi'_{\prime\prime}$ et $\xi''_{\prime\prime}$, quand le rayon incident est un rayon extraordinaire, au moyen des équations (4), α, β, γ, et des équations (5), (6), (7), (9), (10).

Je vais former maintenant les équations qui résultent du principe de l'égalité des composantes. Je décompose encore les vitesses D$'$, D$''$, R$'_{,}$, R$''_{,}$, R$'_{\prime\prime}$, R$''_{\prime\prime}$ suivant trois directions : 1° perpendiculairement au plan d'incidence ; 2° perpendiculairement au plan réfringent ; 3° parallèlement au plan d'incidence et au plan de réfringence. Je présenterai dans le tableau suivant les cosinus des angles que les directions des vitesses D$'$, D$''$, R$'_{,}$,..., forment avec ces trois directions perpendiculaires entre elles.

(11)

	D'	D''	$R'_{,}$	$R''_{,}$	$R'_{''}$	$R''_{''}$
1. Sur la perpendiculaire au plan d'incidence.......	$\sin y'$	$+\sin y''$	$\sin z'_{,}$	$+\sin z''_{,}$	$+\sin z'_{''}$	$+\sin z''_{''}$
2. Sur la perpendiculaire au plan réfringent.........	$+\sin\psi'\cos y'$	$-\sin\psi''\cos y''$	$-\sin\xi'_{,}\cos z'_{,}$	$+\sin\xi''_{,}\cos z''_{,}$	$-\sin\xi'_{''}\cos z'_{''}$	$+\sin\xi''_{''}\cos z''_{''}$
3. Sur la parallèle au plan d'incidence et au plan de réfringence..........	$+\cos\psi'\cos y'$	$-\cos\psi''\cos y''$	$+\cos\xi'_{,}\cos z'_{,}$	$-\cos\xi''_{,}\cos z''_{,}$	$+\cos\xi'_{''}\cos z'_{''}$	$-\cos\xi''_{''}\cos z''_{''}$

Pour les vitesses des rayons émergents décomposées suivant les trois mêmes directions, nous avons, selon qu'elles dérivent de D′ ou de D″,

$$(12)\quad \begin{cases} 1. & P' & \text{ou} & P'', \\ 2. & -S'\sin\iota' & \text{ou} & -S''\cos\iota'', \\ 3. & -S'\sin\iota' & \text{ou} & -S''\cos\iota''. \end{cases}$$

Par suite, le principe de l'égalité des composantes fournit les équations :

1. Pour un rayon ordinaire incident,

$$(13)\quad \begin{cases} P' = D'\sin y' + R'_{,}\sin z'_{,} + R''_{,}\sin z''_{,}, \\ -S'\sin\iota' = D'\sin\psi'\cos y' - R'_{,}\sin\xi'_{,}\cos z'_{,} + R''_{,}\sin\xi''_{,}\cos z''_{,}, \\ -S'\cos\iota' = D'\cos\psi'\cos y' + R'_{,}\cos\xi'_{,}\cos z'_{,} - R''_{,}\cos\xi''_{,}\cos z''_{,}. \end{cases}$$

2. Pour un rayon extraordinaire incident,

$$(14)\quad \begin{cases} P'' = D''\sin y'' + R'_{\prime\prime}\sin z'_{\prime\prime} + R''_{\prime\prime}\sin z''_{\prime\prime}, \\ -S''\sin\iota'' = -D''\sin\psi''\cos y'' - R'_{\prime\prime}\sin\xi'_{\prime\prime}\cos z'_{\prime\prime} + R''_{\prime\prime}\sin\xi''_{\prime\prime}\cos z''_{\prime\prime}, \\ -S''\cos\iota'' = -D''\cos\psi''\cos y'' + R'_{\prime\prime}\cos\xi'_{\prime\prime}\cos z'_{\prime\prime} - R''_{\prime\prime}\cos\xi''_{\prime\prime}\cos z''_{\prime\prime}. \end{cases}$$

Il faut maintenant démontrer que les équations du deuxième degré (2) et (3), se changent, au moyen des équations (13) et (14), en équations linéaires. Je m'occuperai d'abord des équations (2) et (13). Le produit des deux dernières des équations (13) nous donne

$$\begin{aligned} S'^2\sin\iota'\cos\iota' = D'^2\sin\psi'\cos\psi'\cos^2 y' &- R'^2_{,}\sin\xi'_{,}\cos^2 z'_{,} \\ &- R''^2_{,}\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,}\cos^2 z''_{,} \\ &+ D'R'_{,}\sin(\psi' - \xi'_{,})\cos y'\cos z'_{,} \\ &- D'R''_{,}\sin(\psi' - \xi''_{,})\cos y'\cos z''_{,} \\ &+ R'_{,}R''_{,}\sin(\xi'_{,} + \xi''_{,})\cos z'_{,}\cos z''_{,}. \end{aligned}$$

