JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STURM

Note sur un Mémoire de M. Chasles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 345-355.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__345_0>

NOTE

Sur un Mémoire de M. CHASLES;

PAR M. STURM.

M. Chasles vient de publier, dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1845, de beaux théorèmes généraux sur l'attraction des corps, parmi lesquels se trouve celui qu'il avait communiqué à l'Académie des Sciences le 11 février 1839. Le Mémoire de M. Chasles repose en grande partie sur le principe suivant, qu'il avait fait connaître antérieurement (dans le 25e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*) : « Si l'on conçoit un canal infiniment étroit dont les arêtes » curvilignes soient des trajectoires orthogonales aux surfaces de ni- » veau relatives à un corps quelconque, les attractions que ce corps » exercera sur les éléments des surfaces de niveau interceptés par ce » canal auront toutes la même valeur. »

La démonstration de cette proposition n'étant pas aussi simple et immédiate qu'on pourrait le désirer, il ne sera peut-être pas inutile de ramener la théorie de M. Chasles à des principes plus élémentaires. C'est l'objet que je me propose dans cette Note.

I.

J'adopte les hypothèses et les notations de l'auteur, en supposant toutefois que, pour un point quelconque m pris sur une surface de niveau A, on représente par dn la portion de la normale à la surface A, menée par le point m *intérieurement* à cette surface et comprise entre ce point m et la surface de niveau A_1 infiniment voisine de A et *intérieure* à A. Alors, en passant de la surface A à l'autre A_1, la fonction V (somme des molécules du corps attirant M divisées respectivement par leurs distances au point m) prend un accroissement positif dV, et le rapport $\frac{dV}{dn}$ est positif (du moins en supposant toutes les molécules du corps M douées du pouvoir attractif). On prend aussi, intérieurement à la surface A, sur la direction de la normale dn, une longueur infiniment petite ε égale à $\frac{k}{dn}$, c'est-à-dire réciproquement proportionnelle à dn; son extrémité a pour lieu géométrique une certaine surface. Cette dernière surface et la surface primitive A comprennent entre elles un volume qu'on peut regarder comme une couche infiniment mince de matière homogène, dont *l'épaisseur,* variable d'un point à un autre, est ε, ou $\frac{k}{dn}$.

En désignant par $d\omega$ l'élément superficiel de la surface A au point m, ou même encore d'une autre surface fermée arbitraire B dont m est un point quelconque, pourvu qu'elle soit extérieure au corps attirant dont la masse est M, M. Chasles établit d'abord la formule

$$\int\int \frac{dV}{dn}\, d\omega = 4\pi M,$$

dans laquelle l'intégrale double s'étend à tous les éléments de la surface A ou B que l'on considère. Cette formule se trouve aussi dans le Mémoire de M. Gauss (pages 304 et suivantes de ce Journal), démontrée à peu près de la même manière. On peut la déduire de l'équation connue

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

qui a lieu pour tout point (x, y, z) compris dans la masse M, ρ étant la densité du corps en ce point, et qu'on peut étendre aux points extérieurs, pourvu qu'à l'égard de ceux-ci on considère la densité ρ du corps comme nulle. On n'a pas besoin de s'occuper ici des points situés sur la surface même du corps M. Multiplions cette équation par l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, puis intégrons par rapport aux variables x, y, z, en étendant l'intégration à tous les points de l'espace limité par une surface fermée quelconque B, extérieure au corps M. Quoique dans l'intégration la valeur des deux membres de l'équation (1) change brusquement en passant de l'intérieur à l'extérieur du corps M, il est aisé de voir que l'intégration se fera comme s'il n'y avait pas de discontinuité à la surface de ce corps. (Il suffit, par exemple, d'ajouter au corps M une couche matérielle aussi mince qu'on voudra et telle que la densité ρ, pour l'espace extérieur au corps M, soit une fonction qui décroisse très-rapidement, mais d'une manière continue, de manière à devenir nulle un peu au-delà de la surface du corps M, ce qui n'altérera qu'infiniment peu les valeurs de V et de ses dérivées premières $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, ainsi que les résultats de l'intégration.)

