

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANATOLE DE CALIGNY

**Expériences sur les oscillations de l'eau dans une
grande conduite de Paris**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 6 (1841), p. 89-104.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__89_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

EXPÉRIENCES

SUR LES

OSCILLATIONS DE L'EAU DANS UNE GRANDE CONDUITE DE PARIS [*];

PAR ANATOLE DE CALIGNY.

[Présentées à l'Académie des Sciences, le 16 mars 1840.]

Objet de ces expériences.

Il faut, à partir de la naissance du mouvement de l'eau dans un tuyau de conduite, qu'il y ait un certain chemin parcouru relativement au diamètre, pour que le rapport de la vitesse de la couche frottante sur la paroi, à la vitesse moyenne dans un même instant, devienne aussi grand que dans un mouvement parvenu à l'uniformité. En effet, la vitesse ou le retard d'une couche de liquide ne peut pas se transmettre instantanément à la masse totale.

Ce qui vient d'être dit ne doit pas s'appliquer aux vitesses extrêmement petites, à cause des phénomènes de la viscosité qui peut s'opposer à la séparation des filets liquides. Or le seul coefficient du frottement dont on ait à tenir compte dans les vitesses un peu grandes, dépend, comme on sait, du *rapport* dont il s'agit. On voit donc que, sauf pour les oscillations d'une course très petite, ce coefficient doit être moindre dans les mouvements variables que dans le mouvement uniforme, excepté pour les oscillations d'une amplitude assez grande par rapport au diamètre.

Tel est le raisonnement qui m'a guidé dans ces recherches: on conçoit cependant que les frottements pouvant venir d'un système de vibrations ou d'actions moléculaires inconnues, je devais le regarder

[*] Ces expériences ont été faites en novembre 1838. Une Commission de l'Académie des Sciences a exprimé sa satisfaction de ce que M. le Préfet de la Seine a autorisé ces expériences, sur un rapport de M. l'ingénieur en chef Mary. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. VII, p. 422.)

seulement comme une hypothèse probable avant d'en avoir vérifié le résultat par l'expérience.

*Description des tuyaux dont on s'est servi pour faire
ces expériences [*].*

L'eau est conduite des bassins Saint-Victor à un de ceux du Jardin des Plantes, par un tuyau d'environ $212^m,500$ de long et d'un peu moins de 13 centimètres de diamètre, branché à angle droit sur un gros tuyau d'environ 24 centimètres de diamètre qui fait le service dans Paris. Ces tuyaux sont en fonte. La prise d'eau de celui qui alimente le Jardin des Plantes, se faisant à une distance de l'origine du premier qui est d'environ $32^m,60$, et la vitesse n'étant pas trop grande dans le gros tuyau, nous ferons voir que le mouvement pourra être calculé, dans celui qui nous occupe, à peu près comme s'il débouchait immédiatement dans le réservoir Saint-Victor.

Un tube de verre marquait à l'autre extrémité, dans le Jardin des Plantes, le niveau de l'eau *correspondant à la pression sur l'origine du branchement dont il s'agit*, quand on ne faisait pas osciller l'eau dans ce branchement, recourbé verticalement auprès de ce tube.

Or c'est de cette pression *motrice* que nous avons à nous occuper, en étudiant d'abord de quelle manière nos résultats pourront être influencés, pendant l'oscillation dans le branchement, par les vitesses qui en résulteront dans la portion du gros tuyau qui le précède.

Avant le commencement de l'oscillation qui nous occupe, il existe déjà de la vitesse dans cette portion. Or dans chaque instant donné, le carré de la somme de cette vitesse, et de son surcroît résultant dans cette même portion de ce qu'il passe de l'eau dans le branchement, est plus grand que la somme des carrés de ces deux quantités. Si donc nous calculons des pertes de pression motrice dues au frottement dans le gros tuyau, comme si celui-ci était bouché au-delà du branchement, et que le niveau du réservoir moteur fût à la hauteur de celui de l'eau dans le

[*] Les personnes qui croiraient avoir besoin d'une figure, pourront avoir recours à celle qui est dessinée tome III, page 209 de ce *Journal*, où l'on expose des principes dont on trouvera ici l'application, et que d'ailleurs on rappellera plus loin d'une manière succincte.

tube de verre à l'autre extrémité, à l'époque où le niveau de ce dernier est en repos stable, nous aurons calculé des diminutions de pression motrice moindres qu'elles ne le sont en réalité.