Ce produit, retranché de (2), donne

$$\begin{aligned} P'^2\sin\iota'\cos\iota' &= D'^2(\sin\psi'\cos\psi'\sin^2 y' - \sin^2\psi'\sin y'\operatorname{tang} p') \\ &- R'^2_{,}(\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,}\sin z'^2_{,} + \sin^2\xi'_{,}\sin z'_{,}\operatorname{tang} r'_{,}) \\ &- R''^2_{,}(\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,}\sin^2\xi''_{,} + \sin^2\xi''_{,}\sin z''_{,}\operatorname{tang} r''_{,}) - D'R'_{,}\sin(\psi' - \xi'_{,})\cos y'\cos z'_{,} \\ &+ D'R''_{,}\sin(\psi' - \xi''_{,})\cos y'\cos z''_{,} - R'_{,}R''_{,}\sin(\xi'_{,} + \xi''_{,})\cos z'_{,}\cos z''_{,}. \end{aligned}$$

Cette équation, divisée par la première des équations (13), donne

$$\begin{aligned} P'\sin\iota'\cos\iota' &= (\sin\psi'\cos\psi'\sin y' - \sin^2\psi'\operatorname{tang} p') \\ &- R'_{,}(\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,}\sin z'_{,} + \sin^2\xi'_{,}\operatorname{tang} r'_{,}) - R''_{,}(\sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,}\sin z''_{,} + \sin^2\xi''_{,}\operatorname{tang} r''_{,}), \end{aligned}$$

dans l'hypothèse où les relations suivantes subsistent :

$$\begin{aligned} &(\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,} - \sin\psi'\cos\psi')\sin y'\sin z'_{,} \\ &+ \sin^2\xi'_{,}\operatorname{tang} r'_{,}\sin y' + \sin^2\psi'\operatorname{tang} p'\sin z'_{,} = \sin(\psi' - \xi'_{,})\cos y'\cos z'_{,}, \\ &(\sin\psi'\cos\psi' - \sin\xi''_{,}\cos\xi''_{,})\sin y'\sin z''_{,} \\ &- \sin^2\psi'\operatorname{tang} p'\sin z''_{,} - \sin^2\xi''_{,}\operatorname{tang} r''_{,}\sin y' = \sin(\psi' - \xi''_{,})\cos y'\cos z''_{,}, \\ &(\sin\xi'_{,}\cos\xi'_{,} + \sin\xi''_{,}\cos\xi'_{,})\sin z'_{,}\cos z''_{,} \\ &+ \sin^2\xi'_{,}\operatorname{tang} r'_{,}\sin z''_{,} + \sin^2\xi''_{,}\operatorname{tang} r''_{,}\sin z'_{,} = \sin(\xi'_{,} + \xi''_{,})\cos z'_{,}\cos z''_{,}, \end{aligned}$$

ou, en écrivant un peu différemment,

$$\sin(\psi' - \xi'_,)[\sin y' \sin z'_, \cos(\psi' + \xi'_,) + \cos y' \cos z'_,]$$
$$= \sin^2\xi'_, \operatorname{tang} r'_, \sin y' + \sin^2\psi' \operatorname{tang} p' \sin z'_,,$$
$$\sin(\psi' - \xi''_,)[\sin y' \sin z''_, \cos(\psi' + \xi''_,) - \cos y' \cos z''_,]$$
$$= \sin^2\xi''_, \operatorname{tang} r''_, \sin y' + \sin^2\psi' \operatorname{tang} p' \sin z''_,,$$
$$-\sin(\xi'_, + \xi''_,)[\sin z'_, \sin z''_, \cos(\xi'_, - \xi''_,) - \cos z'_, \cos z''_,]$$
$$= \sin^2\xi'_, \operatorname{tang} r'_, \sin z''_, + \sin^2\xi''_, \operatorname{tang} r''_, \sin z'_,.$$

Je vais prouver la justesse de ces relations. Posons les valeurs

$$\operatorname{tang} r'_, = \frac{1}{o_,^2 O_,}, \quad \operatorname{tang} r''_, = \frac{1}{e_,^2 E_,}, \quad \operatorname{tang} p' = \frac{1}{o^2 O}.$$
$$\frac{1}{O_,} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin i_, \sin(u_, - u'_,),$$
$$\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos k_, \sin(\upsilon_, + \upsilon'_,),$$
$$\frac{1}{O} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin i \sin(u - u').$$

