

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DU HAÿS

**De la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée
 $ax^2 + b = y^2$, des séries récurrentes qui en résultent, et de l'ordre
à suivre dans la solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 7 (1842), p. 325-337.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7_325_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DE LA RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS
DE L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE $ax^2 + b = y^2$,

DES SÉRIES RÉCURRENTES QUI EN RÉSULTENT,

ET DE L'ORDRE A SUIVRE DANS LA SOLUTION DE L'ÉQUATION $x^2 + y^2 = z^2$;

PAR M. DU HAYS.

Euler, dans le Traité de l'analyse indéterminée qui forme la seconde partie de ses *Éléments d'Algèbre* [*], et Lagrange, dans des Additions à cet ouvrage [**), ainsi que Legendre, dans son *Essai sur la théorie des nombres* [***], et d'autres géomètres, se sont occupés avec beaucoup de détails de la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$ax^2 + b = y^2,$$

qui est d'un fréquent usage dans la résolution des équations indéterminées du second degré.

Le premier de ces géomètres démontre que, lorsque l'équation est possible, si f et g sont des valeurs correspondantes connues de x et de y , et que m et r soient des nombres entiers quelconques donnés par l'équation

$$ar^2 + 1 = m^2,$$

$mf + rg$ et $mg + arf$ sont d'autres valeurs correspondantes des mêmes

[*] Chap. VI et VII, page 96, de la traduction française de 1774.

[**] §§ VII et VIII, page 595.

[***] Première partie, page 58.

inconnues x et y . On peut donc avoir ainsi successivement un nombre infini de valeurs de x et de y , et toutes ces nouvelles valeurs seront évidemment des nombres entiers, premiers entre eux, si les nombres primitifs f et g , m et r sont également entiers et premiers entre eux.

On voit que les nombres m et r résultent uniquement du seul coefficient a , et qu'ils sont indépendants du terme b . Plus les nombres m et r seront petits, plus les valeurs qu'ils donneront de x et de y seront rapprochées. Il en résulte qu'en faisant usage des plus petites valeurs que ces nombres puissent avoir, on en déduira toutes les valeurs possibles de x et de y . C'est ce qui a déterminé Euler et Legendre à donner des tables qui contiennent les premières valeurs de m et de r , pour diverses valeurs de a . Si, au contraire, on voulait parvenir avec promptitude à des valeurs élevées de x et de y , on emploierait des valeurs de m et r exprimées par de grands nombres. Les nombres x et y peuvent d'ailleurs être pris indifféremment en sens positif ou en sens négatif.

Les valeurs successives de x et de y ne dépendant que de deux valeurs précédentes, on a lieu de présumer que la suite de ces valeurs forme des séries récurrentes. C'est en effet ce qui arrive, comme nous allons le démontrer.

Soient E , F et G trois valeurs successives quelconques de x , et E' , F' et G' les trois valeurs correspondantes de y , obtenues par le secours des mêmes valeurs de m et de r . On a

$$\begin{aligned} E &= f, & F &= mf + rg, & \text{et} & G &= (m^2 + ar^2)f + 2mrg; \\ E' &= g, & F' &= mg + arf, & \text{et} & G' &= (m^2 + ar^2)g + 2amrf. \end{aligned}$$

D'où l'on tire, en substituant $m^2 - 1$ à ar^2 , et réduisant,

$$G = 2mF - E, \quad \text{et} \quad G' = 2mF' - E';$$

ou bien

$$E = 2mF - G, \quad \text{et} \quad E' = 2mF' - G'.$$

On conclut de là qu'un terme quelconque, tant dans la suite croissante que dans la suite décroissante, soit des valeurs de x , soit des valeurs de y , est toujours égal à celui qui le précède immédiatement multiplié par $2m$, moins le terme qui est avant ce dernier, caractère

d'une série récurrente de l'une des espèces les plus simples. L'échelle de relation de cette série est

$$-1 + 2m - 1,$$

ou plus généralement

$$-1 + 2mz - z^2;$$

z étant une quantité auxiliaire indéterminée qui peut être égale à l'unité [*].

