

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STURM

Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. Sylvester

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 7 (1842), p. 356-368.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__356_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

~~~~~

*Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. SYLVESTER ;*

**PAR M. STURM.**

-----

I.

M. Sylvester a donné sans démonstration, dans le numéro de décembre 1839 du *Philosophical Magazine*, le théorème suivant :

Soit  $V = 0$  une équation quelconque du degré  $m$  à une inconnue  $x$  dont les racines supposées inégales soient désignées par  $a, b, c, d, \dots, h$ ; d'où résulte

$$V = (x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - h).$$

Soit  $V_1$  la fonction dérivée de  $V$ . Concevons qu'on cherche par le procédé ordinaire le plus grand commun diviseur de  $V$  et  $V_1$ , en ayant soin, dans les divisions successives, de n'introduire et de ne supprimer aucun facteur indépendant de  $x$ , et en changeant toujours les signes des restes avant de les prendre pour diviseurs. Désignons par  $V_2, V_3, \dots, V_m$  ces restes pris ainsi avec des signes contraires, dont les degrés par rapport à  $x$  sont respectivement  $m - 2, m - 3, \dots$ , jusqu'à 0. Les polynômes  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$  s'exprimeront en fonction de  $x$  et des racines  $a, b, c, \dots$  de l'équation  $V = 0$  de la manière suivante :

La dérivée  $V_1$  est, comme on sait, la somme des produits  $m - 1$  à  $m - 1$  des facteurs  $x - a, x - b, \dots, x - h$ , ce que nous écrirons ainsi

$$V_1 = \sum (x - b)(x - c) \dots (x - h).$$

Pour former  $V_2$ , on multipliera chacun des produits  $m - 2$  à  $m - 2$  des facteurs  $x - a, x - b, x - c, \dots, x - h$  par le carré de la différence des deux racines qui n'entrent pas dans le produit que l'on considère; la somme des résultats, divisée par  $m^2$  donnera  $V_2$ , c'est-à-dire qu'on a

$$V_2 = \frac{1}{m^2} \sum (a - b)^2 (x - c)(x - d) \dots (x - h).$$

On a de même

[illegible]

en désignant par  $\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4}, \dots, \frac{1}{\lambda_m}$  certaines quantités indépendantes de  $x$  et fonctions symétriques des racines  $a, b, c, \dots$  de l'équation  $V = 0$ . Ces quantités sont toutes positives, quand l'équation  $V = 0$  a tous ses coefficients réels [\*].

## II.

Soient  $q_1, q_2, q_3$ , etc. les quotients que fournit le calcul du plus grand commun diviseur de  $V$  et  $V_1$ ; ils sont du premier degré par rapport à  $x$ , et l'on a les équations

$$V = V_1 q_1 - V_2, \quad V_1 = V_2 q_2 - V_3, \quad V_2 = V_3 q_3 - V_4, \text{ etc.}$$

## La première donne

$$V_2 = V_1 q_1 - V.$$

En mettant cette expression de  $V_2$  dans la seconde, on en tire

$$V_3 = V_1 (q_1 q_2 - I) - V q_2.$$

En substituant dans la troisième ces valeurs de  $V_2$  et  $V_3$ , on trouve

$$V_4 = V_1 [(q_1 q_2 - 1) q_3 - q_1] - V(q_2 q_3 - 1).$$

En continuant ainsi, on voit que chacun des polynômes  $V_2, V_3, V_4$ , etc. est de la forme  $V_1N - VP$ ,  $N$  et  $P$  étant deux polynômes dont les degrés diffèrent d'une unité. On voit d'ailleurs que  $N$  et  $P$  sont toujours les deux termes de l'une *des réduites* qui proviennent de la fraction

continue  $q_1 = \frac{1}{q_2 = \frac{1}{q_3 = \text{etc.}}}$  égale à  $\frac{V}{V_1}$ .

[\*] M. Sylvester n'a pas donné explicitement, dans le Journal cité, les expressions de ces facteurs  $\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4}, \dots$  en fonction des racines  $a, b, c, \dots$  On les trouvera plus loin, au § V.

