JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STURM

Note de M. Sturm, à l'occasion de l'article précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 315-320.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__315_0>

Note de M. Sturm, *à l'occasion de l'article précédent.*

Il s'agit de déterminer la courbe qui, par sa révolution autour d'un axe (l'axe des x), engendre la surface *minimum* qui renferme un volume donné.

Ce volume étant $\pi\int y^2 dx$ et l'aire $2\pi\int y ds$, il faut poser, suivant la méthode connue,

$$\delta . \int (y^2 dx + 2ay ds) = 0,$$

a étant une constante.

En considérant comme fixes les deux extrémités de la courbe, on peut ne faire varier que x, et comme la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

donne

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} d\,\delta x,$$

on aura

$$\int \left(y^2 + 2ay \frac{dx}{ds} \right) d\delta x = 0.$$

En intégrant par parties et faisant

$$\delta x = 0$$

aux deux limites, on a

$$\int \delta x . d. \left(y^2 + 2ay\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

d'où l'on conclut

$$y^2 + 2ay\frac{dx}{ds} = \text{une constante C.}$$

Chacune des constantes a et C pouvant être positive ou négative, on peut écrire

$$(1) \qquad y^2 \pm 2ay\frac{dx}{ds} \pm b^2 = 0,$$

et de là résulte

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}.$$

C'est l'équation différentielle de la courbe méridienne cherchée; le radical doit être tantôt positif, tantôt négatif; il change de signe quand y devient un maximum ou un minimum.

Si la constante b est nulle, on a un cercle ou l'axe des x.

Si b n'est pas nulle, l'équation différentielle (1) appartient à la courbe décrite par l'un des foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule sans glisser sur l'axe des x.

En effet, supposons qu'une ellipse dont les demi-axes sont a et b roule sur l'axe des x. Son foyer F décrit une courbe qui, d'après une propriété générale des épicycloïdes, a pour normale la droite menée du point F au point K où l'ellipse mobile touche l'axe OX.

En désignant par x et y les coordonnées OP, PF, du point F, on a

$$\text{FP} \quad \text{ou} \quad y = \text{KF. sin FKP}.$$

Mais FKP est le complément de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente FT à la courbe décrite par le point F. On a donc

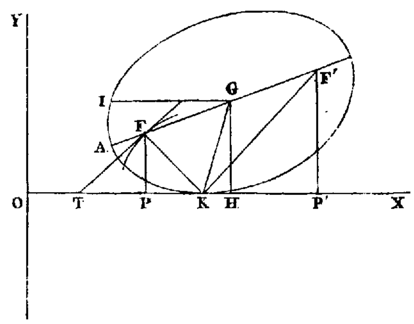
$$\sin \text{FKP} = \cos \text{FTP} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds},$$

et

$$y = \text{KF.}\frac{dx}{ds}.$$

En désignant par y' la perpendiculaire F'P' abaissée de l'autre foyer sur l'axe et observant que l'angle F'KP' est égal à FKP, on a aussi

$$y' = \mathrm{KF}'.\,\frac{dx}{ds}.$$



Ajoutant et remplaçant $\mathrm{KF} + \mathrm{KF}'$ par $2a$, il vient

$$y + y' = 2a\,\frac{dx}{ds}.$$

On a d'ailleurs

$$yy' = b^2.$$

Éliminant y', on trouve

$$y^2 - 2ay\,\frac{dx}{ds} + b^2 = 0.$$

C'est l'équation différentielle de la courbe décrite par le foyer F.

Quand l'angle FTX devient obtus, $\frac{dx}{ds}$ est négatif et l'équation devient

$$y^2 + 2ay\,\frac{dx}{ds} + b^2 = 0.$$

On trouverait la même équation

$$y^2 \pm 2ay\,\frac{dx}{ds} + b^2 = 0$$

pour la courbe décrite par l'autre foyer F'. Les courbes décrites par les deux foyers ne diffèrent, en effet, que par la position.

Cette équation, si l'on fait $b = a$, n'a pas d'autre solution réelle que

$$y = a,$$

et devient impossible si l'on suppose $b > a$.