Si A et B sont les deux premiers termes, et K et L les deux derniers termes d'une série des valeurs de x ; que A' et B' , K' et L' soient les mêmes termes de la série des valeurs correspondantes de y ; que T et T' soient les termes généraux ou $n^{\text{ièmes}}$ de chacune de ces séries; que S et S' soient les sommes des séries entières, ou, ce qui revient au même, les fractions dont chacune d'elles dérive; enfin δ et δ' les sommes des n premiers termes de chacune de ces séries; on sait qu'alors on a

$$\delta = \frac{-(K+L) + 2m(A+L) - (A+B)}{-1 + 2m - 1} = \frac{m(A+L)}{m-1} - \frac{(A+B+K+L)}{2(m-1)},$$

et

$$\delta' = \frac{m(A'+L')}{m-1} - \frac{(A'+B'+K'+L')}{2(m-1)},$$

$$S = \frac{A - (2mA - B)z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{(2m-1)A - B}{2(m-1)},$$

et

$$S' = \frac{A' - (2mA' - B')z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{(2m-1)A' - B'}{2(m-1)}.$$

Mais on a

$$B = mA + rA', \quad \text{et} \quad B' = mA' + arA;$$

[*] Voyez EULER, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, traduction de Labbey, in-4°, tome I, pages 47 et 168. — LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et intégral*, in-4°, tome II.

on a donc aussi

$$S = \frac{A - (mA - rA')z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{A}{2} - \frac{rA'}{2(m-1)},$$

et

$$S' = \frac{A' - (mA' - arA)z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{A'}{2} - \frac{arA}{2(m-1)}.$$

Représentant par p et q les deux racines de l'équation

$$z^2 - 2mz + 1 = 0,$$

et par P et Q , P' et Q' des nombres tels qu'on ait

$$S = \frac{P}{p-z} + \frac{Q}{q-z}, \quad \text{et} \quad S' = \frac{P'}{p-z} + \frac{Q'}{q-z};$$

et faisant, pour abréger,

$$2mA - B = mA - rA' = l, \quad \text{et} \quad 2mA' - B' = -mA'arA = l',$$

on a

$$p = m + \sqrt{m^2 - 1} = m + r\sqrt{a},$$

et

$$q = m - \sqrt{m^2 - 1} = m - r\sqrt{a}, \quad pq = 1;$$

et de plus

$$P = \frac{-A + lp}{p-q} = \frac{l}{2} + \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}},$$

et

$$Q = \frac{A - lq}{p-q} = \frac{l}{2} - \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}};$$

$$P' = \frac{-A' + l'p}{p-q} = \frac{l'}{2} + \frac{l'm - A'}{2r\sqrt{a}},$$

et

$$Q' = \frac{A' - l'q}{p-q} = \frac{l'}{2} - \frac{l'm - A'}{2r\sqrt{a}}.$$

Mais on sait encore que

$$T = \left(\frac{P}{p^n} + \frac{Q}{q^n} \right) z^{n-1} = (Pq^n + Qp^n) z^{n-1} = \left[\frac{l}{2} (p^n + q^n) - \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}} (p^n - q^n) \right] z^{n-1},$$

ou

$$T = \left[\frac{l}{2} \left(\overline{m + r\sqrt{a}^n} + \overline{m - r\sqrt{a}^n} \right) - \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}} \left(\overline{m + r\sqrt{a}^n} - \overline{m - r\sqrt{a}^n} \right) \right] z^{n-1},$$

et que de même

$$T' = \left[\frac{l'}{2} \left(\overline{m + r\sqrt{a}^n} + \overline{m - r\sqrt{a}^n} \right) + \frac{l'm - A'}{2r\sqrt{a}} \left(\overline{m + r\sqrt{a}^n} - \overline{m - r\sqrt{a}^n} \right) \right] z^{n-1}.$$