Ainsi, pour  $V_k$  qui est du degré  $m - k$ , on a

$$(2) \quad V_k = V_1 N - VP.$$

$N$  est le numérateur et  $P$  le dénominateur de la réduite équivalente à

$$q_1 = \frac{1}{q_2 - \dots - \frac{1}{q_{k-1}}}; \quad N \text{ est du degré } k - 1 \text{ et } P \text{ du degré } k - 2.$$

L'équation (2) fait voir qu'étant donnés les deux polynômes  $V$  et  $V_1$  des degrés  $m$  et  $m - 1$ , on pourra toujours trouver trois autres polynômes  $T$ ,  $Y$  et  $Z$  des degrés  $m - k$ ,  $k - 1$  et  $k - 2$  respectivement, tels qu'on ait

$$(3) \quad T = V_1 Y - VZ.$$

D'après l'équation (2), il suffira, en effet, de prendre

$$T = \lambda V_k, \quad Y = \lambda N, \quad Z = \lambda P,$$

$\lambda$  étant une quantité arbitraire indépendante de  $x$ .

Je dis en outre qu'il n'y a pas d'autre manière de satisfaire à cette équation (3), en supposant toujours que  $T$ ,  $Y$  et  $Z$  soient des degrés  $m - k$ ,  $k - 1$  et  $k - 2$ . En effet, en éliminant  $V_1$  entre les équations (2) et (3), on trouve

$$NT - V_k Y = V(PY - NZ),$$

d'où il résulte que les deux expressions  $NT - V_k Y$  et  $PY - NZ$  doivent être nulles identiquement. Car autrement, d'après les degrés de nos polynômes, le premier membre de cette équation serait du degré  $m - 1$  au plus, tandis que le second serait au moins du degré  $m$ , ce qui est absurde. On a donc à la fois

$$NT - V_k Y = 0, \quad PY - NZ = 0,$$

d'où

$$\frac{T}{V_k} = \frac{Y}{N} = \frac{Z}{P} = \lambda,$$

$\lambda$  étant une quantité indépendante de  $x$  (puisque  $T$  et  $V_k$  sont du même degré  $m - k$ ).

Si l'on prend pour  $Y$  et  $Z$  des polynômes à coefficients indéterminés,  $Y$ , étant du degré  $k - 1$ , renfermera  $k$  de ces coefficients;  $Z$  en contiendra  $k - 1$ ; leur nombre total est  $2k - 1$ . L'expression  $V_1 Y - VZ$  est en général du degré  $m + k - 2$ ; mais on peut la réduire à un degré moindre

en égalant à zéro quelques-uns des coefficients des plus hautes puissances de  $x$ . Si l'on veut réduire  $V_1 Y - VZ$  à un polynôme  $T$  du degré  $m - k$ , il faudra égaler à zéro les coefficients de toutes les puissances de  $x$ , depuis la plus haute  $x^{m+k-2}$  jusqu'à  $x^{m-k+1}$  inclusivement; on aura ainsi  $2k - 2$  équations de condition linéaires entre les  $2k - 1$  coefficients des polynômes  $Y$  et  $Z$ , lesquelles détermineront les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux, qui restera seul arbitraire, et se trouvera comme facteur commun dans les valeurs de  $Y, Z$  et  $T$ . Ces équations linéaires ne peuvent être ni incompatibles ni indéterminées, puisqu'on a vu que l'équation (3) a pour solution unique

$$Y = \lambda N, \quad Z = \lambda P, \quad T = \lambda V_k,$$

$\lambda$  étant indépendant de  $x$ , et les polynômes  $N, P, V_k$  étant complètement déterminés.

On voit bien par là que le degré de  $V_1 Y - VZ$  ne peut pas, en général, devenir moindre que  $m - k$ , en prenant toujours des polynômes  $Y$  et  $Z$  des degrés  $k - 1$  et  $k - 2$ ; mais on pourra d'une infinité de manières réduire  $V_1 Y - VZ$  à un degré plus petit que  $m + k - 2$  et plus grand que  $m - k$ .

Pour avoir  $V_1 Y - VZ =$  une constante  $C$ , il faudra nécessairement prendre pour  $Y$  et  $Z$  le numérateur et le dénominateur de l'avant-dernière réduite provenant de  $q_1 - \frac{1}{q_2 - \text{etc.}}$ , multipliés par  $\frac{C}{V_m}$ ;  $Y$  est alors du degré  $m - 1$  et  $Z$  du degré  $m - 2$ . Cela résulte de la formule  $V_m = V_1 N - VP$ , ou bien encore de ce que les termes de deux réduites consécutives  $\frac{N}{P}, \frac{N'}{P'}$ , sont toujours liés par la relation  $NP' - PN' = +1$ , et que les deux termes de la dernière réduite sont égaux à  $\frac{V}{V_m}$  et  $\frac{V_1}{V_m}$  identiquement.

Ce qu'on vient d'établir ne suppose point que  $V_1$  soit la fonction dérivée de  $V$ . Il suffit que  $V_1$  soit du degré  $m - 1$ ,  $V$  étant du degré  $m$ , et que  $V$  et  $V_1$  n'aient pas de diviseur commun.

