

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Problème de calcul intégral

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 6 (1841), p. 340-344.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6_340_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

PROBLÈME

DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR E. CATALAN.

Un cône du second degré à base elliptique étant donné, on le coupe par une sphère concentrique, et l'on demande de calculer la portion de la surface sphérique interceptée.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

l'équation du cône; et soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

l'équation de la sphère.

En représentant par A l'aire cherchée, on a

$$A = \iint \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Les limites de l'intégration seront données par la projection, sur le plan des xy , de la courbe d'intersection des deux surfaces. Or cette projection a pour équation

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) + y^2 \left(1 + \frac{1}{b^2} \right) = 1,$$

ou

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 1.$$

Maintenant je pose

$$\alpha x = \rho \cos \omega, \quad \beta y = \rho \sin \omega, \quad \text{d'où} \quad dx dy = \frac{1}{\alpha \beta} \rho d\rho d\omega;$$

il en résultera

$$A = \frac{4}{\alpha \beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho d\rho d\omega}{\sqrt{1 - \rho^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)}}.$$

Intégrant par rapport à ρ , l'on a

$$\begin{aligned} & \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)}} \\ &= - \frac{1}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} \sqrt{1 - \rho^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)} + C, \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)} \right].$$

Donc

$$A = \frac{4}{\alpha \beta} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)}}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} \right].$$

Pour obtenir la première intégrale, je prends $\tan \omega = u$, d'où

$$\cos^2 \omega = \frac{1}{1 + u^2}, \quad \sin^2 \omega = \frac{u^2}{1 + u^2}, \quad d\omega = \frac{du}{1 + u^2};$$

ce qui donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2}} = \int_0^{\infty} \frac{du}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{u^2}{\beta^2}} = \frac{1}{2} \pi \alpha \beta.$$

La seconde intégrale ne peut s'obtenir sous forme finie que dans le cas où $\alpha = \beta$, c'est-à-dire lorsque le cône est de révolution.

On a, pour ce cas particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}}{\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{2} \alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Donc, en mettant pour α sa valeur,

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{a} \right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \right);$$

ce que l'on peut trouver par des considérations géométriques.

Dans le cas général, je pose $\tan \omega = p \tan \theta$, d'où

$$\sin^2 \omega = \frac{p^2 \tan^2 \theta}{1 + p^2 \tan^2 \theta}, \quad \cos^2 \omega = \frac{1}{1 + p^2 \tan^2 \theta}, \quad d\omega = \frac{p}{1 + p^2 \tan^2 \theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)} &= \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{p^2 \tan^2 \theta}{\beta^2}}{1 + p^2 \tan^2 \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) + p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) \tan^2 \theta}{1 + p^2 \tan^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Ce radical se simplifiera si l'on prend

$$p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) = 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Alors la formule à intégrer devient

$$\begin{aligned} & \frac{p \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}}{1 + p^2 \tan^2 \theta} \times \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{1 + p^2 \tan^2 \theta}{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{p^2 \tan^2 \theta}{\beta^2}} \times \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 \tan^2 \theta}} \\ &= p \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \frac{d\theta}{\frac{\cos^2 \theta}{\alpha^2} + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{\beta^2}} \times \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta}} \\ &= p \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \frac{d\theta}{\frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{p^2}{\beta^2}\right) \sin^2 \theta} \times \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - p^2) \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

On a

$$p = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\alpha^2}}{1 - \frac{1}{\beta^2}}} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{b^2}}{1 + \frac{1}{a^2}}} = \sqrt{\frac{1 + b^2}{1 + a^2}};$$

comme on peut supposer $a > b$, p sera < 1 . Donc

$$1 - p^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}$$

sera une quantité positive < 1 , que l'on peut représenter par c^2 .

Enfin, la quantité

$$1 - \frac{\alpha^2 p^2}{\beta^2} = 1 - \frac{\alpha^2 - 1}{\beta^2 - 1} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

est pareillement positive, et moindre que l'unité : appelons-la n . Nous aurons, à la place de la seconde intégrale,

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{1 + b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 + b^2} \Pi_1(c, n).$$

Cette fonction elliptique complète de troisième espèce peut s'exprimer par des fonctions de première et de seconde. Pour opérer la transformation, j'emploie une formule donnée par Legendre (*Exer-*

cives, tome I, page 141) :

$$\frac{c'^2 \sin \theta' \cos \theta'}{\sqrt{1-c'^2 \sin^2 \theta'}} [\Pi_1(n, c) - F_1(c)] = \frac{\pi}{2} + F_1(c) F(c', \theta') \\ - E_1(c) F(c', \theta') - F_1(c) E(c', \theta').$$

Dans cette formule

$$c'^2 = 1 - c^2 = \frac{1+b^2}{1+a^2},$$

et

$$\sin^2 \theta' = \frac{1-n}{c'^2} = \frac{b^2}{a^2} \frac{1+a^2}{1+b^2}.$$

Elle devient donc

$$\Pi_1(n, c) = F_1(c) + \frac{a\sqrt{1+a^2}}{b} \left(\frac{\pi}{2} + \text{etc.} \right).$$

Notre intégrale est par suite

$$\frac{1}{a^2} \sqrt{1+b^2} F_1(c) + \frac{\sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2}}{ab} \left[\frac{\pi}{2} + F_1(c) F(c', \theta') - \text{etc.} \right].$$

Réunissant les deux résultats, on a

$$A = 2\pi - \frac{4b}{a\sqrt{1+a^2}} F_1(c) - 4 \left[\frac{\pi}{2} + F_1(c) F(c', \theta') - E_1(c) F(c', \theta') - F_1(c) E(c', \theta') \right] \\ = 4 \left[E_1(c) F(c', \theta') + F_1(c) E(c', \theta') - F_1(c) F(c', \theta') - \frac{b}{a\sqrt{1+a^2}} F_1(c) \right].$$

Remarque. On sait que la courbe d'intersection d'un cône à base elliptique et d'une sphère concentrique, est une *ellipse sphérique*. Il résulte donc des calculs précédents, que l'aire de l'ellipse sphérique s'exprime par une fonction elliptique de troisième espèce jointe à une quantité algébrique.

Le lecteur pourra consulter, relativement aux propriétés de l'ellipse sphérique, plusieurs Mémoires de *Fuss*, de M. *Chasles*, de M. *Gudermann*, etc.