On a donc pour un espace quelconque

$$(2)\qquad \int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz = -\,4\pi\int\!\!\int\!\!\int \rho\,dx\,dy\,dz.$$

L'intégrale $\int\!\!\int\!\!\int \rho\,dx\,dy\,dz$, étendue à tout l'espace que renferme une surface fermée B extérieure au corps attirant, n'est autre chose que la masse M de ce corps, puisque ρ est nulle hors de cette masse. Quant à l'intégrale triple qui forme le premier membre, elle est la somme de trois autres, qui se réduisent à des intégrales doubles relatives à tous les éléments de la surface limite B. En effet, l'intégration indéfinie par rapport à x donne

$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz = \int\!\!\int \frac{dV}{dx}\,dy\,dz.$$

Observons que $dydz$ est la projection sur le plan des yz d'un élément $d\omega$ de la surface B jusqu'à laquelle s'étend l'intégration, et désignons par α, 6, γ les angles que fait avec les axes des x, y, z la normale à la surface B menée par un point m de cet élément extérieurement à cette surface. Nous aurons

$$dy\,dz = d\omega\cos\alpha,$$

et l'intégrale définie triple

$$\int\!\!\int\!\!\int \frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz$$

sera égale à l'intégrale double

$$\int\!\!\int \frac{dV}{dx}\cos\alpha\,d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface B. Par de semblables transformations, l'équation (2) deviendra

$$\iint\left(\frac{dV}{dx}\cos\alpha+\frac{dV}{dy}\cos6+\frac{dV}{dz}\cos\gamma\right)d\omega=-4\pi M.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par dn la distance du point m de la surface B à un point infiniment voisin pris sur la partie intérieure de la normale en m à cette surface, l'accroissement de V en passant du point m, qui a pour coordonnées x, y, z à ce point infiniment voisin qui a pour coordonnées $x - dn\cos\alpha$, etc., sera évidemment

$$dV=-\frac{dV}{dx}dn\cos\alpha-\frac{dV}{dy}dn\cos6-\frac{dV}{dz}dn\cos\gamma\,[*].$$

La formule précédente devient par là

$$\iint\frac{dV}{dn}d\omega=4\pi M, \tag{3}$$

l'intégrale double s'étendant à tous les éléments de la surface arbitraire B.

Si, au lieu d'une surface quelconque B, on considère la surface de niveau A, cette même équation aura lieu pour la surface A. En observant que $\cos\alpha$, $\cos6$, $\cos\gamma$ sont alors proportionnels à $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, on a

$$\frac{dV}{dn}=\sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2}:$$

c'est la valeur même de l'attraction du corps M sur le point m; et l'équation (3) qui précède peut s'écrire ainsi

$$\iint\sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2}\,d\omega=4\pi M.$$

---

[*] On voit que $\frac{dV}{dn}$ exprime la composante normale à la surface B de l'attraction que le corps M exerce sur le point m rapportée à l'unité de masse, les composantes de cette attraction parallèles aux axes étant $-\frac{dV}{dx}$, etc.

Si dn représente, comme on l'a supposé en commençant, la portion de la normale à la surface de niveau A comprise entre cette surface et la surface de niveau infiniment voisine intérieure à A, alors $d\mathrm{V}$ est constante dans le rapport $\frac{d\mathrm{V}}{dn}$, et l'équation précédente (3) devient

$$d\mathrm{V}\int\int\frac{d\omega}{dn} = 4\pi\mathrm{M}.$$

Et comme on a supposé l'épaisseur ε de la couche formée intérieurement sur la surface de niveau A, égale à $\frac{k}{dn}$, cette formule devient

$$\frac{d\mathrm{V}}{k}\int\int\varepsilon d\omega = 4\pi\mathrm{M},$$

ou bien encore

$$(4) \qquad \frac{d\mathrm{V}}{k} = 4\pi\frac{\mathrm{M}}{\mu},$$

en nommant μ le volume $\int\int\varepsilon d\omega$ ou la masse de la couche infiniment mince.

II.

Considérons maintenant un point S ayant pour coordonnées a, b, c, et que nous supposerons d'abord extérieur à la surface de niveau A, et par conséquent au corps M que cette surface environne.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque m intérieur à cette surface A, et soit $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ la distance du point variable m au point fixe S. On a les deux équations

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = 0.$$

Dans la première, ρ exprime, comme on l'a dit plus haut, la densité du corps M au point m, si ce point fait partie de la masse M, et

ρ est censée nulle pour tout point (x, y, z) qui n'appartient pas à cette masse M.

En multipliant la première équation par $\frac{1}{r}$, la seconde par V, et retranchant, on obtient la suivante :

$$(5) \qquad \left(\frac{1}{r}\frac{d^2 V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2 V}{dy^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2 V}{dz^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\right) = -\frac{4\pi\rho}{r}.$$

Multiplions celle-ci par $dx\,dy\,dz$, puis intégrons-la par rapport aux variables x, y, z, en étendant l'intégration à tous les points de l'espace que renferme la surface A.