On voit aussi comment il faudrait modifier ce qui précède, si  $V$  et  $V_1$  représentaient deux polynômes quelconques.

### III.

Il s'agit maintenant d'exprimer les restes  $V_2, V_3$ , etc. en fonction de  $x$  et des racines  $a, b, c, \dots, h$  de l'équation  $V = 0$ .

Pour fixer les idées, considérons  $V_4$ , qui est du degré  $m-4$  par rapport à  $x$ . La méthode serait la même pour toute autre fonction  $V_k$ .

Multiplions la fonction  $V_4$ , dérivée de  $V$ , par le polynôme suivant :

$$(4) \quad (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-a)(x-b)(x-c) + \dots + (b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-b)(x-c)(x-d) + \text{etc.},$$

que nous désignerons par  $Y$  et qui est une fonction symétrique des racines de  $V=0$ , du troisième degré par rapport à  $x$ .

Le produit  $V_4 Y$  sera du degré  $m+2$ . Si l'on divise ce produit par  $V$ , qui est du degré  $m$ , on aura un quotient  $Z$  du deuxième degré, et un reste  $T$  qu'on pourra présenter sous une forme particulière et qui ne différera de  $V_4$  que par un facteur indépendant de  $x$ , comme nous allons le montrer.

La division indiquée donne

$$(5) \quad \frac{V_4 Y}{V} = Z + \frac{T}{V}.$$

La fraction rationnelle  $\frac{T}{V}$  peut se décomposer en fractions simples ayant pour dénominateurs les facteurs du premier degré  $x-a, x-b, \dots, x-h$  du polynôme  $V$ . D'après la règle connue pour la formation des fractions partielles, celle qui a pour dénominateur  $x-a$  doit avoir pour numérateur ce que devient pour  $x=a$  le quotient de  $V_4 Y$  divisé par la dérivée de  $V$  qui est  $V_1$ , c'est-à-dire la valeur même de  $Y$  pour  $x=a$ , qu'on peut désigner par  $Y(a)$ . On aura donc

$$\frac{T}{V} = \frac{Y(a)}{x-a} + \frac{Y(b)}{x-b} + \dots + \frac{Y(h)}{x-h} = \sum \frac{Y(a)}{x-a},$$

ou, d'après l'expression (4) de  $Y$ ,

$$\frac{T}{V} = \sum \frac{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(a-b)(a-c)(a-d) + (b-c)^2(b-e)^2(c-e)^2(a-b)(a-c)(a-e) + \text{etc.}}{x-a}.$$

Or cette valeur de  $\frac{T}{V}$  n'est autre chose que la somme des fractions partielles qu'on trouve en décomposant la fraction rationnelle suivante

$$\frac{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-e)(x-f) \dots (x-h) + \text{etc.}}{(x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-h)},$$

dont le dénominateur est égal à  $V$  [\*].

En conséquence,  $T$  est égal au numérateur de cette fraction, lequel est du degré  $m-4$  par rapport à  $x$ .

---

[\*] Il faut observer dans cette décomposition que  $V_1(a) = (a-b)(a-c) \dots (a-h)$ .

D'ailleurs l'équation (5) donne  $T = V_1 Y - VZ$ ; et comme  $T$ ,  $Y$  et  $Z$  sont respectivement des degrés  $m-4$ ,  $3$  et  $2$ , il faut, d'après ce qu'on a vu précédemment au § II, qu'on ait  $T = \lambda V_4$ ,  $\lambda$  étant un facteur indépendant de  $x$ . On a donc

$$V_4 = \frac{1}{\lambda} \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 (x-e)(x-f) \dots (x-h),$$

conformément au théorème de M. Sylvester.

On a en même temps,  $Y$  désignant toujours le polynôme (4),  $Y = \lambda N$ ,  $Z = \lambda P$ , en supposant  $\frac{N}{P} = q_1 - \frac{1}{q_2 - \frac{1}{q_3}}$ .

On trouverait de même les expressions de  $V_2$ ,  $V_3, \dots$  en prenant successivement

$$\begin{aligned} Y &= (x-a) + (x-b) + \dots + (x-h) \quad (\text{d'où } Z = m^2, \lambda = m^2 \text{ et } Y = \lambda q_1 = m^2 q_1), \\ Y &= (a-b)^2 (x-a)(x-b) + (a-c)^2 (x-a)(x-c) + \text{etc.}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

#### IV.

M. Liouville m'a fait voir que les résultats précédents se déduisent aussi d'une formule que M. Cauchy a donnée dans son *Cours d'Analyse algébrique*, note 5, page 528, et par laquelle on détermine une fraction rationnelle, dont on connaît un certain nombre de valeurs particulières.