Maintenant, si l'on développait les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de $m + r\sqrt{a}$ et de $m - r\sqrt{a}$ suivant la formule du binôme, et que M, N, R, U, V, Y, etc., représentassent les coefficients de ce développement, on verrait que, dans le premier terme des valeurs de T et de T', toutes les puissances impaires de $r\sqrt{a}$ disparaissent, tandis que, dans le second terme, ce sont au contraire toutes les puissances paires qui s'évanouissent. Mais, comme ce second terme se trouve divisé par $r\sqrt{a}$, il en résulte qu'en effectuant la division, il ne se trouve non plus composé que des puissances paires de $r\sqrt{a}$: par conséquent le facteur $\sqrt{a}$ en a disparu, et les valeurs précédentes deviennent

$$T = \left[\begin{array}{l} l(m^n + N m^{n-2} r^2 a + U m^{n-4} r^4 a^2 + Y m^{n-6} r^6 a^3 + \text{etc.}) \\ - (lm - A)(M m^{n-1} + R m^{n-3} r^2 a + V m^{n-5} r^4 a^2 + \text{etc.}) \end{array} \right] z^{n-1},$$

$$T' = \left[\begin{array}{l} l'(m^n + N m^{n-2} r^2 a + U m^{n-4} r^4 a^2 + Y m^{n-6} r^6 a^3 + \text{etc.}) \\ - (l'm - A')(M m^{n-1} + R m^{n-3} r^2 a + V m^{n-5} r^4 a^2 + \text{etc.}) \end{array} \right] z^{n-1},$$

dans lesquelles on n'aperçoit plus aucune trace de quantité irrationnelle, ainsi que cela devait être.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple, on proposera le problème suivant :

« Trouver la suite des triangles rectangles en nombres entiers premiers entre eux, dont la différence des côtés est un nombre constant h . »

Soient x le plus petit côté, y le plus grand côté, et z l'hypoténuse; on a

$$y = x + h, \quad \text{et} \quad z^2 = 2x^2 + 2xh + h^2,$$

ou en faisant

$$x = u - \frac{h}{2},$$

afin de faire évanouir le second terme,

$$z^2 = 2n^2 + \frac{1}{2}h^2;$$

équation de la forme dont il s'agit ici, et dans laquelle

$$a = 2n^2 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2}h^2.$$

Or, pour cette valeur de a ,

$$\begin{aligned} r &= 2, \quad 12, \quad 70, \quad 408, \quad 2378, \dots \text{etc.}, \\ m &= 3, \quad 17, \quad 99, \quad 577, \quad 3363, \dots \text{etc.}, \end{aligned}$$

et l'échelle de relation des séries récurrentes que forment les valeurs successives de u et de z , s'obtient en substituant, dans l'expression

$$-1 + 2m - 1,$$

celle des valeurs de m dont on se propose de faire usage.

Si l'on veut maintenant donner une valeur numérique à h , on rappellera d'abord que dans tous triangles rectangles en nombres entiers, α et β étant des nombres entiers quelconques, les côtés sont exprimés par $\alpha^2 - \beta^2$ et $2\alpha\beta$, et l'hypoténuse par $\alpha^2 + \beta^2$ [*], et par conséquent que h ne peut être que de la forme

$$\alpha^2 - \beta(2\alpha + \beta), \quad \text{ou} \quad \beta(2\alpha + \beta) - \alpha^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha(\alpha - \beta) - \beta(\alpha + \beta), \quad \text{et} \quad \beta(\alpha + \beta) - \alpha(\alpha - \beta).$$

Il en résulte que cette valeur n'est pas arbitraire, et qu'on ne peut avoir que

$$\begin{aligned} h &= 1, \quad 7, \quad 17, \quad 23, \quad 31, \quad 41, \quad 47, \quad 49, \quad 71, \quad 73, \quad 79, \\ &\quad 89, \quad 97, \quad 113, \quad 119, \quad 127, \quad \text{etc.}; \end{aligned}$$

[*] EULER, *Analyse indéterminée*, chapitre IV, art. 44, page 55.

tout autre nombre attribué à h rendrait le problème impossible. Il est d'ailleurs évident que, pour que les nombres composant le triangle soient premiers entre eux, il faut que α et β n'aient aucun diviseur commun, et que l'un soit un nombre pair et l'autre un nombre impair; en outre, h étant toujours un nombre impair, u sera une fraction ayant 2 pour dénominateur.