En changeant b^2 en $-b^2$ dans ce qui précède, on verra que l'équation

$$y^2 \pm 2ay\,\frac{dx}{ds} - b^2 = 0$$

appartient aux courbes décrites par les foyers d'une hyperbole dont les demi-axes sont a et b et qui roule sur une ligne droite.

Si l'on fait rouler sur OX une parabole AK dont le foyer est F et le sommet A, on aura, d'après les propriétés connues de sa tangente,

$$\mathrm{FA} = \mathrm{FP} \cos \mathrm{AFP} = \mathrm{FP}. \cos \mathrm{PFK}.$$

L'angle PFK est égal à l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à la courbe décrite par le point F ou (x, y); on a donc

$$\cos \mathrm{PFK} = \frac{dx}{ds}.$$

Donc, en posant

$$\mathrm{FA} = a,$$

la courbe décrite par le foyer a pour équation

$$y \frac{dx}{ds} = a,$$

d'où

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

C'est la chaînette.

On trouve aussi facilement la courbe décrite par le centre G d'une ellipse qui roule sur la droite OX. Soient x et y les coordonnées de ce centre mobile G. En menant le demi-diamètre GI parallèle à OX, conjugué de GK, on a

$$\overline{\mathrm{GK}}^2 + \overline{\mathrm{GI}}^2 = a^2 + b^2,$$

$$\mathrm{GK}.\ \mathrm{GI}.\ \sin \mathrm{IGK} = ab.$$

Mais

$$\sin \mathrm{IGK} = \sin \mathrm{GKH} = \pm \frac{dx}{ds},$$

et

$$\mathrm{GK}\ \sin \mathrm{IGK} = \mathrm{GH} = y.$$

Substituant et éliminant GI, on trouve

$$y^4 + a^2 b^2 \frac{dx^2}{ds^2} = (a^2 + b^2)\, y^2 \frac{dx^2}{ds^2};$$

puis, en réduisant,

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}.$$

En remplaçant b^2 par $-b^2$, on aurait l'équation différentielle de la courbe décrite par le centre d'une hyperbole roulant sur l'axe des x.

Si l'hyperbole est équilatère, on a cette équation plus simple

$$y^2 = \pm a^2 \frac{dx}{ds},$$

ou

$$dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{a^4 - y^4}},$$

qui est un cas particulier de celle de la courbe élastique

$$y^2 \pm a^2 \frac{dx}{ds} + C = 0,$$

ou

$$dx = \frac{(C + y^2)\,dy}{\sqrt{a^4 - (C + y^2)^2}}.$$

On sait que cette dernière courbe est celle qui, parmi toutes les courbes de longueur donnée sur un plan, engendre, en tournant autour d'un axe tracé dans ce plan, le plus grand ou le plus petit volume, en supposant que la courbe doive se terminer à des points donnés ou à des lignes données. Quand les extrémités doivent se trouver à des distances données de l'axe, on a l'équation plus simple

$$y^2 = \pm a^2 \frac{dx}{ds}.$$

La discussion de ces différentes courbes présente des circonstances curieuses qu'il serait trop long d'indiquer.

On peut, en général, déterminer la courbe qu'il faut faire rouler sur une ligne droite pour qu'un certain point appartenant à cette courbe mobile décrive une autre courbe donnée par son équation différentielle.

Reprenons, par exemple, la courbe représentée par l'équation

$$y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} + b^2 = 0,$$

et supposons qu'elle soit décrite par un point F lié à une courbe mobile AK qui roule sur l'axe des x.

Désignons par r la longueur variable de la droite FK menée du point décrivant F au point K où la courbe inconnue AK touche l'axe des x, et par θ l'angle que cette droite FK fait avec une droite FA fixe par rapport à la courbe AK.

On a

$$\frac{dx}{ds} = \pm \sin \mathrm{FKP} = \pm \frac{r\,d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \pm \frac{1}{r\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2}},$$

et

$$y = r \sin \mathrm{FKP} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$\frac{1 \pm \frac{2a}{r}}{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2} + b^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$d\theta = \frac{b.d.\frac{1}{r}}{\sqrt{-1 \mp \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}}};$$

et en intégrant,

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.\cos(\theta - \alpha)},$$

équation polaire d'une ellipse dont le point F est un foyer et dont les demi-axes sont a et b.

Ce procédé, appliqué à la courbe élastique, ne donne pas un résultat simple.