Supposons qu'on cherche l'expression de  $V_4$ . Comme on l'a expliqué au § II, on aura

$$V_4 = \frac{1}{\lambda} T,$$

si l'on trouve un polynôme  $T$  du degré  $m-4$  et deux autres  $Y$  et  $Z$  du troisième et du deuxième degré qui satisfassent à l'équation

$$T = V_1 Y - VZ.$$

Il faut et il suffit évidemment que  $V_1 Y - T$  soit divisible par  $V$ , ou, ce qui revient au même, s'annule pour les  $m$  valeurs  $a, b, c, \dots, h$  attribuées à  $x$ . Donc, pour chacune de ces valeurs, la fraction  $\frac{T}{Y}$  doit être égale à  $V_1$ , de sorte que, pour  $x = a$ , par exemple, on aura

$$\frac{T}{Y} = V_1(a) = (a-b)(a-c) \dots (a-h).$$

On connaît ainsi  $m$  valeurs particulières de la fraction  $\frac{T}{Y}$ , ce qui la détermine complètement, puisque, d'après les degrés des polynômes  $T$  et  $Y$ , les coefficients indéterminés qui doivent entrer dans  $\frac{T}{Y}$  sont au nombre de  $m + 1$ , et que l'un d'eux peut être remplacé par l'unité. En introduisant ces  $m$  valeurs de  $\frac{T}{Y}$  pour  $x = a$ ,  $x = b$ , etc., dans la formule mentionnée de M. Cauchy, on retrouve précisément les expressions de  $T$  et de  $Y$  données plus haut, et par suite celle de  $V_4$ .

V.

Posons, pour abréger,

$$T_2 = \sum (a-b)^2 (x-c)(x-d)\dots(x-h),$$

$$T_3 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 (x-d)(x-e)\dots(x-h),$$

$$T_4 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 (a-d)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 (x-e)\dots(x-h),$$

etc.

Nous avons trouvé

$$V_2 = \frac{1}{m^2} T_2, \quad V_3 = \frac{1}{\lambda_3} T_3, \quad V_4 = \frac{1}{\lambda_4} T_4, \dots, \quad V_k = \frac{1}{\lambda_k} T_k, \text{ etc. },$$

les quantités  $\frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4}, \dots$  devant être indépendantes de  $x$ , mais fonctions symétriques des racines  $a, b, c, \dots$  de l'équation  $V = 0$  (car elles dépendent des coefficients de cette équation). Il nous reste à déterminer ces facteurs  $\frac{1}{\lambda_k}$ .

On a vu, au § III, qu'au polynôme  $T$  du degré  $m - 4$  qui est maintenant représenté par  $T_4$ , correspondaient deux autres polynômes  $Y$  et  $Z$  des degrés 3 et 2 liés avec  $T$  par la relation  $T = V_4 Y - VZ$ .

De même, à tout autre polynôme  $T_k$  du degré  $m - k$  correspondent deux polynômes des degrés  $k - 1$  et  $k - 2$  que nous désignerons par  $Y_k$  et  $Z_k$ , et tels qu'on a

$$T_k = V_4 Y_k - VZ_k.$$

Les polynômes  $Y$  sont ainsi exprimés :

$$Y_2 = x - a + x - b + \dots + x - h = \sum (x - a),$$

$$Y_3 = \sum (a - b)^2 (x - a)(x - b),$$

$$Y_4 = \sum (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2 (x - a)(x - b)(x - c),$$

$$Y_5 = \sum (a - b)^2 (a - c)^2 (a - d)^2 (b - c)^2 (b - d)^2 (c - d)^2 (x - a)(x - b)(x - c)(x - d),$$

etc.

Je désigne encore par  $p_2, p_3, p_4$ , etc. le coefficient de la plus haute puissance de  $x$  dans  $T_2, T_3, T_4, \dots$  respectivement, de sorte que

$$p_2 = (a - b)^2 + (a - c)^2 + \dots + (g - h)^2 = \sum (a - b)^2,$$

$$p_3 = \sum (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2,$$

$$p_4 = \sum (a - b)^2 (a - c)^2 (a - d)^2 (b - c)^2 (b - d)^2 (c - d)^2,$$

etc.

On voit qu'en général,  $p_k$ , qui est le coefficient de la plus haute puissance de  $x$  dans  $T_k$ , est aussi le coefficient de la plus haute puissance de  $x$  dans  $Y_{k+1}$ .

