

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une formule de M. Jacobi

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 6 (1841), p. 69-73.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_69_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_69_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur une formule de M. Jacobi;

PAR J. LIOUVILLE.

1. Cette formule donne une expression simple de la différentielle

$$\frac{d^{i-1} \cdot (1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^{i-1}},$$

où i désigne un nombre entier positif quelconque. Pour trouver la différentielle proposée que nous représenterons par θ ou θ_i , on pourrait se servir de la formule connue

$$(1) \quad \frac{d^\mu \cdot pq}{dz^\mu} = p \frac{d^\mu q}{dz^\mu} + \frac{\mu}{1} \frac{dp}{dz} \frac{d^{\mu-1} q}{dz^{\mu-1}} + \dots,$$

dans laquelle on ferait

$$\mu = i - 1, \quad p = (1+z)^{i-\frac{1}{2}}, \quad q = (1-z)^{i-\frac{1}{2}},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{d^\mu p}{dz^\mu} &= (i - \frac{1}{2}) (i - \frac{3}{2}) \dots \left(i - \frac{2m-1}{2} \right) \cdot (1+z)^{i-\frac{2m+1}{2}}, \\ \frac{d^\mu q}{dz^\mu} &= (-1)^m (i - \frac{1}{2}) (i - \frac{3}{2}) \dots \left(i - \frac{2m-1}{2} \right) \cdot (1-z)^{i-\frac{2m+1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous suivrons ici une autre marche; mais il nous sera utile d'avoir reconnu que, d'après les calculs indiqués, θ s'évanouit pour $z = 1$, tandis que pour cette même valeur $z = 1$, le rapport de θ à $\sqrt{1-z^2}$ devient égal à

$$(-1)^{i-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2i-1),$$

cette dernière quantité étant fournie tout entière par le seul premier terme $p \frac{d^\mu q}{dz^\mu}$ de θ , puisque (à cause du facteur $1 - z$ qui s'y trouve affecté d'un exposant au moins égal à $\frac{3}{2}$) le rapport des termes suivants à $\sqrt{1 - z^2}$ converge évidemment vers zéro quand z converge vers l'unité.

Posons

$$y = (1 - z^2)^{i-\frac{1}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dz} = -(2i - 1)(1 - z^2)^{i-\frac{3}{2}} \cdot z,$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -(2i - 1)(1 - z^2)^{i-\frac{3}{2}} + (2i - 1)(2i - 3)(1 - z^2)^{i-\frac{5}{2}} \cdot z^2,$$

et

$$(2) \quad (1 - z^2) \frac{d^2y}{dz^2} + (2i - 3)z \frac{dy}{dz} + (2i - 1)y = 0:$$

différencions $(i - 1)$ fois les deux membres de l'équation (2), et, pour obtenir les différentielles à indice $(i - 1)$ des produits

$$(1 - z^2) \frac{d^2y}{dz^2}, \quad z \frac{dy}{dz},$$

servons-nous de la formule (1) dans laquelle nous ferons $\mu = i - 1$, puis successivement

$$p = 1 - z^2 \quad \text{et} \quad q = \frac{d^2y}{dz^2}, \quad p = z \quad \text{et} \quad q = \frac{dy}{dz};$$

rappelons-nous de plus que $\frac{d^{i-1}y}{dz^{i-1}} = \theta$, et nous trouverons sans difficulté

$$(3) \quad (1 - z^2) \frac{d^2\theta}{dz^2} - z \frac{d\theta}{dz} + i^2\theta = 0.$$

En changeant de variable indépendante, on peut toujours faire disparaître le second terme d'une équation linéaire quelconque. Dans le cas de l'équation (3), il suffit pour cela de faire $z = \cos x$: il vient ainsi

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + i^2\theta = 0,$$

d'où

$$\vartheta = A \cos ix + B \sin ix.$$

Pour $x = 0$, z se réduit à l'unité; d'après ce qu'on a vu plus haut, on a donc alors

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\vartheta}{\sin x} = \frac{\vartheta}{\sqrt{1-z^2}} = (-1)^{i-1} . 3 . 5 . . . (2i-1),$$

d'où l'on conclut

$$A = 0, \quad iB = (-1)^{i-1} . 3 . 5 . . . (2i-1).$$

De là résulte finalement

$$(4) \quad \vartheta \text{ ou } \vartheta_i = (-1)^{i-1} . 3 . 5 . 7 . . . (2i-1) \frac{\sin ix}{i} :$$

c'est la formule que nous voulions démontrer et que M. Jacobi a employée avec succès pour la transformation d'une classe d'intégrales définies. (*Journal de M. Crelle*, T. XV, p. 3.)