Posons de plus,

$$\frac{\sin^2\xi''_,}{e_,^2} = \frac{\sin^2\xi'_,}{o_,^2} = \frac{\sin^2\psi'}{o^2} = \sin^2\iota',$$

et enfin,

$$(17)\left\{\begin{aligned}
\frac{\sin^2\iota'}{\sin(\psi' - \xi'_,)} &= \frac{\sin(\psi' + \xi'_,)}{o^2 - o_,^2} = -\frac{\sin(\psi' + \xi'_,)}{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u - u') - \cos(u_, - u'_,)]},\\
\frac{\sin^2\iota'}{\sin(\psi' - \xi''_,)} &= \frac{\sin(\psi' + \xi''_,)}{o^2 - e_,^2} = -\frac{\sin(\psi' + \xi''_,)}{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u - u') - \cos(\upsilon_, + \upsilon'_,)]},\\
\frac{\sin^2\iota'}{\sin(\xi'_, + \xi''_,)} &= \frac{\sin(\xi'_, - \xi''_,)}{o_,^2 - e_,^2} = -\frac{\sin(\xi'_, - \xi''_,)}{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u_, - u'_,) - \cos(\upsilon_, + \upsilon'_,)]};
\end{aligned}\right.$$

au moyen de ces substitutions, les équations (16) se changent dans les suivantes :

$$(18)\left\{\begin{aligned}
&1.\quad \sin y' \sin z'_, \cos(\psi' + \xi'_,) - \cos y' \cos z'_,\\
&= -\left[\frac{\sin i' \sin y' \sin(u_, - u'_,) + \sin i \sin z'_, \sin(u - u')}{\cos(u - u_,) - \cos(u_, - u'_,)}\right] \sin(\psi' + \xi'_,),\\
&2.\quad \sin y' \sin z''_, \cos(\psi' + \xi''_,) - \cos y' \cos z''_,\\
&= -\left[\frac{\cos k' \sin y' \sin(\upsilon_, + \upsilon'_,) + \sin i \sin z''_, \sin(u - u')}{\cos(u - u_,) - \cos(\upsilon_, + \upsilon'_,)}\right] \sin(\psi' + \xi''_,),\\
&3.\quad \sin z'_, \sin z''_, \cos(\xi'_, - \xi''_,) - \cos z'_, \cos z''_,\\
&= -\left[\frac{\sin i' \sin z''_, \sin(u_, - u'_,) + \cos k' \sin z'_, \sin(\upsilon_, + \upsilon'_,)}{\cos(u_, - u'_,) - \cos(\upsilon_, + \upsilon'_,)}\right] \sin(\xi'_, - \xi''_,).
\end{aligned}\right.$$

La justesse de ces trois relations se voit par celles du § XVI, équations (f) et (h).

De la troisième, il résulte immédiatement qu'elle est pour les deux rayons réfléchis $R'_{\prime}$, $R''_{\prime}$, ce qu'est la relation (f), § XVI, pour les deux rayons réfractés D' et D''; seulement, dans ces deux cas, les arcs $(\xi'_{\prime} - \xi''_{\prime})$ de l'équation actuelle, et $(\varphi' - \varphi'')$ de l'équation (f), ont une position inverse; par conséquent on doit poser ici

$$(\xi'_{\prime} - \xi''_{\prime}) = - \sin\Delta.$$

La seconde relation (18) correspond pareillement à l'équation (f), § XVI; on s'en assure le plus facilement possible en construisant cette formule sur une surface sphérique comme on a fait § XVI; on voit alors que la formule (18, 2) est pour les rayons D' et $R''_{\prime}$, ce que la formule (f), § XVI, est pour les rayons D' et D'', et que par conséquent on doit remplacer dans celle-ci υ, υ', k, x'', par $\upsilon_{\prime}$, $\upsilon'_{\prime}$, k', $z''_{\prime}$ et $(\varphi' - \varphi'')$, c'est-à-dire l'angle que les deux normales D' et D'' font entre elles, par l'angle $\psi' + \xi''_{\prime}$, c'est-à-dire l'angle que les deux normales D' et $R''_{\prime}$ font entre elles. La première relation (18) correspond à celle en (h), § XVI. La relation (18, 1) est par rapport aux normales D' et $R'_{\prime}$ ce qu'est la relation (h), § XVI, par rapport aux normales D' et D'', dans laquelle υ, υ', k sont remplacés par les angles $u_{\prime}$, $u'_{\prime}$, i', et $(\varphi' - \varphi'')$ par $\psi' + \xi'_{\prime}$. Quant à l'angle x'' en (h), § XVI, on doit considérer que si l'on désigne par $z''_{\prime}$ l'angle qui lui correspond relativement à la normale $R'_{\prime}$, on a

$$z''_{\prime} + z'_{\prime} = 270^{\circ},$$

et que, par conséquent, x'' doit être remplacé par

$$z''_{\prime} = 270^{\circ} - z'_{\prime}.$$

Ces substitutions introduites en (h), § XVI, donnent la première des relations (17) de ce paragraphe.

L'équation du second degré (2) peut donc être remplacée par l'équation linéaire (15). Cette équation (15) et les équations (13) contiennent par conséquent la solution complète du problème de la réflexion et de la réfraction à l'intérieur d'un milieu cristallisé, quand le rayon incident est un rayon ordinaire.

