JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. GASCHEAU

Remarques sur la théorie géométrique des axes permanents de rotation

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 241-266.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__241_0>

REMARQUES
SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE
DES AXES PERMANENTS DE ROTATION;

PAR G. GASCHEAU,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Inspecteur de l'Académie d'Orléans.

---

1. J'adopterai les définitions données par M. Ampère (tome V des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, page 86):

Un axe permanent, relatif à un point de sa direction, est une droite liée à un corps fixé en ce point, et telle que le mobile, ayant commencé à tourner autour de cette droite, le mouvement continue comme si elle était fixe, de sorte que les actions des forces centrifuges se détruisent mutuellement;

Le centre de rotation d'un axe permanent est le point de sa direction qu'il suffit de fixer pour que le mouvement ait lieu autour de cette droite, conformément à la condition précédente;

Un axe principal est un axe permanent relatif au centre de gravité;

Un plan principal est un plan passant par deux axes principaux.

Dans un plan quelconque il existe un point tel que l'un des axes permanents relatifs à ce point est perpendiculaire au plan. On peut appeler le point dont il s'agit, *centre de rotation du plan.*

2. Quand on passe des propriétés mécaniques des axes permanents aux caractères analytiques qui servent à les déterminer, on arrive ordinairement à une définition triple : je veux dire que l'on trouve trois conditions qui fixent les positions des trois axes rectangulaires demandés. Mais dans la question de dynamique à laquelle se rattache la découverte des lignes dont il s'agit, il y a lieu de considérer l'un de ces axes indépendamment des deux autres; il convient donc de pouvoir séparer les définitions, ou d'en établir une qui convienne à un seul axe permanent. J'emploierai la suivante, qui a l'avantage de manifester une propriété dont on ne trouve pas l'énoncé explicite dans les traités de mécanique rationnelle. Cette définition conduit directement aux équations des problèmes qui proposent de trouver les axes permanents d'un centre de rotation donné, ou le centre de rotation d'un axe permanent connu, ainsi que la condition nécessaire pour qu'une droite soit un axe permanent, etc.

3. Soit Oz un axe permanent relatif au point O; représentons par z la distance du lieu d'un élément dm de la masse du corps au plan perpendiculaire à Oz mené par le point O. Par la droite Oz je mène deux plans à volonté; soient h et h' les distances de l'élément dm à ces deux plans.

Si l'on a les deux conditions

$$(1) \qquad \int hzdm = 0, \quad \int h'zdm = 0,$$

ces intégrales définies étant étendues à toute la masse du corps, *la droite* Oz *sera un axe permanent relatif au point* O.

4. La propriété citée n° **2** consiste en ce que, les deux équations (1) étant satisfaites, *si l'on mène un troisième plan quelconque par* Oz, que l'on prenne comme ci-dessus la distance de l'élément dm à ce plan, et que l'on multiplie aussi cette distance par zdm pour former un élément différentiel analogue à $hzdm$, *la nouvelle intégrale, que l'on obtiendra comme les précédentes* (1), *sera également nulle.*

En effet, soient Ox l'intersection de ce plan avec le plan perpendiculaire à Oz; Oy la perpendiculaire au plan zOx menée par le point O; ω et ω' les angles des deux premiers plans, conduits suivant Oz (n° **2**) avec le plan zOx; et enfin x, y, z les coordonnées de l'élément dm par rapport aux trois droites rectangulaires Ox, Oy, Oz. On aura

$$h = y\cos\omega - x\sin\omega, \quad h' = y\cos\omega' - x\sin\omega';$$

d'où

$$y = \frac{h\sin\omega' - h'\sin\omega}{\sin(\omega' - \omega)};$$

et par suite

$$\int yzdm = \frac{\sin\omega' \int hzdm - \sin\omega \int h'zdm}{\sin(\omega' - \omega)}.$$

Le numérateur de cette dernière fraction est nul en vertu des relations (1); son dénominateur est différent de zéro; donc on a

$$\int yzdm = 0. \qquad C. Q. F. D.$$

5. Les problèmes énoncés n° **2** ont leurs solutions renfermées dans les équations de la question suivante :

Un corps étant rapporté à trois axes rectangulaires quelconques Gx, Gy, Gz, *trouver la direction d'un axe permanent de ce corps relatif à un point* O *dont les coordonnées sont* a, b, c.

Soient α, β, γ les angles de la droite cherchée avec les axes Gx, Gy, Gz. Conformément à la définition du n° **3**, il faut d'abord évaluer la distance de l'élément dm au plan conduit par le point O perpendiculairement à la ligne cherchée; cette distance sera

$$(2) \qquad \mathrm{R} = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos\beta + (z - c)\cos\gamma.$$

On aura ensuite à déterminer les distances du même élément à deux plans conduits à volonté par cette droite : je prendrai les deux plans qui la projettent sur les plans coordonnés xGz et yGz; alors les distances en question seront exprimées par

$$\frac{(x-a)\cos\gamma - (z-c)\cos\alpha}{\sin\beta} \quad \text{et} \quad \frac{(y-b)\cos\gamma - (z-c)\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Remplaçant, dans les équations (1), h et h' par ces valeurs, et z par R, on trouvera les formules

$$(3) \qquad \frac{\int \mathrm{R}(x-a)dm}{\cos\alpha} = \frac{\int \mathrm{R}(y-b)dm}{\cos\beta} = \frac{\int \mathrm{R}(z-c)dm}{\cos\gamma},$$

Si l'on y réunit la relation

$$(4) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on aura la solution complète du problème.

6. Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de la droite, de sorte qu'on ait

$$(5) \qquad \frac{X-a}{\cos\alpha} = \frac{Y-b}{\cos\beta} = \frac{Z-c}{\cos\gamma};$$

la ligne étant ainsi déterminée par l'un de ses points et par sa direction, si l'on élimine a, b, c, entre les équations (3) et (5), l'équation finale exprimera la condition nécessaire pour qu'une droite donnée soit un axe permanent.