Dans le second membre on aura

$$-4\pi\int\int\int\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{r}, \quad \text{ou} \quad -4\pi \mathrm{U},$$

en appelant U la valeur de V relative au point S(a, b, c), c'est-à-dire la somme des molécules du corps M divisées par leurs distances respectives à ce point S.

Quant au premier membre, en observant qu'on a

$$\frac{1}{r}\frac{d^2 V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right),$$

et que

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} = -\frac{1}{r^2}\frac{x-a}{r},$$

on voit que l'intégrale triple indéfinie

$$\int\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{d^2 V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right)dx\,dy\,dz$$

se réduit à l'intégrale double

$$\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\right)dy\,dz.$$

De là il est aisé de conclure que cette intégrale triple, prise dans tout l'espace limité par la surface A, est égale à la valeur de l'intégrale double

$$\int\!\!\int \left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha\right) d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface A.

Les autres termes de l'équation (5) donneront par l'intégration des résultats analogues.

Ainsi, en multipliant cette équation (5) par $dx\,dy\,dz$, puis intégrant pour tout l'espace intérieur à la surface A, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned} &\int\!\!\int \frac{1}{r}\left(\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{dV}{dy}\cos\beta + \frac{dV}{dz}\cos\gamma\right) d\omega \\ +&\int\!\!\int \frac{V}{r^2}\left(\frac{x-a}{r}\cos\alpha + \frac{y-b}{r}\cos\beta + \frac{z-c}{r}\cos\gamma\right) d\omega \end{aligned}\right\} = -4\pi U,$$

les intégrales doubles s'étendant à toute la surface A.

Mais on a, sur la surface A,

$$V = \text{constante},$$

$$\frac{dV}{dn} = -\frac{dV}{dx}\cos\alpha - \frac{dV}{dy}\cos\beta - \frac{dV}{dz}\cos\gamma.$$

D'ailleurs

$$\frac{x-a}{r}\cos\alpha + \frac{y-b}{r}\cos\beta + \frac{z-c}{r}\cos\gamma$$

est le cosinus de l'angle i que la droite menée du point S (a, b, c) au point m (x, y, z) de la surface A, fait avec la normale en m à cette surface. L'équation qui précède devient donc

$$\int\!\!\int \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}d\omega - V\int\!\!\int \frac{\cos i\, d\omega}{r^2} = 4\pi U.$$

Le point S étant extérieur à la surface A, on sait que l'intégrale $\int\!\!\int \frac{\cos i\, d\omega}{r^2}$, prise dans toute l'étendue de cette surface, est nulle, ce qui réduit l'équation précédente à celle-ci

$$\iint \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\,d\omega = 4\pi U;$$

et comme on a, d'après la formule (4),

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{k}\,\varepsilon = 4\pi\frac{M}{\mu}\,\varepsilon,$$

elle devient

$$\frac{M}{\mu}\iint \frac{\varepsilon\, d\omega}{r} = U.$$

Mais $\iint \frac{\varepsilon\, d\omega}{r}$ est la somme des molécules de la couche formée sur la surface A, divisées respectivement par leurs distances au point S. En désignant par v cette somme, on a donc enfin la formule

$$(6) \qquad \frac{v}{\mu} = \frac{U}{M},$$

qui exprime ce théorème :

« Si l'on considère une surface de niveau quelconque A d'un corps » M et un point quelconque S extérieur à cette surface, la somme des » molécules de la couche infiniment mince qui répond à cette surface, » divisées respectivement par leurs distances au point extérieur S, est à » la somme des molécules du corps M divisées par leurs distances » au même point S, comme la masse de la couche est à la masse du » corps. »

Il suit de là que *la somme des molécules d'une couche divisées par leurs distances à un point extérieur est à la masse de la couche dans un rapport constant, quelle que soit la couche;* ce qu'on pourrait encore trouver directement en intégrant l'équation (5) multipliée par $dx\,dy\,dz$ et où ρ serait nulle, dans tout l'espace compris entre deux surfaces de niveau quelconques auxquelles le point S est extérieur.

III.