Je vais maintenant montrer comment l'équation (3), à l'aide de l'équation (14), peut être pareillement remplacée par une équation linéaire. Le produit des deux dernières équations (14) donne

$$\begin{aligned} S''^2 \sin\iota'' \cos\iota'' = {} & D''^2 \sin\psi'' \cos\psi'' \cos^2 y'' - R'^2_{\prime\prime} \sin\xi'_{\prime} \cos\xi'_{\prime} \cos^2 z'_{\prime\prime} \\ & - R''^2_{\prime\prime} \sin\xi''_{\prime\prime} \cos\xi''_{\prime\prime} \cos^2 z''_{\prime\prime} - D'' R'_{\prime\prime} \sin(\psi'' - \xi'_{\prime\prime}) \cos y'' \cos z'_{\prime\prime} \\ & + D'' R''_{\prime\prime} \sin(\psi'' - \xi''_{\prime\prime}) \cos z''_{\prime\prime} + R'_{\prime\prime} R''_{\prime\prime} \sin(\xi'_{\prime\prime} + \xi''_{\prime\prime}) \cos z'_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime}. \end{aligned}$$

Ce produit, retranché de l'équation (3), nous donne

$$\begin{aligned} P''^2 \sin\iota'' \cos\iota'' = {} & D''^2 (\sin\psi'' \cos\psi'' \sin^2 y'' - \sin^2\psi'' \sin y'' \operatorname{tang} p'') \\ & - R'^2_{\prime\prime} (\sin\xi'_{\prime\prime} \cos\xi'_{\prime\prime} \sin^2 z'_{\prime\prime} + \sin^2\psi'_{\prime\prime} \sin z'_{\prime\prime} \operatorname{tang} r'_{\prime\prime}) \\ & - R''^2_{\prime\prime} (\sin\xi''_{\prime\prime} \cos\xi''_{\prime\prime} \sin^2 z'_{\prime\prime} + \sin^2\psi''_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \operatorname{tang} r''_{\prime\prime}) \\ & + D'' R'_{\prime\prime} \sin(\psi'' - \xi'_{\prime\prime}) \cos y'' \cos z'_{\prime\prime} - D'' R''_{\prime\prime} \sin(\psi'' - \xi''_{\prime\prime}) \cos y'' \cos z''_{\prime\prime} \\ & - R'_{\prime\prime} R''_{\prime\prime} \sin(\xi'_{\prime\prime} + \xi''_{\prime\prime}) \cos z'_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime}. \end{aligned}$$

Cette équation, divisée par la première des équations (14), donne enfin

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} P \sin \iota'' \cos \iota'' = D'' (\sin \psi'' \cos \psi'' \sin y'' &- \sin^2 \psi'' \operatorname{tang} p'') \\ - R'_{\prime\prime} (\sin \xi'_{\prime\prime} \cos \xi'_{\prime\prime} \sin z'_{\prime\prime} &+ \sin^2 \xi'_{\prime\prime} \operatorname{tang} r'_{\prime\prime}) \\ - R''_{\prime\prime} (\sin \xi''_{\prime\prime} \cos \xi''_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} &+ \sin^2 \xi''_{\prime\prime} \operatorname{tang} r''_{\prime\prime}), \end{aligned} \right.$$

car

$$\cos y'' \cos z'_{\prime\prime} - \sin y'' \sin z'_{\prime\prime} \cos (\psi'' + \xi'_{\prime\prime})$$
$$= - \frac{\sin^2 \psi'' \operatorname{tang} p'' \sin z'_{\prime\prime} + \sin^2 \xi'_{\prime\prime} \operatorname{tang} r'_{\prime\prime} \sin y''}{\sin (\psi'' - \xi'_{\prime\prime})},$$

$$\cos y'' \cos z''_{\prime\prime} + \sin y'' \sin z''_{\prime\prime} \cos (\psi'' + \xi''_{\prime\prime})$$
$$= \frac{\sin^2 \psi'' \operatorname{tang} p'' \sin z''_{\prime\prime} + \sin^2 \xi''_{\prime\prime} \operatorname{tang} r''_{\prime\prime} \sin y''}{\sin (\psi'' - \xi''_{\prime\prime})},$$

$$\cos z'_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime} - \sin z'_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \cos (\xi'_{\prime\prime} + \xi''_{\prime\prime})$$
$$= \frac{\sin^2 \xi'_{\prime\prime} \operatorname{tang} r'_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} + \sin^2 \xi''_{\prime\prime} \operatorname{tang} r''_{\prime\prime} \sin z'_{\prime\prime}}{\sin (\xi'_{\prime\prime} - \xi''_{\prime\prime})}.$$

Ces relations se changent, par les substitutions (17) et semblables, dans les suivantes :