Si d'après cela, en nous basant sur les coefficients du frottement dans le mouvement uniforme, nous parvenons à une expression du travail en frottement moindre qu'elle ne le serait en tenant compte de tout, et que cependant l'expérience nous conduise à une expression encore moindre, nous n'en serons que plus certains de notre conclusion.

Cette manière de considérer la question permet donc de faire des expériences sur les oscillations de l'eau dans un branchement, même sans qu'il soit nécessaire d'attribuer d'avance une valeur précise à la vitesse dans le tuyau principal qui fait au loin le service par un mouvement continu [*].

Énumération des diverses causes de perte de force vive étrangères au frottement dans le tuyau horizontal, etc., etc.

Je vais faire l'énumération des causes de perte de force vive particulières au système dont je me suis servi. Par la même raison que celle dont je viens de parler, il n'est pas nécessaire de connaître rigoureusement leur valeur, pourvu qu'on soit bien sûr de ne pas les estimer trop haut. En effet, mon but, dans ces expériences, ne pouvait pas être de déterminer rigoureusement un coefficient dont la valeur se trouvait, dans cette localité, confondue avec beaucoup d'autres; mais seulement de chercher si le raisonnement qui m'a conduit à faire ces expériences est bien l'expression d'une loi de la nature.

1°. A l'origine d'un branchement, il y a une perte de pression, *par*

[*] Pendant le retour vers la source, la force vive à l'origine du gros tuyau est un obstacle. Quand cette force vive est éteinte, la colonne qui sort du branchement dans ce même tuyau se divise en deux parties: l'une sert à l'alimentation du gros tuyau en aval, l'autre rentre vers la source. C'est donc surtout à la première oscillation ascendante que s'applique ce que l'on dit dans le texte. Il est possible que, pour d'autres, l'eau parte du repos à l'origine du gros tuyau. Au reste, ces diverses considérations ont évidemment peu d'importance, si les vitesses ne sont pas trop grandes dans ce même tuyau qui, étant d'ailleurs très long, les rend assez petites par son frottement, etc.

les *déviation*s, que MM. Mallet et Genieys ont évaluée, dans leurs expériences sur le mouvement uniforme, dans un seul sens, au double de la *hauteur due* à la vitesse dans le branchement.

2°. A une petite distance de cette origine, il y a un système de trois robinets consécutifs sur le branchement. Leur section est environ les $\frac{2}{5}$ de celle du branchement. Mais comme ils sont disposés dans un même tuyau quadrangulaire, à la suite les uns des autres, ils peuvent être considérés, dans l'évaluation de la perte de force vive, comme ne formant qu'un seul robinet d'environ un demi-mètre de long.

Cependant si j'adopte cette évaluation, c'est, d'après ce qui a été dit, pour ne pas m'exposer à en prendre une trop forte, 1° parce que les trois robinets n'étaient jamais rigoureusement disposés, soit par suite du degré d'enfoncement, soit par suite de l'angle des *clefs*, de manière à ne former par leur ensemble qu'un véritable tuyau quadrangulaire; 2° parce que l'ouvrier, au lieu de faire déboucher ce tuyau quadrangulaire, en amont et en aval, dans un tuyau de diamètre égal à celui du branchement, ne l'y a fait déboucher que par des bouts de tuyau de même section, à peu près, que celle des robinets. Il résulte de là que, malgré les raccordements intérieurs, il y a des causes de contraction de la veine liquide d'autant plus sensibles, que l'*œil* des robinets est la moitié environ plus haut que large. Ainsi le bout de tuyau qui porte les robinets se trouve avoir, en définitive, 0^m,67 de long; il débouche *brusquement* dans le branchement en amont et en aval, de sorte que les principes ordinaires sur la perte de force vive maximum, dans ces sortes de rétrécissements, doivent lui être appliqués sans restriction, puisqu'il n'y a pas de raccordements à ses deux extrémités [*].

3°. Le branchement étant presque horizontal, ne pouvait se raccorder avec un tuyau vertical, dans le Jardin des Plantes, que par un tuyau coudé. Or ce tuyau coudé, d'ailleurs assez arrondi, avait un diamètre qui était seulement les $\frac{4}{5}$ de celui du branchement. Ce coude n'étant pas rigoureusement en arc de cercle, il serait difficile d'évaluer minutieuse-

• [*] La perte de force vive provenant des étranglements doit être en général calculée d'après la méthode de Borda, adoptée par M. Navier. Je l'ai constatée par des expériences directes, dont je donnerai le détail dans un autre article. L'évaluation de MM. Eytelwein, d'Aubuisson, etc., serait d'ailleurs à l'avantage de mes conclusions.

ment sa résistance, d'ailleurs peu importante, par rapport à la somme de toutes les autres. On peut la calculer comme s'il eût été en arc de cercle de 0^m,50 de diamètre. Il faut en outre tenir compte de ce que le tuyau de plomb sur lequel était pris ce coude, avait une longueur d'environ 1^m,60, et de ce que le frottement est en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres.