Si donc on désire que la différence des côtés soit un *minimum*, on aura pour ce cas

$$h = 1, \quad z^2 = 2n^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad x = u - \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad y = u + \frac{1}{2},$$

et pour avoir tous les triangles dont les côtés diffèrent d'une unité, on prendra

$$r = 2 \quad \text{et} \quad m = 3.$$

Or on aperçoit facilement que, si l'on fait $u = \frac{1}{2}$ [*],

$$z = 1;$$

et on a alors

$$F = mE + rE' = 3E + 2E', \quad \text{et} \quad F' = mE' + rE = 3E' + 4E;$$

$$G = 2mF - E = 6F - E, \quad \text{et} \quad G' = 2mF' - E' = 6F' - E';$$

d'où l'on déduit les séries récurrentes

$$u = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{41}{2}, \frac{239}{2}, \frac{1393}{2}, \frac{8119}{2}, \frac{47321}{2}, \text{ etc. },$$

$$z = 1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, \text{ etc. },$$

de la première desquelles on tire

$$y = 1, 4, 21, 120, 697, 4060, 23661, \text{ etc. },$$

$$x = 0, 3, 20, 119, 696, 4059, 23660, \text{ etc. }$$

[*] Si, dans ce cas, on faisait $u = -\frac{1}{2}$, on obtiendrait les mêmes séries qu'en faisant $u = \frac{1}{2}$; mais on verra ci-après qu'il n'en est pas toujours de même.

Il est à remarquer que l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \frac{1}{2}$$

fournit un moyen expéditif d'avoir la racine carrée approchée de 2 en fractions ordinaires. En effet, on en tire

$$\frac{z}{u} = \sqrt{2 + \frac{1}{2u^2}},$$

et plus u devient grand, plus la fraction $\frac{1}{2u^2}$ est petite, et plus $\frac{z}{u}$ approche d'être égal à $\sqrt{2}$, sans cependant cesser de lui être supérieur. Ainsi $\frac{66922}{47321}$ est plus grand, mais presque égal à $\sqrt{2}$. On obtient de la même manière la racine carrée approchée, en fractions ordinaires, de tous les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, car l'équation

$$z^2 = au^2 + 1$$

donne en général

$$\frac{z}{u} = \sqrt{a + \frac{1}{u^2}},$$

et $\frac{z}{u}$ approche beaucoup de $\sqrt{a}$ lorsque u représente un grand nombre. Si l'on voulait avoir, par exemple, la valeur de plus en plus approchée de $\sqrt{3}$, on ferait $a = 3$; alors on aurait

$$\begin{aligned} r &= 1, \quad 4, \quad 15, \quad 56, \quad 209, \quad 780, \quad 2911, \quad \text{etc.}, \\ m &= 2, \quad 7, \quad 26, \quad 97, \quad 362, \quad 1351, \quad 5042, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

On voit que si, dans l'équation

$$z^2 = 3u^2 + 1,$$

on fait $u = 1$, on aura $z = 2$, et que si l'on prend pour r et m les nombres 2911 et 5042, on aura les séries

$$\begin{aligned} u &= 1, \quad 19864, \quad 199552615, \quad \text{etc.}, \\ z &= 2, \quad 18817, \quad 189750626, \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

qui donnent pour valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{3}$,

$$\frac{2}{1}, \frac{18817}{10864}, \frac{189750626}{109552615}, \text{ etc.}$$

Enfin, si l'on voulait avoir la suite des triangles rectangles irréductibles en nombres entiers dont la différence des côtés est 7, l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \frac{h^2}{2}$$

deviendrait

$$z^2 = 2u^2 + \frac{49}{2},$$

et l'on a

$$y = u + \frac{7}{2}, \quad \text{et} \quad x = u - \frac{7}{2}; \quad r = 2, \quad \text{et} \quad m = 3.$$