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &1.\quad \cos y'' \cos z'_{\prime\prime} - \sin y'' \sin z'_{\prime\prime} \cos (\psi'' + \xi'_{\prime\prime}) \\ &= \frac{\cos k \sin z'_{\prime\prime} \sin (\upsilon + \upsilon') + \sin i'' \sin y'' \sin (u_{\prime\prime} - u'_{\prime\prime})}{\cos (\upsilon + \upsilon') - \cos (u_{\prime\prime} - u'_{\prime\prime})} \sin (\psi'' + \xi'_{\prime\prime}), \\ &2.\quad \cos y'' \cos z''_{\prime\prime} + \sin y'' \sin z''_{\prime\prime} \cos (\psi'' + \xi''_{\prime\prime}) \\ &= - \frac{\cos k \sin z''_{\prime\prime} \sin (\upsilon + \upsilon') + \cos k'' \sin y'' \sin (\upsilon_{\prime\prime} + \upsilon'_{\prime\prime})}{\cos (\upsilon + \upsilon') - \cos (\upsilon_{\prime\prime} + \upsilon'_{\prime\prime})} \sin (\psi'' + \xi''_{\prime\prime}), \\ &3.\quad \cos z'_{\prime\prime} \cos z''_{\prime\prime} - \sin z'_{\prime\prime} \sin z''_{\prime\prime} \cos (\xi'_{\prime\prime} - \xi''_{\prime\prime}) \\ &= - \frac{\sin i'' \sin z''_{\prime\prime} \sin (u_{\prime\prime} - u'_{\prime\prime}) + \cos k'' \sin z'_{\prime\prime} \sin (\upsilon_{\prime\prime} + \upsilon'_{\prime\prime})}{\cos (u_{\prime\prime} - u'_{\prime\prime}) - \cos (\upsilon_{\prime\prime} + \upsilon'_{\prime\prime})} \sin (\xi'_{\prime\prime} - \xi''_{\prime\prime}). \end{aligned} \right.$$

L'exactitude de ces formules se déduirait, pour la première et la troisième, de l'équation (f), § XVI, et pour la seconde, de l'équation (i) du même paragraphe. Si l'on substitue, en effet, dans l'équation (f), à u, u', x', $(\varphi' - \varphi'')$ les angles $u_{\prime\prime}$, $u'_{\prime\prime}$, $z'_{\prime\prime}$, $-(\psi'' + \xi'_{\prime\prime})$, on obtient la première des relations (20), et si aux angles υ, υ', x'', $(\varphi' - \varphi'')$, on substitue les angles $\upsilon_{\prime\prime}$, $\upsilon'_{\prime\prime}$, $y''_{\prime\prime}$, $-(\xi'_{\prime\prime} - \xi''_{\prime\prime})$, on obtient la troisième. On peut d'ailleurs s'assurer facilement de l'exactitude de ces substitutions. La seconde relation (20) se tire de l'équation (i), § XVI, par la substitution des angles $\upsilon_{\prime\prime}$, $\upsilon'_{\prime\prime}$, $-(\psi'' + \xi''_{\prime\prime})$ aux angles u, u', $(\varphi' - \varphi'')$, et par la substitution de $270 - y''_{\prime\prime}$ à x'.

On peut donc remplacer l'équation de la conservation des forces vives (3) par l'équation (19).

§ XXIV.

Les équations complètes de la réflexion et de la réfraction dans l'intérieur d'un milieu cristallisé sont donc les suivantes :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
P' \sin \iota' \cos \iota' & = - D'(\sin\psi' \cos\psi' \sin y' - \sin^2\psi' \operatorname{tang} p') & \\
 & \qquad - R'_{,}(\sin\xi'_{,} \cos\xi'_{,} \sin z'_{,} + \sin^2\xi'_{,} \operatorname{tang} r'_{,}) & \\
 & \qquad - R''_{,}(\sin\xi''_{,} \cos\xi''_{,} \sin z''_{,} + \sin^2\xi''_{,} \operatorname{tang} r''_{,}), & \\
P' & = D' \sin y' \qquad + R'_{,} \sin z'_{,} & + R''_{,} \sin z''_{,}, \\
S' \sin \iota' & = - D' \cos y' \sin \psi' \qquad + R'_{,} \cos z'_{,} \sin \xi'_{,} & - R''_{,} \cos z''_{,} \sin \xi''_{,}, \\
S' \cos \iota' & = - D' \cos y' \cos \psi' \qquad - R'_{,} \cos z'_{,} \cos \xi'_{,} & + R''_{,} \cos z''_{,} \cos \xi''_{,};
\end{array}
\right.
$$

et

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
P'' \sin \iota'' \cos \iota'' & = D''(\sin\psi'' \cos\psi'' \sin y'' - \sin^2\psi'' \operatorname{tang} p'') & \\
 & \qquad - R'_{,,}(\sin\xi'_{,} \cos\xi'_{,,} \sin z'_{,,} + \sin^2\xi'_{,,} \operatorname{tang} r'_{,,}) & \\
 & \qquad - R''_{,,}(\sin\xi''_{,,} \cos\xi''_{,,} \sin^2 z''_{,,} + \sin^2\xi''_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,}), & \\
P'' & = D'' \sin y'' \qquad + R'_{,,} \sin z'_{,,} & + R''_{,,} \sin z''_{,,}, \\
S'' \sin \iota'' & = D'' \cos y'' \sin \psi'' \qquad + R'_{,,} \cos z'_{,,} \sin \xi'_{,,} & - R''_{,,} \cos z''_{,,} \sin \xi''_{,,}, \\
S'' \cos \iota'' & = D'' \cos y'' \cos \psi'' \qquad - R'_{,,} \cos z'_{,,} \cos \xi'_{,,} & + R''_{,,} \cos z''_{,,} \cos \xi''_{,,}.
\end{array}
\right.
$$