7. Cette condition étant satisfaite, les équations (3) et (5) s'accorderont pour donner les trois coordonnées a, b, c du centre de rotation de la ligne dont il s'agit.

8. L'équation de condition indiquée n° **6** et les équations (5) étant homogènes par rapport aux cosinus, suffisent pour donner la relation indépendante de ces lignes trigonométriques, qui démontre ce théorème connu, que *tous les axes permanents passant par un point donné appartiennent à un cône du second degré*, etc.

9. On pourrait déduire des équations (3), (4) et (5) toutes les propositions du Mémoire de M. Ampère. Je m'arrêterai à celle du chapitre III; parce que l'on y considère une surface du troisième degré appartenant à une famille dont la génération et l'équation aux différentielles partielles se rapprochent, par leur simplicité, de celles que l'on présente dans le Cours d'Analyse de l'École Polytechnique et qui se rapportent aux cylindres, aux cônes, aux conoïdes et aux surfaces de révolution.

10. *Déterminer la courbe contenant tous les centres de rotation des axes permanents passant par un point donné.*

Les équations (3) et (5) étant homogènes par rapport aux cosinus, l'élimination des trois quantités α, β, γ entre ces quatre équations donnera deux équations finales qui appartiendront aux coordonnées

a, b, c d'un point quelconque de la courbe cherchée. Pour simplifier les calculs, je rapporte le corps au point donné et aux axes permanents qui s'y croisent. Soient, dans cette hypothèse,

$$A_1 = \int (y^2 + z^2)\,dm, \quad B_1 = \int (x^2 + z^2)\,dm, \quad C_1 = \int (x^2 + y^2)\,dm,$$

les moments d'inertie relatifs aux axes coordonnés, M la masse du corps, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité: introduisant ces valeurs dans les équations (3) et (5), où l'on devra faire

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

l'élimination indiquée donnera les trois équations

$$(6) \qquad \begin{cases} (A_1 - B_1)\,ab = M\,(a^2 + b^2 + c^2)(y_1 a - x_1 b)\,, \\ (C_1 - A_1)\,ac = M\,(a^2 + b^2 + c^2)(x_1 c - z_1 a)\,, \\ (B_1 - C_1)\,bc = M(a^2 + b^2 + c^2)(z_1 b - y_1 c)\,, \end{cases}$$

dont l'une est la conséquence des deux autres.

L'élimination de M entre deux de ces équations donne la suivante

$$(7) \quad (A_1 - B_1)\,z_1\,ab + (C_1 - A_1)\,y_1\,ac + (B_1 - C_1)\,x_1\,bc = 0,$$

qui appartient au cône cité nº **8**.

La courbe demandée appartient donc aux quatre surfaces déterminées par les équations (6) et (7), dans lesquelles a, b, c représentent les coordonnées des points de ces surfaces.

11. J'examinerai le lieu géométrique de l'une des équations (6). Supposons que l'on ait

$$A_1 > B_1 > C_1\,,$$

et posons

$$\frac{A_1 - B_1}{M} = l^2;$$

la première équation (6) pourra se mettre sous la forme

$$(8)\qquad \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{abl^2}{(y_1 a - x_1 b)\sqrt{a^2+b^2}};$$

si l'on fait, dans celle-ci, $b = a \operatorname{tang} \omega$, afin d'avoir l'intersection de la surface avec un plan conduit suivant l'axe des z, on trouvera

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{l^2 \sin\omega \cos\omega}{y_1 \cos\omega - x_1 \sin\omega} = \text{constante}.$$

Le premier membre est le quotient du carré du rayon vecteur d'un point de l'intersection divisé par la projection de ce rayon vecteur sur la trace du plan de cette ligne; et puisque le second membre est constant, il s'ensuit que la courbe est un cercle touchant l'axe des z à l'origine, et dont le diamètre a pour valeur

$$\frac{l^2 \sin\omega \cos\omega}{y_1 \cos\omega - x_1 \sin\omega}.$$

En faisant varier l'angle ω qui fixe la direction du plan coupant, on obtiendra différents cercles dont les centres parcourront une courbe située dans le plan des xy: le rayon vecteur du centre du cercle correspondant à l'angle ω étant égal à la moitié de l'expression précédente, on obtiendra facilement l'équation suivante pour représenter la courbe des centres

$$(9)\qquad l^2 ab = 2(a^2+b^2)(y_1 a - x_1 b).$$

Cette ligne est semblable à l'intersection de la surface (8) aveo le plan xy; le centre de similitude est à l'origine, et le rapport de similitude est 2. Tous ces résultats sont faciles à interpréter.

Je conclus de ce qui précède que *la surface de l'équation* (8) *peut être engendrée par un cercle variable touchant constamment l'axe des z à l'origine, et dont le plan tourne autour de cet axe, tandis que son centre parcourt la courbe* (9) *tracée dans le plan xy.*

Lorsque le plan mobile atteint le centre de gravité, le rayon du cercle générateur devient infini, et ce cercle dégénère en une droite qui n'est autre que l'axe des z. Le cercle variable se réduit à un point qui n'est autre que l'origine quand son plan coïncide avec l'un des plans coordonnés.

La courbe demandée (n° **10**) étant l'intersection du cône (7) avec la surface (8), dont les sections circulaires passent par le sommet du cône, il s'ensuit que cette courbe pourra être tracée facilement par les procédés de la géométrie descriptive.

12. Deux cercles quelconques de la surface représentée par l'équation (8), ayant une tangente commune, appartiennent à une même sphère : donc *la surface dont il s'agit est l'enveloppe d'une sphère variable passant constamment par l'origine et dont le centre parcourt la courbe du plan xy représentée par l'équation* (9).

La *caractéristique* de cette enveloppe est le cercle variable dont le plan tourne autour de l'axe des z (n° **11**).