Faisant $u = -\frac{1}{2}$, on trouve que $z = 5$, et l'on a

$$\left. \begin{array}{l} u = -\frac{1}{2}, \frac{17}{2}, \frac{103}{2}, \frac{601}{2}, \frac{3503}{2}, \frac{20417}{2}, \text{ etc.}, \\ z = 5, 13, 73, 425, 2477, 14437, \text{ etc.}, \\ y = 3, 12, 55, 304, 1755, 10212, \text{ etc.}, \\ x = -4, 5, 48, 297, 1748, 10205, \text{ etc.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{séries} \\ \text{récurrentes.} \end{array}$$

Mais si l'on avait fait $u = \frac{1}{2}$, on aurait trouvé que $z = 5$, et l'on aurait eu

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{1}{2}, \frac{23}{2}, \frac{137}{2}, \frac{799}{2}, \frac{4657}{2}, \frac{27143}{2}, \text{ etc.}, \\ z = 5, 17, 97, 565, 3293, 19193, \text{ etc.}, \\ y = 4, 15, 72, 403, 2332, 13575, \text{ etc.}, \\ x = -3, 8, 65, 396, 2325, 13568, \text{ etc.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{séries} \\ \text{récurrentes.} \end{array}$$

En sorte que voilà une seconde suite de triangles, satisfaisant à la question, que la première suite trouvée n'aurait pas fait soupçonner; ce qui montre que plusieurs séries récurrentes indépendantes les unes des autres peuvent satisfaire aux questions de ce genre. Cet exemple

montre encore que toutes les valeurs de u qui, prises positivement ou négativement, satisfont également à l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \frac{h^2}{2},$$

produisent cependant le plus souvent des séries différentes.

On ajoutera ici quelques mots sur l'ordre à suivre dans la recherche des diverses solutions en nombres entiers, premiers entre eux, de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

qui donne tous les triangles rectangles possibles. On a vu plus haut que les nombres α et β , dont se composent x , y et z , doivent être l'un pair et l'autre impair, premiers entre eux, et tels qu'on ait toujours $\alpha > \beta$. Le côté impair est exprimé par

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta);$$

le côté pair par $2\alpha\beta$, et il est toujours divisible par 4; l'hypoténuse est exprimée par $\alpha^2 + \beta^2$, nombre toujours impair, et qui, étant divisé par 4, laisse constamment 1 pour reste. Ainsi, 1^o si l'on prend successivement pour α la suite des nombres naturels en commençant par 2, et qu'on donne, pour chacun, à β toutes les valeurs possibles, on obtiendra de cette manière une première suite de tous les triangles rectangles; 2^o si l'on prend successivement pour côté impair la suite des nombres impairs, on observera que ce côté, en y comprenant l'unité, est toujours divisible en deux facteurs au moins, et que, s'il contient un plus grand nombre de facteurs premiers, on pourra en former plus ou moins de diviseurs différents qui, pris deux à deux, donneront autant de valeurs différentes pour α et β : on obtiendra de cette manière une seconde suite de tous les triangles rectangles, rangés dans un autre ordre que dans la première; 3^o si l'on prend successivement pour côté pair le double de chaque nombre pair, et qu'on recherche tous les facteurs premiers de chacun de ces nombres, on aura encore, en les combinant entre eux, les différentes valeurs de α et β , et avec leur secours, une troisième suite des mêmes triangles, rangés encore dans un

autre ordre; 4^o enfin si dans la progression arithmétique

$$1, 5, 9, 13, 17, \text{ etc.},$$

dont le premier terme est l'unité et la différence des termes 4, on prend les termes qui sont la somme de deux carrés, ces termes sont les hypoténuses des triangles cherchés, ils donnent les valeurs de α et β , et fournissent encore une quatrième suite des mêmes triangles, mais dans un ordre différent de ceux que présentent les trois premières suites. Cette dernière suite s'obtient avec un peu moins de facilité que les précédentes; cependant, si l'on retranche des termes de la progression ci-dessus les plus grands carrés contenus dans chacun d'eux, on découvre assez promptement ceux qui satisfont à la question.