On en déduit

$$
(3)\quad \left\{
\begin{array}{l}
R'_{,} = - D' \left\{ \dfrac{\begin{array}{l}\sin(\iota' - \psi')\sin(\iota' + \xi''_{,})[\cos(\iota' + \psi')\sin y' \cos z''_{,} + \cos(\iota' - \xi''_{,})\cos y' \sin z''_{,}] \\ \qquad + \sin^2\psi' \sin(\iota' + \xi''_{,}) \operatorname{tang} p' \cos z''_{,} + \sin^2\xi''_{,} \sin(\iota' - \psi') \operatorname{tang} r''_{,} \cos y'\end{array}}{\begin{array}{l}\sin(\iota' + \xi''_{,})\sin(\iota' + \xi'_{,})[\cos(\iota' - \xi'_{,})\sin z'_{,} \cos z''_{,} + \cos(\iota' - \xi''_{,})\sin z''_{,} \cos z'_{,}] \\ \qquad + \sin^2\xi'_{,} \sin(i' + \xi''_{,}) \operatorname{tang} r'_{,} \cos z''_{,} + \sin^2\xi''_{,} \sin(\iota' + \xi'_{,}) \operatorname{tang} r''_{,} \cos z'_{,}\end{array}} \right\}, \\[2ex]
R''_{,} = - D' \left\{ \dfrac{\begin{array}{l}\sin(\iota' - \psi')\sin(\iota' + \xi'_{,})[\cos(\iota' + \psi')\sin y' \cos z'_{,} - \cos(\iota' - \xi'_{,})\sin z'_{,} \cos y'] \\ \qquad + \sin^2\psi' \sin(\iota' + \xi'_{,}) \operatorname{tang} p' \cos z'_{,} - \sin^2\xi'_{,} \sin(\iota' - \psi') \operatorname{tang} r'_{,} \cos y'\end{array}}{\begin{array}{l}\sin(\iota' + \xi''_{,})\sin(\iota' + \xi'_{,})[\cos(i' - \xi'_{,})\sin z'_{,} \cos z''_{,} + \cos(\iota' - \xi''_{,})\sin z''_{,} \cos z'_{,}] \\ \qquad + \sin^2\xi'_{,} \sin(\iota' + \xi''_{,}) \operatorname{tang} r'_{,} \cos z''_{,} + \sin^2\xi''_{,} \sin(\iota' + \xi'_{,}) \operatorname{tang} r''_{,} \cos z'_{,}\end{array}} \right\};
\end{array}
\right.
$$

$$
(4)\quad \left\{
\begin{array}{l}
R'_{,,} = - D'' \left\{ \dfrac{\begin{array}{l}\sin(\iota'' - \psi'')\sin(\iota'' + \xi''_{,,})[\cos(\iota'' + \psi'')\sin \gamma'' \cos z''_{,,} - \cos(\imath'' - \xi''_{,,})\sin z''_{,,} \cos y''] \\ \qquad + \sin^2\psi'' \sin(\iota'' + \xi'') \operatorname{tang} p'' \cos z''_{,,} - \sin^2\xi''_{,,} \sin(\iota'' - \psi'') \operatorname{tang} r''_{,,} \cos y''\end{array}}{\begin{array}{l}\sin(\iota'' + \xi'_{,,})\sin(\iota'' + \xi''_{,,})[\cos(\iota'' - \xi'_{,,})\sin z'_{,,} \cos z''_{,,} + \cos(\iota'' - \xi''_{,,})\sin z''_{,,} \cos z'_{,,}] \\ \qquad + \sin^2\xi'_{,,} \sin(\iota'' + \xi''_{,,}) \operatorname{tang} r'_{,,} \cos z''_{,,} + \sin^2\xi''_{,,} \sin(\iota'' + \xi'_{,,}) \cos z'_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,}\end{array}} \right\}, \\[2ex]
R''_{,,} = + D'' \left\{ \dfrac{\begin{array}{l}\sin(\iota'' - \psi'')\sin(\iota'' + \xi'_{,,})[\cos(\iota'' - \psi'')\sin y'' \cos z'_{,,} + \cos(\iota'' - \xi'_{,,})\sin z'_{,,} \cos y''] \\ \qquad + \sin^2\psi'' \sin(\iota'' + \xi''_{,,}) \operatorname{tang} p'' \cos z'_{,,} + \sin^2\xi'_{,,} \sin(\iota'' - \psi'') \operatorname{tang} r'_{,,} \cos y''\end{array}}{\begin{array}{l}\sin(\iota'' + \xi'_{,,})\sin(\iota'' + \xi''_{,,})[\cos(\iota'' - \xi'_{,,})\sin z'_{,,} \cos z''_{,,} + \cos(\iota'' - \xi'_{,,})\sin z''_{,,} \cos z'_{,,}] \\ \qquad + \sin^2\xi'_{,,} \sin(\iota'' + \xi''_{,,}) \operatorname{tang} r'_{,,} \cos z''_{,,} + \sin^2\xi''_{,,} \sin(\iota'' + \xi'_{,,}) \cos z'_{,,} \operatorname{tang} r''_{,,}\end{array}} \right\}.
\end{array}
\right.
$$