13. Je me propose d'*obtenir l'équation générale des surfaces définies* n^{os} **11** et **12**, *quelle que soit la courbe tracée dans le plan xy qui dirige le centre du cercle ou de la sphère variable.*

Les conditions de cet énoncé exigent que la fraction

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

conserve une valeur constante quand le rapport $\frac{b}{a}$ reste invariable. Donc il faut que $\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ soit une fonction de $\frac{b}{a}$; et comme on peut mettre cette expression sous la forme

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}},$$

l'équation demandée sera

$$(10) \quad a^2+b^2+c^2 = a\varphi\left(\frac{b}{a}\right), \quad \text{ou} \quad a^2+b^2+c^2 = b\varphi\left(\frac{a}{b}\right),$$

φ étant l'indice d'une fonction arbitraire.

L'équation (8), étant mise sous la forme

$$a^2 + b^2 + c^2 = a \frac{l^2 \frac{b}{a}}{y_1 - \frac{b}{a} x_1},$$

appartient évidemment à la famille comprise dans l'équation (10).

14. *Trouver l'équation aux différentielles partielles de la même classe des surfaces.*

Soient a_1 et b_1 les coordonnées du centre d'une sphère enveloppée (nº **12**); l'équation de cette sphère sera

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a_1 a + 2b_1 b.$$

Soient p et q les coefficients différentiels de l'ordonnée c, pris en regardant séparément les abscisses a et b comme variables, de sorte que l'on ait

$$p = \frac{dc}{da}, \quad q = \frac{dc}{db}.$$

L'équation de la sphère enveloppée, étant différenciée successivement par rapport aux deux variables indépendantes, donne

$$a + cp = a_1, \quad b + cq = b_1;$$

et si l'on porte ces valeurs de a_1 et de b_1 dans l'équation précédente, on aura l'équation aux différentielles partielles demandée

$$(11) \qquad ap + bq = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2c},$$

qui appartient aux sphères enveloppées et à leur enveloppe, indépendamment de toute condition à laquelle on pourrait assujétir le centre de l'enveloppée.

15. Si l'on différentie successivement, par rapport à chaque variable indépendante, l'équation (10), et que l'on élimine la fonction arbitraire et sa dérivée, on trouvera l'équation différentielle (11).

Réciproquement si l'on cherche, par la méthode connue, l'intégrale de cette équation aux différentielles partielles, on obtiendra l'équation finie (10).

16. M. Binet, dans le XVI^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et M. Guibert, dans le XXV^e, ont déterminé le centre de rotation dont les axes permanents sont parallèles à ceux d'une origine connue. On peut donner plus de généralité à cette question en se proposant de *trouver le point de l'espace où les axes permanents sont parallèles à trois droites rectangulaires prises arbitrairement.* Alors le problème n'est pas toujours possible; et il est intéressant de chercher les limites qui renferment les directions que doivent avoir les droites données pour que la solution soit réelle. En nous occupant de cette recherche nous serons conduits à des propositions qui ne sont pas énoncées dans les Mémoires cités.

Pour traiter la question actuelle, il est nécessaire de rappeler les propriétés de la courbe qui contient tous les centres de rotation dont deux des axes permanents correspondent à des moments d'inertie égaux; de sorte que, en chacun de ces points, il y a une infinité d'axes permanents situés dans un même plan. La courbe dont il s'agit est composée d'une ellipse et d'une hyperbole, appelées par M. Chasles (*Aperçu historique*, note 31) *coniques focales* ou *excentriques* d'un système de surfaces du second degré. Ce système est ici celui des trois espèces de surfaces à centre qui ont leurs axes principaux dirigés sur les axes principaux du corps (n° **1**). On sait qu'en un point commun à trois de ces surfaces d'espèces différentes, les normales sont dirigées suivant les trois axes permanents relatifs à ce point, etc. J'emploierai, pour déterminer les coniques focales de ce système, une méthode qui diffère peu de celle de M. Binet, mais qui conduira à une propriété de l'ellipsoïde dont les carrés des demi-axes sont respectivement égaux aux moments d'inertie principaux divisés par la masse.

17. Je me propose d'abord de *former l'équation du troisième degré dont l'inconnue est le moment d'inertie du corps par rapport à l'un des axes permanents qui se croisent en un point donné*, en supposant connus les axes et les moments d'inertie principaux relatifs au centre de gravité.

Le corps étant rapporté à ces axes, soient

$$A = \int (y^2 + z^2)\, dm, \quad B = \int (x^2 + z^2)\, dm, \quad C = \int (x^2 + y^2)\, dm,$$

les moments d'inertie principaux, a, b, c les coordonnées du point donné, α, β, γ les inclinaisons, sur les axes coordonnés, d'un axe permanent relatif à ce point, et I le moment d'inertie inconnu. Je pose, pour abréger,

$$I' = I - M(a^2 + b^2 + c^2),$$

et

$$R' = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma.$$

En introduisant ces expressions dans les équations (3), et en ayant égard au choix des axes coordonnés, on obtiendra les relations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} a\cos\beta - b\cos\alpha &= \frac{(A-B)\cos\alpha\cos\beta}{MR'}, \\ c\cos\alpha - a\cos\gamma &= \frac{(C-A)\cos\alpha\cos\gamma}{MR'}, \\ b\cos\gamma - c\cos\beta &= \frac{(B-C)\cos\beta\cos\gamma}{MR'}, \end{aligned} \right.$$

qui se réduisent à deux équations distinctes.