4°. Ce tuyau de plomb se joignait à une tubulure de même diamètre, disposée sous une soupape d'une espèce particulière, dont la chambre portait elle-même en-dessus une seconde tubulure, aussi de même diamètre, sur laquelle on adaptait successivement différents tuyaux d'ascension, dont chacun avait un diamètre constant. Or quand ces tuyaux d'ascension n'avaient pas le même diamètre que cette tubulure, il y avait ou une contraction ou un évasement brusque de la colonne.

5°. Il fallait tenir compte du frottement dans ces tuyaux d'ascension, quand ils étaient d'un diamètre moindre que le reste du système, ce frottement étant en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres.

6°. Il y avait une cause de perte de force vive dans le passage par la soupape. Pour que l'on pût facilement tourner celle-ci, je ne l'avais point disposée en clapet ordinaire, mais elle tournait autour de son centre de figure, à la manière d'une *clef de poêle*. Or comme on n'avait pas encore exécuté de soupape de ce genre, l'ingénieur avait désiré y établir une articulation intérieure, qui augmentait les dimensions de sa chambre. Il résultait de là que la colonne liquide déjà étranglée dans le tuyau de plomb, avait à traverser, avant d'arriver à la tubulure supérieure, une chambre d'une hauteur et d'un diamètre à peu près doubles de celui des tubulures. Il n'est pas nécessaire d'en donner un dessin pour l'objet qu'on se propose ici.

J'ai depuis exécuté cette soupape sans articulation, et en me débarrassant de cette cause de perte de force vive; mais ne l'ayant fait que pour un diamètre moindre, je me suis contenté des résultats obtenus au moyen de la première.

7°. Quoique l'on tournât la soupape très vite, comme l'eau montait aussi très vite dans le tuyau disposé en dessus qui en contenait peu à cette époque, il y avait un étranglement momentané variable, sur une longueur de chemin parcouru, très comparable au diamètre de la tubulure.

8°. Dans une conduite rectiligne *en service*, l'air est toujours mieux expulsé que dans un tuyau qu'il fallait fermer pendant l'intervalle des expériences, pour ne pas perdre inutilement l'eau de la ville. On s'est au reste assuré, surtout par la régularité des ascensions et par la marche générale des résultats, que cette cause de perte ne devait pas être très importante, malgré les petites anomalies.

9°. Il y avait de légères pertes d'eau et je me suis assuré, par le moyen d'orifices pratiqués successivement sur la colonne, que ces pertes diminuaient bien réellement la hauteur des oscillations, comme il est facile de s'en rendre compte. Mais cette cause de perte de hauteur n'était pas non plus essentielle, et n'avait pas d'ailleurs la même influence pendant l'oscillation descendante.

10°. Les tuyaux partiels, à la pose desquels j'avais assisté, en mesurant leur diamètre, s'emboîtaient comme à l'ordinaire les uns dans les autres, au moyen de renflements, tandis que les tuyaux de Grenoble, sur lesquels M. Gueymard, *Annales des Mines*, 1829, a vérifié les formules de Prony, se rapprochaient davantage, dans leur mode d'assemblage, des petits tuyaux de Bossut et de Dubuat.

11°. Il y a un coude sur le gros tuyau qui part directement du bassin Saint-Victor, mais, *par prudence*, nous ferons abstraction des diverses résistances passives dans cette portion de l'appareil, etc., pour ne pas nous exposer à les exagérer dans nos comparaisons avec le mouvement uniforme.

Détails sur la méthode d'expérience.

J'ai déjà parlé d'un tube de verre branché au-dessous de la soupape, auprès du tuyau d'ascension, et s'élevant de façon à indiquer la pression motrice à l'origine du branchement avant l'expérience. Quand on voulait considérer des oscillations, on bouchait ce tube de verre avec un robinet particulier, afin d'éviter la perte de travail provenant des oscillations de l'eau dans son intérieur. Son diamètre était de 0^m,013, afin qu'on n'eût pas à s'occuper sérieusement de la dénivellation provenant de la capillarité.