Cela posé, on a les deux équations

$$(6) \quad \begin{cases} T_k = V_k Y_k - V Z_k, \\ T_{k+1} = V_k Y_{k+1} - V Z_{k+1}, \end{cases}$$

qui donnent, par l'élimination de  $V_k$ ,

$$T_k Y_{k+1} - T_{k+1} Y_k = V (Y_k Z_{k+1} - Y_{k+1} Z_k).$$

Mais, en désignant par  $\frac{N_k}{P_k}$  la réduite égale à  $q_1 - \frac{1}{q_2 - \dots - \frac{1}{q_{k-1}}}$ , et par

$\frac{N_{k+1}}{P_{k+1}}$  la réduite suivante, on a

$$Y_k = \lambda_k N_k, \quad Z_k = \lambda_k P_k, \quad \text{avec} \quad V_k = \frac{1}{\lambda_k} T_k,$$

et

$$Y_{k+1} = \lambda_{k+1} N_{k+1}, \quad Z_{k+1} = \lambda_{k+1} P_{k+1};$$

donc  $Y_k Z_{k+1} - Y_{k+1} Z_k = \lambda_k \lambda_{k+1} (N_k P_{k+1} - P_k N_{k+1}) = \lambda_k \lambda_{k+1}$ ,

à cause de la relation connue  $N_k P_{k+1} - P_k N_{k+1} = +1$ .

En conséquence, l'équation précédente devient

$$(7) \quad T_k Y_{k+1} - T_{k+1} Y_k = V \cdot \lambda_k \lambda_{k+1}.$$

Le premier terme du produit effectué  $T_k Y_{k+1}$  est  $p_k x^{m-k} \cdot p_{k+1} x^k$  ou  $p_k^2 x^m$ ; la plus haute puissance de  $x$  dans  $T_{k+1} Y_k$  est  $x^{m-2}$ , et le premier terme de  $V$  est  $x^m$ . Donc, en égalant les coefficients de la plus haute puissance de  $x$ , qui est  $x^m$ , dans les deux membres, on aura

$$(8) \quad p_k^2 = \lambda_k \lambda_{k+1};$$

ce qui donne successivement (en observant que  $p_1 = m$  et  $\lambda_1 = 1$ ),

$$m^2 = \lambda_2, \quad p_2^2 = \lambda_2 \lambda_3, \quad p_3^2 = \lambda_3 \lambda_4, \quad p_4^2 = \lambda_4 \lambda_5, \quad \text{etc.}$$

On déduit de là les valeurs de  $\frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \text{etc.}$ , et par suite

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{1}{m^2} T_2, \quad V_3 = \frac{1}{\lambda_3} T_3 = \left(\frac{m}{p_2}\right)^2 T_3, \quad V_4 = \left(\frac{p_2}{m p_3}\right)^2 T_4, \\ V_5 = \left(\frac{m p_3}{p_2 p_4}\right)^2 T_5, \quad V_6 = \left(\frac{p_2 p_4}{m p_5 p_6}\right)^2 T_6, \quad V_7 = \left(\frac{m p_3 p_5}{p_2 p_4 p_6}\right)^2 T_7, \quad \text{etc.}, \\ \text{et enfin, selon que } m \text{ est pair ou impair,} \\ V_m = \left(\frac{p_2 p_3 p_4 \dots p_{m-2}}{m p_3 p_4 \dots p_{m-1}}\right)^2 p_m [*], \quad \text{ou} \quad V_m = \left(\frac{m p_3 p_5 \dots p_{m-2}}{p_2 p_4 p_6 \dots p_{m-1}}\right)^2 p_m. \end{array} \right.$$

C'est là le théorème complet de M. Sylvester.

Quand l'équation  $V = 0$  a tous ses coefficients réels, les quantités  $p_2, p_3, \dots, p_m$  sont aussi toutes réelles, puisqu'elles sont des fonctions symétriques et entières des racines  $a, b, c, \dots$  de l'équation  $V = 0$ , et par conséquent des fonctions entières de ses coefficients. Les polynômes  $V_2, V_3, \text{etc.}$ , ne diffèrent alors de  $T_2, T_3, \text{etc.}$  que par des facteurs indépendants de  $x$  essentiellement positifs, comme le montrent les formules (9).

## VI.

Je dois dire encore comment, étant donnée une équation  $V = 0$  numérique ou littérale dont on ne connaît pas les racines, on trouvera les polynômes  $T_2, T_3, T_4, \dots$  sans aucun facteur étranger.