On a d'ailleurs, par un principe connu,

$$(13) \qquad I' = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - MR'^2.$$

Cette équation, combinée avec les précédentes, donne

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} (I' - A)\cos\alpha + MR'a &= 0, \\ (I' - B)\cos\beta + MR'b &= 0, \\ (I' - C)\cos\gamma + MR'c &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations, étant homogènes et linéaires par rapport aux cosinus, se prêtent à l'élimination des lignes trigonométriques, et elles conduisent à l'équation du troisième degré demandée

$$(15) \qquad \frac{a^2}{I'-A} + \frac{b^2}{I'-B} + \frac{c^2}{I'-C} + \frac{1}{M} = 0.$$

18. Si l'on fait $I' = 0$ dans l'équation précédente, elle devient

$$\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} = \frac{1}{M};$$

donc, *en tout point de l'ellipsoïde dont les demi-axes sont, en grandeur et en direction, les racines des moments d'inertie principaux divisés par la masse, le moment d'inertie relatif à l'un des axes permanents est égal au produit de la masse par le carré de la distance de ce point au centre de gravité.*

Les deux autres moments d'inertie seront donc déterminés par une équation du second degré.

19. Supposons que l'on ait $A > B > C$; on reconnaîtra facilement, par un principe de la résolution des équations numériques, que C est compris entre la plus petite et la moyenne racine de l'équation (15), et que B est compris entre la moyenne et la plus grande. Par conséquent, dans l'hypothèse admise, cette équation ne saurait avoir ses trois racines égales; mais elle peut avoir deux racines égales à C ou deux racines égales à B. Dans le premier cas, il faudra que l'on ait les deux équations

$$(16) \qquad c = 0, \quad \frac{a^2}{A-C} + \frac{b^2}{B-C} = \frac{1}{M};$$

et le second exige les deux relations

$$(17) \qquad b = 0, \quad \frac{a^2}{A-B} - \frac{c^2}{B-C} = \frac{1}{M}.$$

Donc *le lieu des points de l'espace où deux axes permanents correspondent à des moments d'inertie égaux, et où, par conséquent, le corps admet une infinité d'axes permanents, est le système des deux coniques* *représentées par les deux équations précédentes : une ellipse située dans le plan du plus grand et du moyen moment principal, et une hyperbole tracée dans le plan des deux moments extrêmes, ces deux courbes ayant leurs axes principaux dans la même direction, et chacune d'elles ayant ses sommets aux foyers de l'autre.*

20. Quand on prendra un centre de rotation appartenant à l'une de ces courbes, l'équation (15) réduite au premier degré fera connaître le moment d'inertie relatif au troisième axe permanent. Les équations (4) et (14), dans lesquelles on introduira soit l'hypothèse $c=0$ et $I'=C$, soit $b=0$ et $I'=B$, laisseront l'un des angles entièrement indéterminé (ce sera γ dans le premier cas et β dans le second); mais elles détermineront le rapport des cosinus des deux autres; et, si l'on compare la valeur de ce rapport à l'équation de la courbe correspondante, (**16**) ou (**17**), on reconnaîtra que *tous les axes permanents, relatifs à un centre de rotation pris sur l'une de ces courbes et qui correspondent à des moments égaux, appartiennent à un même plan normal à la conique, et que par conséquent le troisième axe permanent est dirigé suivant la tangente à cette courbe.*

21. Les équations (12) exprimant que la droite, inclinée sur les axes coordonnés des quantités angulaires α, β, γ, est un axe permanent relatif au point (a, b, c), il s'ensuit que si l'on y regarde α, β, γ comme constantes, ces équations appartiendront au lieu géométrique de tous les centres de rotation pour lesquels l'un des axes permanents est parallèle à la droite représentée par l'équation

$$(18) \qquad \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{\cos\gamma}.$$

Or les formules (12) donnent la suivante

$$(19) \qquad \frac{B-C}{\cos\alpha}\,a + \frac{C-A}{\cos\beta}\,b + \frac{A-B}{\cos\gamma}\,c = 0,$$

qui représente un plan passant par la droite (18). Donc *tous les axes permanents parallèles à une direction donnée sont dans un même plan passant par le centre de gravité.*

22. La direction de la trace du plan (19) et celle de la projection de la droite (18) sur un même plan principal sont liées par une relation très-simple. Soient, par exemple, Δ et δ les tangentes trigonométriques des angles que font, avec l'axe des x ou des a, celles de ces lignes qui sont dans le plan des a, b, de sorte que l'on ait

$$\Delta = -\frac{B-C}{C-A}\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) \qquad \text{et} \qquad \delta = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha};$$

on déduit de là

$$(20) \qquad \frac{\Delta}{\delta} = \frac{B-C}{A-C}.$$

Comme cette relation ne renferme que le rapport $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, il s'ensuit que *si, dans un plan perpendiculaire à l'un des plans principaux, on mène tant de droites que l'on voudra, et que l'on détermine le plan qui contient tous les axes permanents parallèles à l'une de ces droites, tous les plans ainsi obtenus auront la même trace sur le plan principal en question.*

23. La relation (20) lie aussi la direction d'un diamètre de l'ellipse représentée par les équations (16) avec celle de la normale à l'extrémité de ce diamètre. On conclut de là cette construction : *Menez à l'ellipse focale* (16) *une normale parallèle à la projection de la droite donnée; joignez le centre de gravité au point où cette normale rencontre la courbe, et vous aurez la trace du plan qui contient tous les axes permanents parallèles à la droite donnée.*

La considération de l'hyperbole focale déterminée par l'équation (17) fournirait des conséquences analogues; mais le moyen de construction que l'on en déduirait deviendrait illusoire si la trace du plan cherché ne devait pas rencontrer cette courbe.