Un autre tube de verre, de même diamètre, portant également un robinet, était disposé au bas du tuyau d'ascension, un peu au-dessus de la soupape, afin de marquer aussi le niveau de l'eau dans un tuyau

de décharge, recourbé en siphon renversé. De cette manière on était sûr du point de départ de la surface de l'eau, et de sa tranquillité au moment de ce départ; de plus on n'avait pas à s'embarrasser des mouvements de l'air, qui auraient eu lieu si l'eau avait périodiquement abandonné la chambre de la soupape. On avait soin de fermer le robinet de ce tube au moment où l'on ouvrait la soupape, pour permettre à l'eau de monter dans le tuyau d'ascension. Quand on avait achevé l'expérience, on vidait le tuyau d'ascension en tournant simplement la soupape, dont il est inutile de donner ici une description détaillée, pourvu qu'on en voie bien l'objet.

Le tuyau d'ascension était maintenu vertical, au moyen d'un plancher mobile sur trois montants. Ce tuyau était toujours plus élevé qu'il ne le fallait pour que la colonne liquide ne pût pas sortir par le haut, afin que l'on pût exactement marquer la hauteur obtenue par l'eau au-dessus du niveau de la source. Au moyen de règles divisées, on mesurait successivement les hauteurs, de moins en moins grandes, obtenues par la surface de la colonne oscillante. Comme il était important de s'assurer d'une régularité convenable, j'avais eu non-seulement la précaution de répéter chaque expérience au moins dix fois, mais de vérifier moi-même les hauteurs obtenues, en faisant redescendre à ma place un aide intelligent, auquel j'avais fait répéter la manœuvre plusieurs fois. Je ne me suis fié entièrement à lui, c'est-à-dire sans monter moi-même à sa place, que pour la quatrième série d'expériences, relative aux très petites vitesses, après en avoir vérifié d'ailleurs le premier chiffre, parce qu'elles avaient moins d'importance pour mes machines. Cette série est du reste suffisamment régulière.

Pour m'assurer si l'on tournait la soupape assez vite, j'avais pratiqué sur le tuyau d'ascension, un peu au-dessus de la surface de l'eau au moment du départ de la colonne ascendante, de petits orifices à un demi-décimètre les uns au-dessus des autres.

Ces tuyaux d'ascension étaient en fort zinc. La soupape était disposée de manière à ce qu'étant entrouverte, elle permettait, quand on voulait, à l'eau de Saint-Victor de sortir avec force dans le bassin de décharge du Jardin des Plantes, en lavant le tuyau et le dégageant de ses bulles d'air. On prenait toujours cette précaution avant de commencer l'expérience.

Exposé succinct des moyens de calcul.

Dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie le 10 juillet 1837, et qui a été publié en partie dans le tome III de ce Journal, page 209, j'ai établi la formule suivante, pour exprimer le rapport de la hauteur obtenue dans le tuyau d'ascension au-dessus du niveau du réservoir moteur, à cette hauteur dépouillée de l'effet des résistances.

x est ce rapport dans un tuyau d'ascension cylindrique;

C le chemin parcouru, dans un long tuyau horizontal [*], depuis le départ de l'oscillation ascendante, jusqu'à ce que l'eau arrive au niveau du réservoir moteur supposé constant;

D le diamètre du tuyau horizontal;

d le diamètre du tuyau d'ascension;

F une constante dépendant de l'intensité des résistances passives.

On trouve, par la géométrie, la formule suffisamment approchée pour des vitesses qui ne sont pas trop petites, et des valeurs de $\frac{C}{D}$ et de $\frac{D}{d}$ qui ne sont pas trop grandes,

$$x = \frac{1}{\frac{C}{D} F + 1}.$$

Il est clair que C est en raison de $\frac{D^2}{d^2}$, et qu'il faut d'ailleurs, quand le diamètre du tuyau d'ascension est trop petit, par rapport à l'autre, tenir compte de l'augmentation qui en résulte dans la quantité F , fonction du travail résistant en frottement, etc.

Il est d'autant plus inutile de rappeler ici la démonstration de cette formule, que M. Coriolis l'a démontrée depuis d'une autre manière dans le même volume de ce Journal, page 437.