Si un nombre x est le produit de plusieurs facteurs premiers

$$1, A, B, C, D, E, \text{ etc.},$$

on aura généralement

$$x = 1 \times A^p \times B^q \times C^r \times D^s \times \text{ etc.};$$

et si n est le nombre de ces facteurs, non compris l'unité, le nombre de diviseurs différents qu'aura le nombre x s'obtiendra en prenant ces facteurs seuls, puis en les combinant 2 à 2, puis 3 à 3, puis 4 à 4, et ainsi de suite, et le nombre de ses diviseurs sera

$$\frac{1}{2} \left[n + 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2.1}{1.2\dots(n-1)n} \right].$$

Ainsi lorsque n sera

$$1, 2, 3, 4, \text{ etc.},$$

le nombre des diviseurs de x , et par conséquent des valeurs différentes de α et β , sera

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \text{ etc.}$$

Il en résulte que pour les côtés pairs au-dessous de

$$2 \times 2.3 = 12,$$

et pour les côtés impairs au-dessous de

$$3.5 = 15,$$

un même nombre ne saurait appartenir à plus d'un triangle; qu'au-dessous de

$$2 \times 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

pour les premiers, et de

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

pour les seconds, un même nombre ne saurait appartenir à plus de deux triangles; qu'au-dessous de

$$2 \times 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

pour les côtés pairs, et de

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$$

pour les côtés impairs, un même nombre ne saurait appartenir à plus de quatre triangles différents; etc.

Si l'on cherchait, par exemple, les huit triangles rectangles qui peuvent avoir pour côté pair

$$2 \times 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420,$$

on trouverait que ces triangles sont les suivants; $n = 4$:

α	β	$\alpha^2 - \beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2 + \beta^2$
$3 \cdot 5 = 15$	$2 \cdot 7 = 14$	39	420	421
$3 \cdot 7 = 21$	$2 \cdot 5 = 10$	341	420	541
$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	7	851	420	949
$5 \cdot 7 = 35$	$2 \cdot 3 = 6$	1189	420	1261
$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$	5	1739	420	1789
$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$	3	4891	420	4909
$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$	2	11021	420	11029
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$	1	44099	420	44101

Tels sont les principes sur lesquels ont été formées les quatre séries de triangles suivantes :