24. Pour connaître la nature de la courbe représentée par les équations (12), dans lesquelles α, β, γ sont constants (n° **21**), j'ajoute ces équations élevées au carré; après des réductions et des transformations faciles à saisir, on trouve

$$(21) \qquad R'\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - R'^2} = \tau.$$

On a fait ici, pour abréger,

$$\tau = \frac{\sqrt{(A-B)^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + (C-A)^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma + (B-C)^2\cos^2\beta\cos^2\gamma}}{M}.$$

Le radical $\sqrt{a^2+b^2+c^2-R'^2}$ exprime la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point de la courbe sur la droite de l'équation (18); R' (n° **17**) représente la distance de l'origine au pied de cette perpendiculaire; ces deux quantités sont donc les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe dans son plan; et, puisque leur produit est constant, il s'ensuit que *le lieu géométrique des centres de rotation des axes permanents parallèles à une droite donnée est une hyperbole équilatère située dans le plan déterminé* n° **22**, *ayant son centre au centre de gravité du corps, et pour asymptote une parallèle à la droite donnée.*

Pour abréger, on peut appeler cette courbe *l'hyperbole équilatère correspondante à la droite donnée.*

Puisque la parallèle à la droite donnée qui passe par le centre de gravité est l'asymptote de l'hyperbole correspondante, on voit que *le centre de rotation d'une droite menée par le centre de gravité est à l'infini.*

25. Si la droite donnée était parallèle à l'un des axes principaux, les deux équations de l'hyperbole équilatère se réduiraient à celle du plan perpendiculaire à cet axe. Donc, *à tout point d'un plan principal, il correspond un axe permanent perpendiculaire à ce plan.* Cette proposition et ses conséquences sont développées dans la Note de M. Guibert.

26. Supposons connu le point où une hyperbole équilatère déterminée par les équations (19) et (21) rencontre le plan des a, b; comme, au même point, il y a un axe permanent perpendiculaire à ce plan principal (n° **25**), et que la droite donnée est en général oblique à ce plan, il faut que le point en question soit un des centres de rotation auxquels correspondent (n° **19**) une infinité d'axes permanents; donc ce point doit être sur l'ellipse focale des équations (16). De là résulte la conséquence suivante qui, réunie à la construction donnée n° **23**, sert à déterminer complétement, par la règle et le compas, l'hyperbole équilatère dont il s'agit : *Une hyperbole représentée par les équations* (19) *et* (21) *perce le plan des a, b aux points où la trace de son plan rencontre l'ellipse focale de l'équation* (16).

Ainsi l'on connaît les asymptotes et un point de cette courbe, la quantité τ (n° **24**) peut donc être obtenue par des opérations graphiques.

On conclut encore de ce qui précède que *toutes ces hyperboles équilatères rencontrent le plan des a, b; aucune d'elles n'atteint le plan des b, c; celles qui sont situées dans les plans passant par les diamètres transverses de l'hyperbole focale* (17) *coupent seules le plan des a, c.* Enfin *les hyperboles équilatères, situées dans différents plans qui ont une trace commune* (n° **22**), *rencontrent toutes aux mêmes points le plan principal qui contient cette trace.*

Ces propositions peuvent être prouvées analytiquement au moyen des équations (12). Ainsi, par exemple, si l'on cherche le lieu des points de rencontre de toutes les hyperboles équilatères qu'elles représentent avec le plan des a, b, on trouve une équation indépendante des angles α, β, γ qui n'est autre que celle de l'ellipse focale (16), etc.

27. Puisque la direction de l'un des axes permanents est connue quand le centre de rotation est pris sur l'une des hyperboles équilatères que nous considérons, il s'ensuit que la détermination des deux autres axes permanents ne doit dépendre que de constructions exécutables avec la règle et le compas. En effet, soient p et q les coordonnées, parallèles aux axes des a et des b, du point où l'un des axes permanents cherchés rencontre le plan des ab; P et Q les coordonnées du point analogue de l'axe permanent connu. On introduira ces expressions dans les équations (12) au moyen des formules

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{a-p}{c}, \qquad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{b-q}{c}.$$

On obtiendra ainsi deux équations qui devront être satisfaites par $p = \mathrm{P}$ et $q = \mathrm{Q}$. En ayant égard à cette condition, on trouvera, pour déterminer les inconnues, les deux relations

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})pq + (\mathrm{B}-\mathrm{C})bp - (\mathrm{A}-\mathrm{C})aq = 0,$$
$$\frac{\mathrm{P}p}{\mathrm{A}-\mathrm{C}} + \frac{\mathrm{Q}q}{\mathrm{B}-\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

La seconde, qui est linéaire, étant comparée à l'équation (16), conduit à ce théorème : *Les points où les trois axes permanents relatifs à un même centre de rotation rencontrent l'un des plans principaux, forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé par rapport à la conique focale située dans ce plan principal.*

Ainsi, en construisant la polaire du point où l'axe permanent connu rencontre le plan des ab, on aura une première ligne contenant les deux points cherchés. Ces deux points appartiennent aussi à l'hyperbole représentée par la première des équations ci-dessus. La solution demandée n'a donc plus de difficulté.

28. Par le centre de l'hyperbole équilatère correspondante à la droite de l'équation (18), menons une perpendiculaire à son plan (19) : la projection de cette droite sur le plan des ab fera avec l'axe des a un angle ayant pour tangente trigonométrique

$$\delta' = \frac{C-A}{B-C}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

La relation (20) donnera l'inclinaison Δ' de la trace du plan de l'hyperbole équilatère correspondante à cette nouvelle droite, savoir

$$\Delta' = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

Comparant cette valeur à celle de δ (n° **22**), on voit que la première droite donnée est perpendiculaire au plan de la seconde hyperbole; d'où l'on conclut que *si l'on mène une perpendiculaire au plan de l'hyperbole correspondante à une droite donnée, cette perpendiculaire et la droite donnée seront réciproquement telles que chacune d'elles sera perpendiculaire au plan de l'hyperbole qui correspond à l'autre;* et que par conséquent *ces deux hyperboles équilatères auront une asymptote commune dirigée suivant l'intersection de leurs plans.*

29. Au point commun de ces deux hyperboles, point qui est à l'infini sur leur asymptote commune, deux des axes permanents sont parallèles aux deux autres asymptotes de ces courbes; donc le troisième est dirigé suivant l'asymptote commune. On conclut de là que, si l'on a la direction de l'une des droites données dont il est question dans le problème énoncé au n° **16**, *ce problème sera impossible dans les deux cas suivants* :

1°. *Si les deux autres directions données sont les deux autres asymptotes des deux hyperboles équilatères dont la droite donnée est l'asymptote commune : alors le point demandé est à l'infini sur la droite donnée ;*

2°. *Si l'une des deux autres directions données est la seconde asymptote de l'hyperbole équilatère correspondante à la droite donnée. Alors le point cherché est à l'infini de cette seconde asymptote.*

On verra (n° **35**) que ces directions, auxquelles répondent des valeurs infinies, sont les limites des solutions réelles et des résultats imaginaires.