En discutant les expériences connues sur le mouvement uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite, j'avais pris pour F une valeur approchée peu différente de celle qu'il a adoptée, comme un peu trop

[*] Dans le Mémoire dont on vient de parler, j'avais désigné par L ce qu'il est plus convenable de désigner par C , parce qu'il ne s'agit que d'un chemin parcouru, la longueur du tuyau disparaissant du résultat à cause de la compensation dans la moyenne des carrés des vitesses quand celles-ci ne sont pas trop petites, comme je l'ai développé dans le Mémoire dont il s'agit.

forte, pour le cas où les coefficients des frottements seraient les mêmes que dans le mouvement uniforme à *grandes vitesses*, et qui est $\frac{1}{51}$, en ne s'occupant pas de ce qui se passe quand le tuyau d'ascension est trop étroit pour que l'on puisse négliger son frottement.

Dans le même Mémoire, je suis parvenu au résultat suivant très commode pour les observations.

Abstraction faite du frottement dans le tuyau d'ascension, supposé assez court par rapport au tuyau horizontal, si la résistance passive à chaque instant n'était proportionnelle qu'aux simples vitesses, les oscillations diminueraient successivement de hauteur au-dessus du réservoir, comme les termes d'une progression géométrique. Si l'un des termes de la résistance est proportionnel aux carrés des vitesses, les oscillations diminueront moins rapidement; elles diminueront au contraire plus rapidement s'il y a un terme indépendant des vitesses.

Une autre règle fournit un moyen très commode d'observer ce qui se passe dans les très petites vitesses, sans diminuer les hauteurs des oscillations. Les vitesses n'étant pas d'ailleurs les mêmes au centre qu'à la paroi, il est toujours prudent de ne pas trop compter sur les hauteurs à quelques millimètres près, quoique, pour un tuyau d'ascension vertical, la surface de la colonne oscillante parût assez sensiblement horizontale même quand elle était très large, les vitesses ascensionnelles n'étant pas très grandes.

Cette règle consiste en ce que, si le tuyau horizontal est très long, par rapport au tuyau vertical ou d'ascension, les durées des oscillations sont en raison du rapport du diamètre de celui-ci au diamètre de l'autre, ainsi que la vitesse moyenne dans ce tuyau horizontal.

La longueur du pendule, dont les oscillations seraient égales en durée à celles de la colonne moyenne, est à peu près double de ce qu'elle serait pour un siphon renversé de diamètre constant, en supposant ici le tuyau d'ascension d'un diamètre égal à celui du tuyau horizontal, si celui-ci débouchait directement dans le réservoir.

Ainsi, dans le cas présent, ce pendule aurait plus de 212^m,50, parce qu'il faut tenir compte du tuyau coudé, de la colonne variable contenue dans le tuyau d'ascension, et de ce que le tuyau horizontal ne débouche pas directement dans le réservoir, mais par une portion de tuyau d'un diamètre, il est vrai, beaucoup plus grand, ce qui réduit à peu de chose

l'importance de la force vive contenue dans cette portion. J'ai d'ailleurs toujours disposé mes expériences de façon à ne point établir de conclusions au moyen de légères différences dans diverses séries. Je ne me suis permis d'en établir qu'au moyen de phénomènes qui, étant suffisamment répétés, n'exigeaient point d'habileté dans l'expérimentateur.

Les vitesses moyennes du niveau oscillant ne sont point proportionnelles aux courses de chaque oscillation dans le tuyau horizontal. Pour des chemins égaux dans ce tuyau, la course dans le tuyau d'ascension est d'autant plus *profonde* que celui-ci est plus étroit, d'où l'on conclut que c'est pour les tuyaux d'ascension les plus étroits que la vitesse moyenne est la plus grande dans le tuyau horizontal. Cette remarque était essentielle, parce que les longueurs des courses *dans le tuyau horizontal* sont, ainsi que les vitesses, des éléments qui influent, comme on verra, sur les coefficients des frottements de l'eau contre la paroi.

Résultats des calculs faits sur le tableau d'expériences.

En comparant la marche des décroissements de hauteur des oscillations, dans la première et dans la dernière série d'expériences, on voit que ces décroissements sont, dans leur ensemble, à peu près aussi rapides pour celle-ci que pour l'autre, quoique le tuyau d'ascension étant plus étroit, la quantité C soit moindre.

Cela indique que s'il n'y a pas, dans l'expression de la résistance, un terme constant indépendant des vitesses, il y a au moins dans les très petites vitesses une espèce toute particulière de résistance. Je l'avais déjà remarqué dans les *Annales des Mines*, t. XIII, en discutant les expériences faites, malheureusement très en petit, sur les oscillations de l'eau dans les siphons, par Dubuat, et dans le raisonnement placé en tête de cet article j'en ai rappelé la raison. Ce n'est donc que pour les vitesses et les courses, suffisamment grandes dans le tuyau horizontal, que nous pouvons étudier la diminution des coefficients ordinaires du frottement dans le mouvement oscillatoire.