---

[\*]  $p_m$  représente, comme  $T_m$ , le produit des carrés des différences de toutes les racines  $a, b, c, \dots, h$ .

Pour cela, je substitue les expressions précédentes de  $V_2, V_3, V_4$ , etc., dans les équations primitives

$$V = V_1 q_1 - V_2, \quad V_1 = V_2 q_2 - V_3, \quad V_2 = V_3 q_3 - V_4, \dots,$$

et je trouve

$$(10) \quad \begin{cases} m^2 V = V_1 q_1 m^2 - T_2, \\ p_2^2 V_1 = T_2 q_2 \frac{p_2^2}{m^2} - m^2 T_3, \\ p_3^2 T_2 = T_3 q_3 \frac{m^4 p_3^2}{p_2^2} - p_2^2 T_4, \\ p_4^2 T_3 = T_4 q_4 \frac{p_2^4 p_4^2}{m^4 p_3^2} - p_3^2 T_5, \\ p_5^2 T_4 = T_5 q_5 \frac{m^4 p_3^4 p_5^2}{p_4^2 p_4^2} - p_4^2 T_6, \\ p_6^2 T_5 = T_6 q_6 \frac{p_2^4 p_4^4 p_6^2}{m^4 p_3^4 p_5^2} - p_5^2 T_7, \\ \text{etc. } [*]. \end{cases}$$

En considérant que  $m$  est le premier coefficient de  $V_1$  ordonné suivant les puissances décroissantes de  $x$ , que  $p_2$  est le premier coefficient de  $T_2$ ,  $p_3$  celui de  $T_3$ , etc., on tire de ces formules les conclusions suivantes.

On voit d'abord que si l'on multiplie  $V$  par  $m^2$  et qu'on divise le produit  $m^2 V$  par  $V_1$ , on obtient un quotient  $Q_1$  du premier degré par rapport à  $x$ , égal à  $q_1 m^2$ , et entier par rapport à toutes les lettres qui y entrent, puis un reste qui, pris en signe contraire, est précisément  $T_2$ . On connaît donc  $p_2$ , qui est le premier coefficient de  $T_2$ . Multipliant  $V_1$  par  $p_2^2$ , et divisant le produit  $p_2^2 V_1$  par  $T_2$ , on a encore un quotient  $Q_2$ , entier par rapport à toutes les lettres, et égal à  $q_2 \frac{p_2^2}{m^2}$  (quoique cette quantité paraisse fractionnaire), puis un reste qui, pris en signe contraire, est égal à  $m^2 T_3$ ; en le divisant par  $m^2$  on a  $T_3$ , et par conséquent

[\*] On aperçoit mieux la loi de ces formules en observant que l'équation

$$\text{donne} \quad V_{k-1} = V_k q_k - V_{k+1}$$

$$\frac{1}{\lambda_{k-1}} T_{k-1} = \frac{1}{\lambda_k} T_k q_k - \frac{1}{\lambda_{k+1}} T_{k+1} \quad \text{ou} \quad \lambda_k \lambda_{k+1} T_{k-1} = T_k q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} - \lambda_{k-1} \lambda_k T_{k+1},$$

ou enfin, d'après l'équation (8),

$$p_k^2 T_{k-1} = T_k \cdot q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} - p_{k-1}^2 T_{k+1}.$$

on connaît  $p_3$ , coefficient de la plus haute puissance de  $x$  dans  $T_3$ . Divisant ensuite le produit  $p_3^2 T_2$  par  $T_3$ , on aura encore un quotient entier  $Q_3$ , égal à  $q_3 \frac{m^4 p_3^2}{p_2^2}$ , et un nouveau reste qui sera divisible par  $p_2^2$ ; en le divisant par ce facteur, puis changeant les signes, on aura  $T_4$ , et par suite on connaîtra  $p_4$ , qui est le premier coefficient de  $T_4$ . De même, la division de  $p_4^2 T_3$  par  $T_4$  donnera un quotient entier  $Q_4$  et un reste divisible par  $p_3^2$ ; en supprimant ce facteur et changeant les signes, on connaîtra  $T_5$  et aussi  $p_5$ . On forme ainsi successivement tous les polynômes  $T_2, T_3, T_4$ , etc. On peut les substituer à  $V_2, V_3, V_4, \dots$  dans la recherche des racines réelles de l'équation  $V = 0$ , en conservant  $V$  et  $V_1$  pour les deux premières fonctions.

Connaissant  $T_2, T_3, T_4, \dots$ , on pourra obtenir aussi les polynômes  $Y_2, Y_3, Y_4, \dots$ .