30. En comparant les formules du n° **28** avec celles du n° **22**, on trouve

$$\Delta\Delta' = -\frac{B-C}{A-C},$$

relation qui convient aux directions de deux diamètres conjugués de l'ellipse représentée par les équations (16). Donc *les traces des plans de deux hyperboles équilatères ayant une asymptote commune forment un système de diamètres conjugués de la conique focale située dans le plan de ces traces.*

31. La relation précédente et celles que l'on trouverait de la même manière, en considérant les projections faites dans le plan des a, c, suffisent pour déterminer tous les éléments de la seconde hyperbole située dans un plan perpendiculaire à celui de la première et ayant une asymptote commune avec celle-ci. Si l'on désigne par τ' la puissance de cette seconde hyperbole analogue à la quantité τ (n° **24**), par α', β', γ' les inclinaisons sur les axes coordonnés de la droite à laquelle elle correspond. Les conditions du n° **28** donneront

$$\frac{\cos\alpha\ \cos\alpha'}{B-C} = \frac{\cos\beta\ \cos\beta'}{C-A} = \frac{\cos\gamma\ \cos\gamma'}{A-B};$$

d'où l'on conclura

$$\begin{array}{ll}
M\tau\cos\alpha' = (A-C)\cos\beta\cos\gamma, & M\tau\cos\beta' = (C-A)\cos\alpha\cos\gamma,\\
M\tau\cos\gamma' = (A-B)\cos\alpha\cos\beta, & M\tau'\cos\alpha = (B-C)\cos\beta'\cos\gamma',\\
M\tau'\cos\beta = (C-A)\cos\alpha'\cos\gamma', & M\tau'\cos\gamma = (A-B)\cos\alpha'\cos\beta'.
\end{array}$$

D'après ces relations on obtiendra τ' de cette manière : *Portez sur chacun des trois axes principaux une longueur qui représente le quotient de la différence des moments d'inertie relatifs aux deux autres, divisée par la masse; projetez chacune de ces longueurs sur la droite donnée* (18); *faites le produit de ces trois projections que vous diviserez par τ^2, et le résultat sera la valeur de τ'.*

32. La direction de l'asymptote commune aux deux hyperboles équilatères considérées (nº **28**) est entièrement déterminée; on pourra donc obtenir, en fonction des angles α, β, γ, la puissance τ'' de l'hyperbole correspondante à cette droite : en comparant la valeur trouvée aux expressions de τ et de τ', on aura la relation

$$\tau''^2 = \tau^2 + \tau'^2.$$

33. Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque rapporté aux axes principaux, les équations des plans de deux hyperboles équilatères ayant une asymptote commune seront

$$\frac{B-C}{\cos\alpha}x + \frac{C-A}{\cos\beta}y + \frac{A-B}{\cos\gamma}z = 0 \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{21}),$$

et

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0 \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{28}).$$

Soient h et h' la distance du lieu de l'élément dm à chacun de ces plans; on formerait facilement les valeurs de ces quantités; et si l'on multipliait leur produit par dm, on trouverait, en ayant égard à la position des axes coordonnés, que *l'intégrale $\int hh'dm$, étendue à toute la masse du corps, est égale à zéro.*

34. Nous pouvons maintenant résoudre la question énoncée nº **16** : *Déterminer le point de l'espace où les trois axes permanents ont des directions connues.*

Une seule de ces directions est entièrement arbitraire, et la question revient à chercher un centre de rotation qui ait deux axes permanents parallèles à deux droites données perpendiculaires entre elles.

Je place l'origine au centre de gravité G, et je prends les axes coordonnés

Gz dirigé suivant l'une des deux droites données;

Gx suivant la seconde asymptote de l'hyperbole équilatère correspondante à cette première droite donnée. Le plan des xz sera donc le plan de cette hyperbole dont la puissance sera représentée par τ, comme au n° **24**;

Gy, le troisième axe coordonné, sera dirigé suivant la perpendiculaire au plan de cette hyperbole; et par conséquent le plan des xy contiendra l'hyperbole équilatère correspondante à la droite Gy. La puissance de cette seconde hyperbole sera représentée par Υ', comme au n° **31**.

Les positions des deux hyperboles dont il s'agit étant entièrement déterminées (n[os] **26** et **28**), on pourra fixer le sens des nouvelles coordonnées de manière que T et T' soient positifs.

Pour former l'équation de l'hyperbole correspondante à Gz, je cherche les coordonnées a, b, c d'un point où l'un des axes permanents soit parallèle à cette droite Gz. La définition du n° **3** donne les deux équations

$$\int (z-c)(x-a)\,dm = 0$$

et

$$\int (z-c)(y-b)\,dm = 0.$$

Mais le théorème du n° **33** donne $\int yz\,dm = 0$; ces deux équations se réduisent donc à

$$(22) \qquad b = 0, \quad ac = -\frac{\int xz\,dm}{M} = \Upsilon.$$

On trouvera de même les équations suivantes pour l'hyperbole équilatère correspondante à la droite Gy,

$$(23) \qquad c = 0, \quad ab = -\frac{\int xy\,dm}{M} = \Upsilon'.$$

La seconde droite donnée devant être perpendiculaire à la première

Gz, ses équations seront

$$(24) \qquad z = 0, \quad y = \delta x.$$

Je cherche l'hyperbole correspondante à cette droite. Soient a, b, c les coordonnées d'un centre de rotation O où l'un des axes permanents est parallèle à cette ligne : la distance de l'élément dm au plan mené par le point O, perpendiculairement à la droite des équations (24), sera