Quant à ces très petites vitesses, dont au reste les ingénieurs n'auront pas en général à s'occuper dans la construction des machines oscillantes, on ne doit pas s'attendre à y voir une résistance rigoureusement indépendante de la vitesse, puisqu'il est évident que l'ordre des vitesses des

filets du centre à la paroi dépend du chemin parcouru à partir de la naissance du mouvement oscillatoire, et qu'il n'y a rien, par conséquent, de constant dans les vitesses relatives de séparation intérieure.

Reprenant la première série d'expériences, on trouve que le déchet total dans la hauteur peut être expliqué, à la rigueur, comme s'il n'y avait pas de terme bien sensible de la résistance en frottement, fonction des simples vitesses. Ce terme existe cependant, nous avons vu qu'il se manifeste dans les très petites vitesses; et en discutant la seconde série d'expériences, où *les vitesses sont plus grandes que dans la première*, on trouve que le déchet ne peut être expliqué sans avoir recours au genre de résistances qui le constituent.

Il résulte de là que le terme proportionnel aux carrés des vitesses était diminué quand le chemin parcouru, à chaque oscillation, dans le tuyau horizontal, n'était qu'une vingtaine de fois le diamètre de celui-ci; mais que cela cessait d'être vrai pour un chemin triple à chaque oscillation.

Ce résultat de l'expérience confirme celui que j'avais indiqué par le raisonnement ci-dessus, sans pouvoir, il est vrai, annoncer exactement dans quelles limites il devait être vérifié.

Le même raisonnement faisait pressentir aussi une diminution dans le terme proportionnel aux simples vitesses, mais une diminution moins importante, parce qu'elle dépend d'un rapport simple, au lieu de dépendre de son carré.

Or, dans la première série, on trouve que ce terme serait bien suffisant pour expliquer le déchet, si son coefficient n'était pas moindre que dans le mouvement uniforme. Il diminue donc aussi, quoique nous ne puissions pas séparer complètement sa valeur de celle des autres [*].

On voit d'après cela qu'il doit être avantageux, abstraction faite de toute élévation d'eau, de pouvoir conduire de l'eau *par un mouvement variable*, mais cela ne peut être vrai que dans de justes limites.

[*] L'ensemble des résultats du tableau suffirait pour rassurer sur les causes d'erreur dont on a parlé dans la note de la page 91, etc.

En disant qu'au moins les premières oscillations de cette série peuvent être expliquées au moyen d'un seul des deux termes ordinaires de la résistance en frottement, j'aurais dû ajouter que c'est même en estimant à un ou deux dixièmes au plus de la résistance totale, la somme des diverses résistances étrangères énumérées p. 91-94. Mais cette évaluation, que je donne ici sans entrer dans des détails, parce qu'elle est peut-être trop faible, ce qui est d'ailleurs à l'avantage de mes conclusions, p. 94, n'est pas même nécessaire ici. En effet, d'après les évaluations de M. de Prony pour le mouvement uniforme, il est facile de voir que, dans cette série d'expériences, le terme proportionnel aux simples vitesses devrait être toujours au moins aussi grand que le terme proportionnel aux carrés. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, il y a à peu près moitié plus d'avantage à conduire l'eau par un mouvement variable que par un mouvement uniforme, *dans les limites de ces expériences, si les coefficients de M. de Prony sont exacts.*

Or, si l'on considère que, dans les petites vitesses, le troisième terme quelconque dépendant de la viscosité dénature le mode de glissement des filets, il semblera probable que, pour des colonnes *plus larges et moins longues*, et par conséquent pour des vitesses plus grandes, le coefficient principal du frottement est diminué encore bien davantage. Tel est un des résultats que je desire constater en faisant des expériences sur une machine à *flotteur oscillant*, qui a été l'objet d'un rapport favorable à l'Académie des Sciences, le 13 janvier 1840.

La troisième série d'expériences présente un ensemble de valeurs qui se lient aux autres séries, d'une manière assez continue, en ayant égard à ce que j'ai dit sur les vitesses moyennes, qui ne sont pas toujours les mêmes à courses égales dans la conduite horizontale.