Considérons à présent un point S (a, b, c) situé dans l'intérieur de la surface de niveau A, soit au-dedans, soit au-dehors du corps M. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque m de l'espace extérieur à la surface A, et par conséquent au corps M, et soit r la distance Sm. On a les deux équations

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} = 0,$$

qui donnent

$$(7) \qquad \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dy^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dz^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\right) = 0.$$

Multiplions celle-ci par $dx\,dy\,dz$, puis intégrons-la par rapport aux variables x, y, z, en étendant l'intégration à tout l'espace extérieur à la surface A. L'intégrale triple indéfinie

$$\int\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right)dx\,dy\,dz$$

se réduit, comme plus haut, à l'intégrale double

$$\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx} + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\right)dy\,dz.$$

Si l'on veut intégrer pour tout l'espace compris entre la surface A et une autre surface fermée quelconque A′ extérieure à A, il est aisé de voir qu'on aura à retrancher l'intégrale double

$$\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha\right)d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface A d'une intégrale double analogue relative à l'autre surface A′. Or cette dernière intégrale aura une valeur infiniment petite ou nulle, si l'on suppose que tous les points de cette surface A′ s'éloignent à l'infini de l'origine des coordonnées [*].

[*] Car, en désignant par h la droite la plus courte qu'on puisse mener entre les deux surfaces A et A′, on a $r > h$ et $V < \frac{M}{h}$, V étant la somme des molécules de M divi-

L'intégrale triple

$$\int\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

étendue à tout l'espace extérieur à la surface A, est donc égale à

$$-\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha\right)d\omega,$$

cette intégrale double s'étendant à tous les éléments $d\omega$ de la surface A.

Ainsi, en intégrant l'équation (7) multipliée par $dx\,dy\,dz$ pour tout l'espace extérieur à A, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}&\int\int\frac{1}{r}\left(\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{dV}{dy}\cos\beta + \frac{dV}{dz}\cos\gamma\right)d\omega\\ +&\int\int\frac{V}{r^2}\left(\frac{x-a}{r}\cos\alpha + \frac{y-b}{r}\cos\beta + \frac{z-c}{r}\cos\gamma\right)d\omega\end{aligned}\right\} = 0,$$

équation qui peut, d'après ce qui a été expliqué plus haut, se trans-

---

sées par leurs distances au point m de la surface A′, lesquelles surpassent h; d'ailleurs $\frac{dV}{dx}$ (composante de l'attraction que M exerce sur m) est $< \frac{M}{h^2}$, attraction qu'exercerait un point de masse égale à M à la distance h. D'ailleurs $\cos\alpha$ et $\frac{x-a}{r}$ sont < 1. On a donc, pour tout point de la surface A′, en ne considérant que les valeurs absolues,

$$\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha < \frac{1}{h}\frac{M}{h^2},\quad \text{et}\quad \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha < \frac{M}{h^3}.$$

Ainsi l'intégrale double

$$\int\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\cos\alpha + \frac{V}{r^2}\frac{x-a}{r}\cos\alpha\right)d\omega,$$

étendue à toute la surface A′, est $< \int\int\frac{2M}{h^3}d\omega$ ou $< \frac{2M}{h^3} \times$ surface A′. Mais la surface A′ (supposée convexe) est plus petite que celle d'un parallélipipède qui l'envelopperait de toutes parts, et dont les côtés seraient proportionnels à h, de sorte qu'on peut poser la surface A′ $< nh^2$, n étant un nombre fini indépendant de h. L'intégrale dont il s'agit est donc $< \frac{2M}{h^3} \times nh^2$ ou $< \frac{2Mn}{h}$; elle devient donc nulle si la surface A′ s'éloigne à l'infini, puisque h devient infinie.

former dans la suivante

$$\iint \frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\,d\omega = V\iint \frac{\cos i\,d\omega}{r^2},$$

en observant que V, étant constante sur la surface A, peut être mise hors des signes $\iint$.

Le point S étant ici intérieur à la surface A, on sait que

$$\iint \frac{\cos i\,d\omega}{r^2} = 4\pi;$$

on a aussi

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{k}\varepsilon = 4\pi\frac{M}{\mu}\varepsilon.$$

La formule qui précède devient donc

$$\frac{M}{\mu}\iint \frac{\varepsilon\,d\omega}{r} = V,$$

ou

$$\frac{v}{\mu} = \frac{V}{M};$$

c'est-à-dire que *si l'on considère un point quelconque* S *intérieur à une surface de niveau quelconque* A *du corps* M, *la somme des molécules de la couche qui répond à cette surface* A, *divisées par leurs distances au point intérieur* S, *est à la somme des molécules du corps* M *divisées par leurs distances à un point quelconque de la surface externe* A *de la couche comme la masse de la couche est à la masse du corps.*

Par conséquent *la somme des molécules d'une couche divisées par leurs distances à un point pris dans son intérieur, est constante, quel que soit ce point.*

Après avoir donné les théorèmes qui précèdent, M. Chasles en déduit sans peine les autres propositions exposées dans les §§ III et IV de son Mémoire, auquel nous renvoyons le lecteur.