PREMIÈRE SÉRIE.					DEUXIÈME SÉRIE.					TROISIÈME SÉRIE.					QUATRIÈME ET DERNIÈRE SÉRIE.				
α	β	$\alpha^2 - \beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2 + \beta^2$	α	β	$\alpha^2 - \beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2 + \beta^2$	α	β	$\alpha^2 - \beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2 + \beta^2$	α	β	$\alpha^2 - \beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2 + \beta^2$
2	3	5	12	13	2	3	5	12	13	2	3	5	12	13	2	3	5	12	13
3	4	7	24	25	3	4	7	24	25	3	4	7	24	25	3	4	7	24	25
4	5	9	40	41	4	5	9	40	41	4	5	9	40	41	4	5	9	40	41
5	6	11	60	61	5	6	11	60	61	5	6	11	60	61	5	6	11	60	61
6	7	13	84	85	6	7	13	84	85	6	7	13	84	85	6	7	13	84	85
7	8	15	112	113	7	8	15	112	113	7	8	15	112	113	7	8	15	112	113
8	9	17	144	145	8	9	17	144	145	8	9	17	144	145	8	9	17	144	145
9	10	19	180	181	9	10	19	180	181	9	10	19	180	181	9	10	19	180	181
10	11	21	220	221	10	11	21	220	221	10	11	21	220	221	10	11	21	220	221
11	12	23	264	265	11	12	23	264	265	11	12	23	264	265	11	12	23	264	265
12	13	25	312	313	12	13	25	312	313	12	13	25	312	313	12	13	25	312	313
13	14	27	364	365	13	14	27	364	365	13	14	27	364	365	13	14	27	364	365
14	15	29	420	421	14	15	29	420	421	14	15	29	420	421	14	15	29	420	421
15	16	31	480	481	15	16	31	480	481	15	16	31	480	481	15	16	31	480	481
16	17	33	544	545	16	17	33	544	545	16	17	33	544	545	16	17	33	544	545
17	18	35	612	613	17	18	35	612	613	17	18	35	612	613	17	18	35	612	613
18	19	37	684	685	18	19	37	684	685	18	19	37	684	685	18	19	37	684	685
19	20	39	760	761	19	20	39	760	761	19	20	39	760	761	19	20	39	760	761
20	21	41	840	841	20	21	41	840	841	20	21	41	840	841	20	21	41	840	841
21	22	43	924	925	21	22	43	924	925	21	22	43	924	925	21	22	43	924	925
22	23	45	1012	1013	22	23	45	1012	1013	22	23	45	1012	1013	22	23	45	1012	1013
23	24	47	1104	1105	23	24	47	1104	1105	23	24	47	1104	1105	23	24	47	1104	1105
24	25	49	1200	1201	24	25	49	1200	1201	24	25	49	1200	1201	24	25	49	1200	1201
25	26	51	1300	1301	25	26	51	1300	1301	25	26	51	1300	1301	25	26	51	1300	1301
26	27	53	1404	1405	26	27	53	1404	1405	26	27	53	1404	1405	26	27	53	1404	1405
27	28	55	1512	1513	27	28	55	1512	1513	27	28	55	1512	1513	27	28	55	1512	1513
28	29	57	1624	1625	28	29	57	1624	1625	28	29	57	1624	1625	28	29	57	1624	1625
29	30	59	1740	1741	29	30	59	1740	1741	29	30	59	1740	1741	29	30	59	1740	1741
30	31	61	1860	1861	30	31	61	1860	1861	30	31	61	1860	1861	30	31	61	1860	1861
31	32	63	1984	1985	31	32	63	1984	1985	31	32	63	1984	1985	31	32	63	1984	1985
32	33	65	2112	2113	32	33	65	2112	2113	32	33	65	2112	2113	32	33	65	2112	2113
33	34	67	2244	2245	33	34	67	2244	2245	33	34	67	2244	2245	33	34	67	2244	2245
34	35	69	2380	2381	34	35	69	2380	2381	34	35	69	2380	2381	34	35	69	2380	2381
35	36	71	2520	2521	35	36	71	2520	2521	35	36	71	2520	2521	35	36	71	2520	2521
36	37	73	2664	2665	36	37	73	2664	2665	36	37	73	2664	2665	36	37	73	2664	2665
37	38	75	2812	2813	37	38	75	2812	2813	37	38	75	2812	2813	37	38	75	2812	2813
38	39	77	2964	2965	38	39	77	2964	2965	38	39	77	2964	2965	38	39	77	2964	2965