D'abord on a  $Y_2 = x - a + x - b + \text{etc.} = mx + p$ ,  $p$  étant le coefficient de  $x^{m-1}$  dans  $V$ .

Ensuite, l'équation (7) donnera successivement

$$Y_3 = \frac{Vp_2^2 + T_3 Y_2}{T_2}, \quad Y_4 = \frac{Vp_3^2 + T_4 Y_3}{T_3}, \text{ etc.}$$

On peut aussi, connaissant  $T_2, T_3, \dots$ , former les polynômes  $Z_2, Z_3$ , etc.

En comparant les formules

$$T_2 = V_1 Y_2 - V Z_2, \quad \text{et} \quad T_2 = V_1 Q_1 - m^2 V,$$

on a d'abord

$$Z_2 = m^2.$$

Ensuite les équations (6) donnent, en éliminant  $V$ .

$$T_k Z_{k+1} - T_{k+1} Z_k = V_1 (Y_k Z_{k+1} - Y_{k+1} Z_k) = V_1 \lambda_k \lambda_{k+1} = V_1 p^2,$$

d'où l'on tire

$$Z_3 = \frac{p_2^2 V_1 + m^2 T_3}{T_2}, \quad Z_4 = \frac{p_3^2 V_1 + T_4 Z_3}{T_3}, \text{ etc.}$$

Si l'on connaît déjà  $Y_k$ , on trouverait immédiatement  $Z_k$  en divisant le produit  $V_1 Y_k$  par  $V$ , car  $Z_k$  est la partie entière du quotient de cette division, d'après le § III.

On peut encore déterminer successivement  $Y_2, Y_3, Y_4, \dots, Z_2, Z_3$ , etc., si l'on connaît seulement tous les quotients entiers  $Q_1, Q_2$ , etc. On partira des valeurs  $Y_1 = 1, Z_1 = 0, Y_2 = Q_1, Z_2 = m^2$ , qui résultent de la comparaison des formules  $T_1 = V_1, T_2 = V_1 Q_1 - m^2 V$ , avec la for-

mule générale  $T_k = V_1 Y_k - VZ_k$ . Et l'on formera de proche en proche  $Y_3, Z_3, Y_4$ , etc. au moyen des relations

$$p_{k-1}^2 Y_{k+1} = Y_k Q_k - p_k^2 Y_{k-1}, \quad p_{k-1}^2 Z_{k+1} = Z_k Q_k - p_k^2 Z_{k-1},$$

qu'on déduit de celles-ci

$$N_{k+1} = N_k q_k - N_{k-1} [^*], \quad P_{k+1} = P_k q_k - P_{k-1},$$

en y remplaçant  $N_k, P_k, N_{k-1}$ , etc. par leurs valeurs  $\frac{1}{\lambda_k} Y_k, \frac{1}{\lambda_k} Z_k, \frac{1}{\lambda_{k-1}} Y_{k-1}$ , etc., multipliant par  $\lambda_{k-1} \lambda_k \lambda_{k+1}$ , et ayant égard à la formule (8), et à ce que  $Q_k = q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1}$ .

Nous avons appelé  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  les quotients que fournit le calcul du plus grand commun diviseur de  $V$  et de  $V_1$ , effectué, comme l'indiquent les formules (10), de manière à éviter les coefficients fractionnaires. Ces quotients peuvent aussi s'exprimer en fonctions entières et symétriques des racines  $a, b, c, \dots$  de l'équation  $V = 0$ .

Par exemple, en effectuant la division de  $p_4^2 T_3$  par  $T_4$ , on voit que le quotient  $Q_4$  ne dépend que du premier et du second terme du divi-

[\*] On peut remarquer ici une propriété des fonctions  $N$  ou  $Y$ . On a les relations

$$(11) \quad N_3 = N_2 q_3 - N_1, \quad N_4 = N_3 q_4 - N_2, \dots, \quad N_{m+1} = N_m q_m - N_{m-1},$$

dans lesquelles  $N_1 = 1, N_2 = q_1$ , et, comme on l'a déjà dit § II,  $N_{m+1} = \frac{V}{V_m}$ , ce que donne aussi l'élimination de  $V_1$  entre les formules

$$V_m = V_1 N_m - V P_m, \quad 0 = V_1 N_{m+1} - V P_{m+1}.$$

L'équation  $N_{m+1} = 0$  a donc les mêmes racines que  $V = 0$ .