On obtient les valeurs de première approximation en négligeant complétement la différence des axes d'élasticité, et en posant, en conséquence,

$$\xi'_{\prime} = \xi''_{\prime},$$

et

$$\cos z''_{\prime} = -\sin z'_{\prime}, \quad \sin z''_{\prime} = -\cos z'_{\prime};$$

de plus

$$\xi'_{\prime\prime} = \xi''_{\prime\prime},$$

et

$$\cos z''_{\prime\prime} = -\sin z'_{\prime\prime}, \quad \sin z''_{\prime\prime} = -\cos z'_{\prime\prime}.$$

On obtient alors

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} R'_{\prime} &= -D' \frac{\sin(\iota' - \psi')}{\sin(\iota' + \xi'_{\prime})} \left[\frac{\cos(\iota' + \psi')}{\cos(\iota' - \xi'_{\prime})} \sin y' \sin z'_{\prime} + \cos y' \cos z'_{\prime}\right], \\ R''_{\prime} &= +D' \frac{\sin(\iota' - \psi')}{\sin(\iota' + \xi'_{\prime})} \left[\frac{\cos(\iota' + \psi')}{\cos(\iota' - \xi'_{\prime})} \sin y' \cos z'_{\prime} - \cos y' \sin z'_{\prime}\right]; \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} R'_{\prime\prime} &= +D'' \frac{\sin(\iota'' - \psi'')}{\sin(\iota'' + \xi''_{\prime\prime})} \left[\frac{\cos(\iota'' + \psi'')}{\cos(\iota'' - \xi''_{\prime\prime})} \sin y'' \cos z''_{\prime\prime} - \cos y'' \sin z''_{\prime\prime}\right], \\ R''_{\prime\prime} &= -D'' \frac{\sin(\iota'' - \psi'')}{\sin(\iota'' + \xi''_{\prime\prime})} \left[\frac{\cos(\iota'' + \psi'')}{\cos(\iota'' - \xi''_{\prime\prime})} \sin y'' \sin z''_{\prime\prime} + \cos y'' \cos z''_{\prime\prime}\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie la première des équations (1) par $\sin y'$ et la seconde par

$$\sin\psi' \cos\psi' \sin y' - \sin^2\psi' \operatorname{tang} p',$$

et si l'on ajoute les deux équations, on obtient, en ayant égard aux relations (16), § XXIII, P′ sous une forme qui convient aux calculs approximatifs de sa valeur. On obtient aussi d'une manière analogue S′, P″ et S″.

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} P' &= \left\{\frac{D'(2\sin\psi'\cos\psi'\sin y' - \sin^2\psi' \operatorname{tang} p')\sin y' - [R'_{\prime}\cos z'_{\prime}\sin(\psi' - \xi'_{\prime}) - R''_{\prime}\cos z''_{\prime}\sin(\psi' - \xi''_{\prime}]\cos y'}{\sin(\iota' + \psi')\cos(\iota' - \psi')\sin y' - \sin^2\psi' \operatorname{tang} p'}\right\}, \\ S' &= -\left[\frac{2D'\sin\psi'\cos\psi'\cos y' + R'_{\prime}\cos z'_{\prime}\sin(\psi' - \xi'_{\prime}) - R''_{\prime}\cos z''_{\prime}\sin(\psi' - \xi''_{\prime})}{\sin(\iota' + \psi')}\right]; \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} P'' &= \left\{\frac{D''(2\sin\psi''\cos\psi''\sin y'' - \sin^2\psi'' \operatorname{tang} p'')\sin y'' - [R'_{\prime\prime}\cos z'_{\prime\prime}\sin(\psi'' - \xi'_{\prime\prime}) - R''_{\prime\prime}\cos z''_{\prime\prime}\sin(\psi'' - \xi''_{\prime\prime})]\cos y''}{\sin(\iota'' + \psi'')\cos(\iota'' - \psi'')\sin y'' - \sin^2\psi'' \operatorname{tang} p''}\right\}, \\ S'' &= \left[\frac{2D''\sin\psi''\cos\psi''\cos y'' - R'_{\prime\prime}\cos z'_{\prime\prime}\sin(\psi'' - \xi'_{\prime\prime}) + R''_{\prime\prime}\cos z''_{\prime\prime}\sin(\psi'' - \xi''_{\prime\prime})}{\sin(\iota'' + \psi'')}\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on ne veut conserver dans ces valeurs que la première puissance de la différence des axes d'élasticité, on devra mettre pour $R'_{\prime}$, $R''_{\prime}$, $R'_{\prime\prime}$, $R''_{\prime\prime}$ leurs valeurs approchées déduites des équations (5) et (6).