La durée des oscillations n'est pas changée par les résistances passives d'une manière assez notable pour être remarquée. L'observation de cette durée a l'avantage, applicable précisément à des circonstances analogues, de permettre, au moyen des dimensions du tuyau d'ascension, de constater approximativement l'état ou la longueur d'une conduite enfoncée sous terre. Si, par exemple, le branchement horizontal, que j'ai considéré comme l'objet principal de mes expériences, se prolongeait jusqu'au réservoir moteur, au lieu de s'embrancher sur une portion de tuyau d'un diamètre beaucoup plus grand, le pendule qui

ferait ses oscillations dans un temps égal à celui des oscillations de la colonne, aurait, comme je l'ai dit, toute la longueur développée du système jusqu'à ce réservoir, si le tuyau d'ascension avait le même diamètre.

On peut encore, par un moyen analogue, découvrir si le déchet d'une conduite provient d'un dépôt régulier, car cela correspond à une augmentation du rapport de la section du tuyau d'ascension à celle de la conduite.

Je dois d'ailleurs prévenir que la mesure *rigoureuse* de la longueur d'une conduite n'est point indispensable dans ces expériences sur le frottement de l'eau dans les oscillations, puisque si la conduite est plus longue, les vitesses frottantes sont moindres, et que cela ferait même rigoureusement compensation quant au travail résistant en frottement dans un tuyau de diamètre constant, si le frottement était à chaque instant proportionnel au carré de la vitesse de la surface.

Quant aux portions élargies, soit à l'origine, soit au-dessus de la soupape, le frottement étant en raison inverse des cinquièmes puissances des diamètres, et ces portions n'étant que des fractions assez peu considérables de la longueur totale développée, il est clair que nous n'avons pas à nous en occuper, dans un genre d'expériences où l'on ne tire des conséquences qu'au moyen de résultats qui, s'ils étaient faux, le seraient du simple au double, et qui s'accordent dans leur marche générale.

Je dois prévenir aussi que, n'ayant pas de montre à secondes à l'époque où je fis ces expériences, presque toutes indépendantes de la mesure du temps, je me contentais d'observer assez d'oscillations pour qu'elles fussent comprises dans un nombre rond de minutes, en négligeant les petites erreurs à peine sensibles qui résultaient de ce mode d'observation.

Les tuyaux d'ascension ne pouvant être, comme on le pense bien, rigoureusement cylindriques, cela pourrait induire dans de légères erreurs, si l'on ne considérait pas plusieurs oscillations. Mais il est clair que ces petites erreurs se détruisent en partie, dans chaque groupe de deux oscillations, c'est-à-dire entre deux chiffres du tableau, puisqu'il y a une descente et une ascension.

La hauteur de l'eau du bassin Saint-Victor, au-dessus de l'origine du

branchement de 212^m, 50 environ de long, dont je me suis servi, n'a pas été mesurée exactement, mais elle était d'environ 8^m. Ce tuyau s'élève, comme je l'ai dit, par une pente douce, jusqu'au Jardin des Plantes, à l'entrée duquel il monte d'une manière plus sensible. Pendant l'oscillation, la pression sur l'extrémité est alternativement plus faible et plus forte que pendant l'équilibre.

Ainsi, en définitive, les pressions sont très comparables à la pression atmosphérique, observation indispensable qui n'avait pu être faite dans les petits siphons de Dubuat.

Malgré cette hauteur de pression, nous trouvons, pour les résistances passives, des coefficients, moindres que les expérimentateurs ne les ont trouvés pour le mouvement uniforme dans les tuyaux de fonte; on n'a donc aucune raison de penser que ces résistances soient ici fonction de la pression comme dans le frottement des corps solides.

CONCLUSIONS.

Il y a, à la naissance du mouvement, une espèce toute particulière de résistances passives, qui correspond sans doute à la constante trouvée par divers auteurs dans le mouvement uniforme.

Mais bientôt les filets liquides glissent les uns sur les autres, selon une loi qui change le mode d'action des résistances passives. Les deux termes de l'expression de la résistance en frottement dans le mouvement uniforme sont diminués en somme d'environ moitié, *si les coefficients de M. de Prony sont exacts*, et c'est le terme proportionnel aux carrés des vitesses qui paraît être le plus diminué.

Ainsi, pour le mouvement oscillatoire de l'eau dans les tuyaux de conduite, les coefficients des frottements sont moindres que dans le mouvement uniforme, quand les vitesses ne sont pas excessivement petites. Mais il ne faut pas perdre de vue que cela est vrai seulement dans le cas où les amplitudes ou courses des oscillations ne sont pas trop grandes par rapport au diamètre de la conduite. Si cette course dépasse certaines limites, il finit par s'établir un mode de glissement intérieur qui se rapproche de celui du mouvement uniforme. Alors il est prudent de ne plus compter sur la diminution des coefficients des frottements, même quand les vitesses sont grandes.