D'après les relations (11), lorsqu'en faisant croître  $x$ , une fonction  $N_k$  autre que  $N_{m+1}$  s'évanouira, la suite des signes des fonctions  $N_1, N_2, \dots, N_m, N_{m+1}$  conservera le même nombre de variations. Mais elle en perdra une chaque fois que  $N_{m+1}$  deviendra nulle. En effet, on a

$$\frac{V}{V_1} = \frac{N_{m+1}}{P_{m+1}} = \frac{N_m N_{m+1}}{N_m P_{m+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{V}{V_1} = \frac{N_m N_{m+1}}{1 + P_m N_{m+1}}.$$

Pour les valeurs réelles de  $x$  un peu plus grandes que celles qui annulent  $V$ , ou  $N_{m+1}$ , on sait que  $V$  et  $V_1$  sont de même signe, et cette expression de  $\frac{V}{V_1}$  montre que  $N_m$  et  $N_{m+1}$  sont aussi de même signe (le dénominateur étant alors peu différent de  $+1$ ). Pour les valeurs de  $x$  un peu moindres que celles qui annulent  $V$ ,  $V$  et  $V_1$  ayant des signes contraires,  $N_m$  et  $N_{m+1}$  auront aussi des signes contraires.

On conclut de là que l'équation  $V = 0$  ou  $N_{m+1} = 0$  a autant de racines comprises entre deux nombres quelconques  $A$  et  $B$  qu'il y a de variations perdues dans la suite des signes des fonctions  $N_1, N_2, \dots, N_{m+1}$  en passant de  $A$  à  $B$ . On dira la même chose des polynômes  $Y$ , qui ne diffèrent des fonctions  $N$  que par des facteurs positifs.

On peut observer encore que, pour chaque valeur de  $x$  qui annule  $V$ , les fonctions  $N_2, N_3, \dots, N_m$ , d'après les formules (11), comparées à  $V_{k-1} = V_k q_k - V_{k+1}$ , prennent des valeurs égales à  $\frac{V_2}{V_1}, \frac{V_3}{V_1}, \dots, \frac{V_m}{V_1}$ , et ce fait fournit une autre démonstration de la propriété précédente.

dende et du diviseur, et l'on trouve,

$$Q_1 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 \times \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 (x-a+x-b+x-c+x-d) \\ - \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 \times \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 (x-a+x-b+x-c).$$

On aurait des valeurs analogues pour les autres quotients. On y arrive encore de la manière suivante.

Les équations  $T_3 = V_1 Y_3 - VZ_3$ ,  $T_5 = V_1 Y_5 - VZ_5$ , donnent

$$T_3 Y_5 - T_5 Y_3 = V (Y_3 Z_5 - Y_5 Z_3) = V \lambda_3 \lambda_5 (N_3 P_5 - N_5 P_3).$$

Mais on a

$$N_3 P_5 - N_5 P_3 = N_3 (P_4 q_4 - P_3) - P_3 (N_4 q_4 - N_3) = q_4,$$

et

$$\lambda_3 \lambda_5 q_4 = Q_4;$$

donc

$$T_3 Y_5 - T_5 Y_3 = V Q_4.$$

Cette équation montre que si l'on divise  $T_3 Y_5$  par  $V$ , la partie entière du quotient sera  $Q_4$ , et le reste  $T_5 Y_3$ ; car le degré de  $T_3$  surpasse celui de  $T_5$  de deux unités, le degré de  $Y_5$  surpasse aussi celui de  $Y_3$  de deux unités;  $T_3 Y_5$  est du degré  $m+1$  et  $V$  du degré  $m$ . La division effectuée de  $T_3 Y_5$  par le polynôme  $V$ , mis sous la forme

$$x^m - (a + b + \dots + h) x^{m-1} + \text{etc.},$$

donnera la valeur de  $Q_4$  trouvée plus haut.

J'observerai, en terminant, que la quantité  $p_2$  ou  $\sum (a-b)^2$ , prise avec un signe contraire, est le coefficient du second terme de l'équation qui a pour racines les carrés des différences des racines  $a, b, c, \dots$  de  $V=0$ , et que le dernier terme de cette équation est  $p_m$  ou  $-p_m$ , selon que son degré  $\frac{m(m-1)}{2}$  est pair ou impair. Mais les autres quantités  $p_3, p_4, \dots$  n'entrent pas comme coefficients dans l'équation aux carrés des différences. Ainsi  $p_3$ , qui représente  $\sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2$ , n'est pas la somme de tous les produits trois à trois des carrés des différences des racines  $a, b, c, \dots, h$ , puisque, par exemple, le produit  $(a-b)^2 (a-c)^2 (c-d)^2$  ne fait pas partie de  $p_3$ .