$$\frac{\delta y + x - (\delta b + a)}{\sqrt{1+\delta^2}}.$$

Conformément à la définition du n° **3**, je mène par le point O un plan parallèle au plan xy et un autre parallèle à celui qui projette la droite des équations (24) ; j'aurai ainsi deux plans passant par la parallèle à cette droite menée du point O. Les distances de l'élément dm à chacun de ces plans seront

$$z - c,$$

et

$$\frac{y - \delta x - (b - \delta a)}{\sqrt{1+\delta^2}};$$

les conditions du n° **3** donneront donc ici

$$\int [\delta y + x - (\delta b + a)](z - c)\, dm = 0,$$
$$\int [\delta y + x - (\delta b + a)]\,[y - \delta x - (b - \delta a)]\, dm = 0.$$

Soient A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie par rapport aux axes Gx, Gy, Gz. En introduisant ces valeurs dans les deux équations précédentes, elles deviendront, réduction faite,

$$(25) \qquad \begin{cases} (\delta b + a)\, c = \tau, \\ M(\delta b + a)(b - \delta a) = (1 - \delta^2)\, M\tau' + \delta\,(B_1 - A_1). \end{cases}$$

Ces deux équations appartiennent à une hyperbole équilatère située dans le plan représenté par l'équation

$$(26)\qquad \frac{M(b-\delta a)}{c} = \frac{(1-\delta^2)M\tau' + \delta(B_1 - A_1)}{\tau};$$

la puissance de cette hyperbole, ou le produit constant des coordonnées de l'un de ses points, par rapport à la droite de l'équation (24) et à sa perpendiculaire, est exprimée par

$$(27)\qquad \frac{\sqrt{M^2(1+\delta^2)\tau^2 + [(1-\delta^2)M\tau' + \delta(B_1 - A_1)]^2}}{M(1+\delta^2)}.$$

Maintenant le point cherché sera celui dont les coordonnées satisferont aux quatre équations (22) et (25). Or la première (25) est une conséquence des deux équations (22); donc *les hyperboles équilatères correspondantes à deux droites perpendiculaires entre elles ont un diamètre commun réel ou idéal, dirigé suivant la droite d'intersection de leurs plans*. Le point demandé, qui est sur ces deux courbes, pourra donc être construit géométriquement au moyen des principes précédents.

La question n'a pas plus de deux solutions; et quand elles sont réelles, les deux centres de rotation sont sur une droite passant au centre de gravité et coupée en deux parties égales par ce point.

35. Il résulte de la remarque du n° **29** que, pour discuter la solution précédente, il faut connaître les asymptotes des deux hyberboles équilatères dont la ligne donnée Gz serait l'asymptote commune. Or ces deux droites sont dans le plan des xy, et la ligne des équations (24) serait l'une d'elles si le plan de l'hyperbole équilatère qui lui correspond passait par la droite Gz. Mais ce plan est représenté par l'équation (26), la condition dont il s'agit donnera donc

$$(28)\qquad (1-\delta^2)M\tau' + \delta(B_1 - A_1) = 0.$$

Les deux valeurs de δ tirées de cette équation détermineront deux directions rectangulaires qui seront celles des asymptotes demandées.

Soient

δ' la racine positive de l'équation précédente ;

Gx' la droite dont la direction est déterminée par cette valeur, laquelle est par conséquent un diamètre transverse de l'hyperbole située dans le plan xy et représentée par l'équation (23);

Gy' la perpendiculaire à Gx', de sorte que Gy' ne rencontre pas la même hyperbole.

Cela posé, la solution de la question du n° **34**, qui est renfermée dans les formules (22) et (25), peut être présentée de la manière suivante :

$$b = 0,$$
$$ac = \tau,$$
$$a^2 = \frac{(A_1 - B_1)\delta + (\delta^2 - 1)M\tau'}{M\delta}.$$

Si l'on introduit, dans la valeur de a^2, celle de δ' qui satisfait à l'équation (28), on trouve

$$a^2 = \tau'\left(1 - \frac{\delta'}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\delta'} + \delta\right).$$

On voit d'abord que a est infini quand on a, soit $\delta = 0$, soit $\delta = \infty$; que a est nul, et par suite c infini, quand on a, soit $\delta = \delta'$, soit $\delta = -\frac{1}{\delta'}$. Ces résultats ne sont que la reproduction des remarques du n° **29**.

Puisque, dans la formule précédente, τ' et δ' sont positifs, on voit que, *la seconde droite donnée étant*

dans l'angle xGx', la solution du problème du n° **34** *est imaginaire,*
dans l'angle $x'Gy$, la solution est réelle,
dans l'angle yGy', la solution est imaginaire,
dans le supplément de l'angle $y'Gx$, la solution est réelle.

36. Soit T la puissance de l'une des hyperboles équilatères correspondantes aux droites Gx' et Gy'. Cette valeur sera donnée par la formule (27), dans laquelle on introduira la relation (28); et l'on aura

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1+\delta^2}}.$$

Si donc on représente par ω l'angle $x\mathrm{G}x'$, on aura, pour T, deux valeurs exprimées par

$$\tau \cos \omega \quad \text{et} \quad \tau \sin \omega.$$

Donc *si l'on a deux hyperboles équilatères dont les plans se coupent suivant leur asymptote commune* (n° **28**), *et que l'on fasse passer par cette droite le plan de l'hyperbole qui lui correspond* (n° **24**); *si, dans ce plan, on construit une surface égale à la puissance de l'hyperbole qu'il contient, les puissances des deux premières seront respectivement égales aux projections faites dans leurs plans de la puissance de la troisième.*

La relation trouvée n° **32** est une conséquence de ce théorème.