Il ne paraît pas que la pression exerce d'influence sensible sur les

frottements. Quant aux durées des oscillations, elles sont sensiblement indépendantes des résistances passives.

Ces conclusions me semblent devoir être considérées, abstraction faite des machines de mon invention, comme applicables à l'hydraulique pratique. Cependant il faut remarquer que les plus grandes vitesses *moyennes* considérées dans cette Note n'étaient pas de 0^m,4, quoique la loi générale me semble incontestable.

NOTA. Depuis que ces conclusions sont imprimées, j'apprends que M. Mary, ingénieur en chef directeur des eaux de Paris, a fait des expériences inédites sur le mouvement permanent de l'eau dans des tuyaux de conduite de trois à quatre décimètres de diamètre et de trois à quatre mille mètres de long, où le débit, calculé par les formules de Prony, était augmenté d'environ un cinquième, pour diverses vitesses que l'on rencontre dans la pratique, et dont les plus grandes étaient de près de 1 mètre par seconde. On conçoit que des formules établies au moyen de tubes d'un petit diamètre, ou de tuyaux plus ou moins obstrués, peuvent bien avoir donné des résistances trop fortes. Or, un cinquième d'augmentation dans le débit réduisant aux deux tiers environ la somme des coefficients des résistances passives, on pourrait croire que le résultat de la présente Note provient simplement d'une erreur dans les coefficients Prony. Il est donc essentiel de remarquer que ces coefficients se sont retrouvés en entier dans mes expériences, quand le chemin parcouru à chaque oscillation dans le tuyau de treize centimètres de diamètre, était une soixantaine de fois ce diamètre. Je n'examine pas en ce moment si cela provenait des résistances étrangères au frottement. J'insiste seulement sur ce que, pour des courses moindres, les coefficients des résistances passives étaient réellement *diminués par la nature du mouvement oscillatoire*; et je pense que si, dans des tuyaux de dimensions beaucoup plus grandes, ils ont été réduits aux deux tiers pour le mouvement uniforme, ils pourront être réduits à un tiers pour le mouvement oscillatoire, ce qui permettra d'élever l'eau à des hauteurs triples de celles que j'avais d'abord calculées, dans la machine de mon invention, qui a été l'objet d'un Rapport et d'un Mémoire de M. Coriolis, tome III de ce Journal, page 437.

Diamètre du tuyau d'ascension.	Hauteur du niveau de l'eau dans le tube de verre supérieur au-dessus du niveau de l'eau au bas du tuyau d'ascension, avant le commencement de l'oscillation.	Hauteurs obtenues successivement au-dessus du niveau de l'eau du tube de verre supérieur. On a négligé par prudence les millimètres, pages 94 et 97.	Durée des oscillations.
0 ^m , 105.....	2 ^m , 33.....	$\left. \begin{array}{l} 1,83 \\ 1,27 \\ 0,97 \\ 0,74 \end{array} \right\}$ Pour une diminution de 0 ^m , 2 sur la hauteur de la deuxième colonne il y a une diminution d'environ 0 ^m , 15 sur ce premier chiffre; les suivants diminuent selon une loi analogue [*].	5 oscillations environ par minute.
0 ^m , 20.....	2 ^m , 054.....	$\left. \begin{array}{l} 0,97 \\ 0,51 \\ 0,37 \\ 0,257 \end{array} \right\}$ Pour des hauteurs de la deuxième colonne un peu moindres, on a trouvé des oscillations d'une hauteur un peu moindre, mais diminuant selon une loi analogue.	Durée à peu près double de celle des oscillations de la série précédente.
0 ^m , 16.....	2 ^m , 1.....	$\left. \begin{array}{l} 1,38 \\ 0,80 \\ 0,62 \end{array} \right\}$ Même observation que pour la série précédente.	A peu près une fois et demie la première.
0 ^m , 08.....		$\left. \begin{array}{l} 1,89 \\ 1,38 \\ 1,08 \\ 0,80 \end{array} \right\}$ Même observation que pour les deux précédentes séries.	

[*] Le déchet total a été, plusieurs fois, moindre qu'on ne l'indique dans l'un et l'autre cas, surtout relativement à la dernière oscillation. Quant à la première oscillation, on s'est assuré, par des expériences préliminaires, que les mouvements intérieurs, causés par la soupape, n'avaient pas beaucoup d'importance relativement à la hauteur obtenue.