Les formules de (3) à (8) deviennent imaginaires quand les angles d'incidence sont compris dans les limites de la réflexion totale. On peut, dans ce cas, déterminer les intensités réfléchies, comme on l'a fait dans le cas des cristaux à un seul axe.

J'appliquerai encore les formules (7) et (8) au cas du passage de la lumière à travers un milieu compris entre deux plans parallèles; car ces formules sont importantes pour la théorie des couleurs que présentent les lames minces dans la lumière polarisée. Alors D' et D'' sont deux rayons conjugués qui sont dérivés d'un même rayon incident, et leurs valeurs sont données par les formules (2), § XVII. Alors aussi

$$\begin{gathered}\iota' = \iota'', \quad \psi' = \varphi', \quad \psi'' = \varphi'', \quad y' = x', \\ y'' = x'', \quad p' = q', \quad p'' = q'', \quad \xi'_{,} = \xi'_{,,}, \\ \xi''_{,} = \xi''_{,,}, \quad z'_{,} = z'_{,,}, \quad z''_{,} = z''_{,,};\end{gathered}$$

je désignerai les angles $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, $z'_{,}$, $z''_{,}$ par ξ', ξ'', z', z''.

Ces substitutions faites, on obtient.

$$(9)\left\{\begin{aligned} P' &= \left\{\frac{D'(2\sin\varphi'\cos\varphi'\sin x' - \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q')\sin x' - [R'_{,}\cos z'_{,}\sin(\varphi'-\xi'_{,}) - R''_{,}\cos z''_{,}\sin(\varphi'-\xi''_{,})]\cos x'}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\sin x' - \sin^2\varphi'\operatorname{tang} q'}\right\}, \\ S' &= -\left[\frac{2D'\sin\varphi'\cos\varphi'\cos x' + R'_{,}\cos z'_{,}\sin(\varphi'-\xi'_{,}) - R''_{,}\cos z''_{,}\sin(\varphi'-\xi''_{,})}{\sin(\varphi+\varphi')}\right];\end{aligned}\right.$$

$$(10)\left\{\begin{aligned} P'' &= \left\{\frac{D''(2\sin\varphi''\cos\varphi\sin x'' - \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q'') - [R'_{,,}\cos z'_{,}\sin(\varphi''-\xi''_{,}) + R''_{,,}\cos z''_{,}\sin(\varphi''-\xi''_{,})]\cos x''}{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'')\sin x'' - \sin^2\varphi''\operatorname{tang} q''}\right\}, \\ S'' &= \left[\frac{2D''\sin\varphi''\cos\varphi''\cos x'' - R'_{,,}\cos z'_{,}\sin(\varphi''-\xi'_{,}) + R''_{,,}\cos z''_{,}\sin(\varphi''-\xi''_{,})}{\sin(\varphi+\varphi'')}\right],\end{aligned}\right.$$

où pour D' et D'' on doit mettre les valeurs tirées de l'équation (2), § XVII.

Si l'on veut seulement avoir égard à la première puissance de $\pi^2 - \mu^2$ dans les équations (9) et (10), on doit poser

$$(11)\left\{\begin{aligned} R'_{,} &= -D'\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\xi')}\left[\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\xi')}\sin x'\sin z' + \cos x'\cos z'\right], \\ R''_{,} &= +D'\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\xi')}\left[\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\xi')}\sin x'\cos z' - \cos x'\sin z'\right];\end{aligned}\right.$$

$$(12)\left\{\begin{aligned} R'_{,,} &= +D''\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\xi')}\left[\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\xi')}\cos x'\sin z' - \sin x'\cos z'\right], \\ R'_{,,} &= -D''\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\xi')}\left[\frac{\cos(\varphi+\varphi')}{\cos(\varphi-\xi')}\cos x'\cos z' + \sin x'\sin z'\right].\end{aligned}\right.$$

Mais, en négligeant, dans les équations (9) et (10), tout ce qui dépend de la différence des axes d'élasticité, on conserve seulement le terme qui dépend de leur position, on obtient, en remplaçant D′ et D″ par leurs valeurs,

$$
\begin{aligned}
P' &= \frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\left[\frac{P\sin x'}{\cos(\varphi-\varphi')} - S\cos x'\right]\sin x',\\
S' &= -\frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\left[\frac{P\sin x'}{\cos(\varphi-\varphi')} - S\cos x'\right]\cos x',\\
P'' &= +\frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\left[\frac{P\cos x'}{\cos(\varphi-\varphi')} + S\sin x'\right]\cos x',\\
S'' &= +\frac{\sin 2\varphi \sin 2\varphi'}{\sin^2(\varphi+\varphi')}\left[\frac{P\cos x'}{\cos(\varphi-\varphi')} + S\sin x'\right]\sin x'.
\end{aligned}
$$

Ce sont les mêmes formules approchées que j'ai déduites de considérations directes dans un Mémoire sur les couleurs des cristaux à deux axes dans la lumière polarisée (*Pogg. Ann. de Ph., Bd.* XXXIII, page 271).