2. Voici une seconde démonstration de la formule (4). Cette formule (4) est évidemment exacte quand $i = 1$: il suffit donc, pour en établir d'une manière générale l'exactitude, de faire voir que si elle est vraie pour un indice i quelconque, elle restera vraie encore lorsqu'on augmentera cet indice d'une unité.

Or on a

$$\vartheta_{i+1} = \frac{d^{i+1} (1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = \int_1^z dz \frac{d^{i+1} (1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}},$$

d'où, en faisant $z = \cos x$,

$$\vartheta_{i+1} = - \int_0^x \sin x . dx . \frac{d^{i+1} (1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}}.$$

Regardons $(1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}$ comme le produit des deux facteurs $(1-z^2)$, $(1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}$, et la formule (1) nous donnera

$$\frac{d^{i+1} (1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = (1-z^2) \frac{d^2 \vartheta_i}{dz^2} - 2(i+1)z \frac{d\vartheta_i}{dz} - i(i+1)\vartheta_i :$$

puisque $z = \cos x$, il viendra dès-lors

$$\frac{d^{i+1} \cdot (1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = \frac{d^2 \theta_i}{dx^2} + (2i+1) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{d\theta_i}{dx} - i(i+1) \theta_i,$$

de sorte qu'en ayant égard à la valeur de θ_i fournie par la formule (4), on a

$$\frac{d^{i+1} \cdot (1-z^2)^{i+\frac{1}{2}}}{dz^{i+1}} = (-1)^{i-1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i+1) \cdot \frac{\cos(i+1)x}{\sin x},$$

d'où

$$\theta_{i+1} = (-1)^i \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i+1) \int_0^x \cos(i+1)x dx,$$

c'est-à-dire

$$\theta_{i+1} = (-1)^i \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i+1) \cdot \frac{\sin(i+1)x}{i+1},$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

3. Pour déduire de la formule (4) la transformation d'intégrales définies dont j'ai parlé plus haut, M. Jacobi observe que quand une fonction w et ses différentielles, jusqu'à l'ordre $(i-1)$, s'évanouissent aux limites de l'intégrale, l'intégration par parties fournit en général

$$\int w \frac{d^i v}{dz^i} dz = (-1)^i \int v \frac{d^i w}{dz^i} dz;$$

en posant donc

$$v = f(z), \quad w = (1-z^2)^{i-\frac{1}{2}},$$

et prenant -1 et $+1$ pour limites des intégrales, il viendra

$$\int_{-1}^{+1} f^{(i)}(z) (1-z^2)^{i-\frac{1}{2}} dz = (-1)^i \int_{-1}^{+1} f(z) \frac{d^i (1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^i} dz.$$

Or, en différentiant la formule (4), on trouve

$$\frac{d^i (1-z^2)^{i-\frac{1}{2}}}{dz^i} dz = (-1)^{i-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2i-1) \cos ix \cdot dx;$$

dès lors, à cause de $z = \cos x$, l'équation précédente fournira

$$(5) \quad \int_0^\pi f^{(i)}(\cos x) \sin^{2i} x dx = 3.5.7 \dots (2i-1) \int_0^\pi f(\cos x) \cos i x dx;$$

cette belle formule de M. Jacobi avait été déjà transcrite dans ce Journal (T. I, p. 195); elle suppose, comme on voit, que la fonction $f(z)$ et ses différentielles, jusqu'à l'ordre $(i-1)$, restent continues entre les limites $z = -1$, $z = 1$.

4. Si l'on désigne par r un paramètre indéterminé, et qu'on pose

$$f(z) = \psi(rz),$$

la formule (5) nous donnera

$$\int_0^\pi \psi(r \cos x) \cos i x dx = \frac{r^i}{3.5 \dots (2i-1)} \int_0^\pi \psi^{(i)}(r \cos x) \sin^{2i} x dx;$$

l'intégrale placée dans le second membre peut être décomposée en deux autres, l'une prise de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$, l'autre prise de $x = \frac{\pi}{2}$ à $x = \pi$ et que l'on réduira aux limites de la première en y remplaçant x par $\pi - x$. Cela posé, il suffit de jeter les yeux sur une formule que j'ai donnée à la page 58 du XXIV^{me} cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, pour comprendre combien la transformation de M. Jacobi sera utile dans le calcul des différentielles à indices quelconques.

Observons encore en passant que dans le cas particulier où l'on prend pour $f(z)$ une exponentielle e^{rz} , la formule (5) conduit à une équation simple que l'on peut vérifier de plusieurs manières, et d'où, réciproquement, l'on pourrait tirer soit la formule générale (5), soit la formule (4).