37. Les questions résolues n^{os} **21**, **23**, **24** et **26** donnent immédiatement la solution de ce problème : *Déterminer le centre de rotation d'un plan donné.*

En effet, le point cherché est à la rencontre du plan donné avec l'hyperbole équilatère correspondante à une droite perpendiculaire à ce plan.

Ce problème n'aura généralement qu'une solution, parce que le plan donné est parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole. Le point demandé serait à l'infini si le plan donné passait par le centre de gravité. La question serait indéterminée si ce plan coïncidait avec l'un des plans principaux.

38. En traitant par l'analyse la question précédente, on est conduit à considérer une surface du cinquième degré qui peut être engendrée d'une manière assez simple par le mouvement d'une section conique.

Je place l'origine en un point du plan donné, et je dirige les axes coordonnés suivant les axes permanents relatifs à cette origine. Le plan donné sera représenté par l'équation

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0,$$

dans laquelle α, β, γ sont les inclinaisons de la perpendiculaire à ce plan sur les axes coordonnés. Je reprends les notations du n° **10**, et je pose, en outre,

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = R_1,$$

de sorte que R_1 représentera la distance du centre de gravité au plan donné. Si l'on appelle a, b, c les coordonnées de son centre de rotation, on aura d'abord

$$a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma = 0; \tag{29}$$

ensuite les coordonnées a, b, c doivent satisfaire aux équations (3), puisque l'un des axes permanents relatifs à ce point fait, avec les axes coordonnés, les angles α, β, γ; écrivant donc cette condition, on trouve, réduction faite,

$$\begin{aligned}
(A_1 - B_1)\cos\alpha\cos\beta &= MR_1(b\cos\alpha - a\cos\beta),\\
(C_1 - A_1)\cos\alpha\cos\gamma &= MR_1(a\cos\gamma - c\cos\alpha),\\
(B_1 - C_1)\cos\beta\cos\gamma &= MR_1(c\cos\beta - b\cos\gamma).
\end{aligned}$$

Ces équations, qui se réduisent à deux, étant réunies à l'équation (29), composent un système du premier degré qui résout la question.

En introduisant la quantité auxiliaire

$$I = A_1 \cos^2\alpha + B_1 \cos^2\beta + C_1 \cos^2\gamma,$$

les valeurs des coordonnées deviennent

$$a = \frac{I - A_1}{MR_1}\cos\alpha, \quad b = \frac{I - B_1}{MR_1}\cos\beta, \quad c = \frac{I - C_1}{MR_1}\cos\gamma. \tag{30}$$

Ces formules confirment le résultat de la discussion du n° **37**.

39. Les relations (29) et (30) étant homogènes par rapport aux cosinus, donneront deux équations finales par l'élimination de ces trois lignes trigonométriques, savoir :

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{M}x_1 a}{\mathrm{I}-\mathrm{A}_1} + \dfrac{\mathrm{M}y_1 b}{\mathrm{I}-\mathrm{B}_1} + \dfrac{\mathrm{M}z_1 c}{\mathrm{I}-\mathrm{C}_1} = 1, \\ \dfrac{a^2}{\mathrm{I}-\mathrm{A}_1} + \dfrac{b^2}{\mathrm{I}-\mathrm{B}_1} + \dfrac{c^2}{\mathrm{I}-\mathrm{C}_1} = 0. \end{cases}$$

Si l'on élimine I entre ces deux dernières, *on aura l'équation de la surface qui contient les centres de rotation de tous les plans passant par un point donné*. Pour exécuter cette opération on pourra amener les équations (31) à être du premier degré en I par une transformation qui donnera

$$\mathrm{I} - \mathrm{A}_1 = \frac{\mathrm{M}a[(\mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1)x_1 bc + (\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1)y_1 ac + (\mathrm{A}_1 - \mathrm{B}_1)z_1 ab]}{(\mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1)bc - \mathrm{M}(a^2 + b^2 + c^2)(z_1 b - y_1 c)},$$

$$\mathrm{I} - \mathrm{B}_1 = \frac{\mathrm{M}b[(\mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1)x_1 bc + (\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1)y_1 ac + (\mathrm{A}_1 - \mathrm{B}_1)z_1 ab]}{(\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1)ac - \mathrm{M}(a^2 + b^2 + c^2)(x_1 c - z_1 a)},$$

$$\mathrm{I} - \mathrm{C}_1 = \frac{\mathrm{M}c[(\mathrm{B}_1 - \mathrm{C}_1)x_1 bc + (\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1)y_1 ac + (\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1)z_1 ab]}{(\mathrm{A}_1 - \mathrm{B}_1)ab - \mathrm{M}(a^2 + b^2 + c^2)(y_1 a - x_1 b)}.$$

L'élimination de I entre ces équations, qui se réduisent à deux distinctes, conduira à une équation du cinquième degré appartenant à la surface demandée.

40. Mais, au lieu de cette équation unique, on peut employer les deux équations (31) pour représenter la surface dont il s'agit. La seconde appartient à un cône dont les axes principaux sont dirigés suivant les axes coordonnés; et si l'on a, comme au n° **11**,

$$\mathrm{A}_1 > \mathrm{B}_1 > \mathrm{C}_1,$$

les deux *lignes focales* de ce cône, situées dans le plan xz, font avec l'axe des z des angles dont les tangentes trignométriques sont

$$+\sqrt{\frac{A-B}{B-C}}, \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{A-B}{B-C}},$$

quantités indépendantes du paramètre variable l. Si, en outre, on fait attention à la forme de la première équation (31), on arrive à la conséquence suivante : *Construisez à volonté un cône dont les axes principaux soient dirigés suivant les axes permanents qui se croisent au point donné et dont les directions des lignes focales soient déterminées par les valeurs ci-dessus; construisez aussi le plan représenté par la première équation* (31) *et qui est parallèle au plan polaire du centre de gravité par rapport au cône; l'intersection du cône et du plan ainsi obtenus appartiendra à la surface demandée.*