39	40	79	3120	3121	39	40	79	3120	3121	39	40	79	3120	3121	39	40	79	3120	3121
40	41	81	3280	3281	40	41	81	3280	3281	40	41	81	3280	3281	40	41	81	3280	3281
41	42	83	3444	3445	41	42	83	3444	3445	41	42	83	3444	3445	41	42	83	3444	3445
42	43	85	3612	3613	42	43	85	3612	3613	42	43	85	3612	3613	42	43	85	3612	3613
43	44	87	3784	3785	43	44	87	3784	3785	43	44	87	3784	3785	43	44	87	3784	3785
44	45	89	3960	3961	44	45	89	3960	3961	44	45	89	3960	3961	44	45	89	3960	3961
45	46	91	4140	4141	45	46	91	4140	4141	45	46	91	4140	4141	45	46	91	4140	4141
46	47	93	4324	4325	46	47	93	4324	4325	46	47	93	4324	4325	46	47	93	4324	4325
47	48	95	4512	4513	47	48	95	4512	4513	47	48	95	4512	4513	47	48	95	4512	4513
48	49	97	4704	4705	48	49	97	4704	4705	48	49	97	4704	4705	48	49	97	4704	4705
49	50	99	4900	4901	49	50	99	4900	4901	49	50	99	4900	4901	49	50	99	4900	4901
50	51	101	5100	5101	50	51	101	5100	5101	50	51	101	5100	5101	50	51	101	5100	5101
51	52	103	5304	5305	51	52	103	5304	5305	51	52	103	5304	5305	51	52	103	5304	5305
52	53	105	5512	5513	52	53	105	5512	5513	52	53	105	5512	5513	52	53	105	5512	5513
53	54	107	5724	5725	53	54	107	5724	5725	53	54	107	5724	5725	53	54	107	5724	5725
54	55	109	5940	5941	54	55	109	5940	5941	54	55	109	5940	5941	54	55	109	5940	5941
55	56	111	6160	6161	55	56	111	6160	6161	55	56	111	6160	6161	55	56	111	6160	6161
56	57	113	6384	6385	56	57	113	6384	6385	56	57	113	6384	6385	56	57	113	6384	6385
57	58	115	6612	6613	57	58	115	6612	6613	57	58	115	6612	6613	57	58	115	6612	6613
58	59	117	6844	6845	58	59	117	6844	6845	58	59	117	6844	6845	58	59	117	6844	6845
59	60	119	7080	7081	59	60	119	7080	7081	59	60	119	7080	7081	59	60	119	7080	7081
60	61	121	7320	7321	60	61	121	7320	7321	60	61	121	7320	7321	60	61	121	7320	7321
61	62	123	7564	7565	61	62	123	7564	7565	61	62	123	7564	7565	61	62	123	7564	7565
62	63	125	7812	7813	62	63	125	7812	7813	62	63	125	7812	7813	62	63	125	7812	7813
63	64	127	8064	8065	63	64	127	8064	8065	63	64	127	8064	8065	63	64	127	8064	8065
64	65	129	8320	8321	64	65	129	8320	8321	64	65	129	8320	8321	64	65	129	8320	8321
65	66	131	8580	8581	65	66	131	8580	8581	65	66	131	8580	8581	65	66	131	8580	8581
66	67	133	8844	8845	66	67	133	8844	8845	66	67	133	8844	8845	66	67	133	8844	8845
67	68	135	9112	9113	67	68	135	9112	9113	67	68	135	9112	9113	67	68	135	9112	9113
68	69	137	9384	9385	68	69	137	9384	9385	68	69	137	9384	9385	68	69	137	9384	9385
69	70	139	9660	9661	69	70	139	9660	9661	69	70	139	9660	9661	69	70	139	9660	9661
70	71	141	9940	9941	70	71	141	9940	9941	70	71	141	9940	9941	70	71	141	9940	9941
71	72	143	10224	10225	71	72	143	10224	10225	71	72	143	10224	10225	71	72	143	10224	10225
72	73	145	10512	10513	72	73	145	10512	10513	72	73	145	10512	10513	72	73	145	10512	10513
73	74	147	10804	10805	73	74	147	10804	10805	73	74	147	10804	10805	73	74	147	10804	10805
74	75	149	11100	11101	74	75	149	11100	11101	74	75	149	11100	11101	74	75	149	11100	11101
75	76	151	11400	11401	75	76	151	11400	11401	75	76	151	11400	11401	75	76	1		