JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. STEINER

Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 105-170.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__105_0>

SUR LE

MAXIMUM ET LE MINIMUM DES FIGURES DANS LE PLAN,

SUR LA SPHÈRE ET DANS L'ESPACE EN GÉNÉRAL;

PAR J. STEINER,

Membre de l'Académie de Berlin [*].

PREMIER MÉMOIRE.

On ne s'est pas assez appliqué jusqu'ici à vaincre les difficultés qui se présentent quand on recherche les propriétés des figures géométriques qui donnent lieu à des *maxima* et à des *minima*, ou du moins on n'a pas été heureux dans les tentatives faites dans cette direction. Or il existe deux méthodes pour traiter cette matière : l'une d'elles, la méthode synthétique, réputée insuffisante, a été de nos jours presque entièrement négligée; on ne s'est guère occupé que de l'autre, de la méthode analytique, que l'on croyait préférable sous tous les rapports. Mais il y a bien des cas où les règles générales que l'analyse fournit ne conduisent ni directement, ni facilement au but; il y en a d'autres où elle ne paraît pas propre à faire découvrir la cause, l'origine du maximum et du minimum : elle ne s'attache alors qu'à des propriétés secondaires, qui sont liées plus ou moins intimement à cette cause primitive, mais qui ne la cons-

[*] Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 15 mars 1841 : l'auteur l'a composé en langue allemande; nous devons à l'obligeance de M. le docteur *Wertheim* la traduction qu'on imprime ici. (J. L.)

tituent pas. Il semble donc utile de changer de route et de recourir à l'ancienne méthode, mal à propos abandonnée.

Quoiqu'il soit impossible d'établir un principe unique applicable également à toutes les matières que nous aurons à traiter, on verra pourtant qu'il existe un certain nombre de propriétés fondamentales, d'où découlent autant de séries de théorèmes, intimement liés les uns aux autres. C'est ainsi qu'on est souvent conduit à des théorèmes qui ne sauraient être démontrés qu'avec une très grande difficulté, quand on les attaque isolément par la voie directe; par exemple, les théorèmes des nos **62** et **65** du Mémoire qui suit. Les propriétés fondamentales une fois établies, les théorèmes en dérivent, pour ainsi dire, comme d'une source commune, qui laisse apercevoir leur dépendance mutuelle, ce que nous considérons comme tout aussi important, tout aussi utile pour le progrès des sciences, que la découverte même des théorèmes.

On doit à *Lhuilier* [*] les recherches les plus étendues sur les *maxima* et *minima* dans la Géométrie envisagés sous un point de vue élémentaire; la méthode synthétique lui a semblé mieux convenir à ce genre de recherches. En résumant tout ce que ses devanciers avaient découvert, à partir des Grecs jusqu'à *R. Simson* et autres, il a corrigé, avec sa sagacité ordinaire, tout ce qui s'y trouvait de faux, et il a fait faire lui-même un grand pas à cette partie de la science. Il est bien à regretter que ses successeurs aient cru devoir abandonner cette marche si naturelle; on cite bien quelquefois son ouvrage, on lui emprunte même quelques exemples, mais on néglige entièrement sa méthode; et ceux mêmes qui tenaient encore à la synthèse géométrique (*Legendre*, *Hirsch*, etc.), tout en conservant ses théorèmes, ont rejeté les démonstrations simples qu'il en avait données. Mais il est arrivé de là aussi que la belle simplicité, l'extrême élégance des démonstrations s'est bientôt perdue, que l'on a cessé d'apercevoir la liaison intime qui subsiste entre les théorèmes, et que tout développement ultérieur de cette doctrine a été ainsi arrêté. Bien plus, séduits par la facilité que donne le calcul pour résoudre

[*] *De relatione mutuâ capacitatis et terminorum figurarum*, etc. *Varsoviæ*, 1782; et *Abrégé d'Isopérimétrie élémentaire*, etc.

certaines classes de questions relatives aux *maxima* et *minima*, quelques géomètres ont même conseillé l'abandon entier de la synthèse, pour se livrer uniquement à la voie plus facile de l'analyse. Mais c'était exagérer dans un sens, comme *Lhuillier* lui-même l'avait fait dans l'autre, quand il prétendait que beaucoup de théorèmes ne pouvaient pas être démontrés au moyen du Calcul différentiel. Nous croyons que les deux méthodes, bien loin de s'exclure et de se repousser mutuellement, sont au contraire indispensables pour vaincre les grandes difficultés de la matière, et conduire ainsi à la solution des nombreux problèmes qui restent encore à traiter; une fois le but atteint, il sera toujours temps de comparer entre elles ces deux méthodes et les services qu'elles auront pu rendre.

Aucune branche de la Géométrie ne paraît soumise en effet à autant de difficultés que celle dont il s'agit : quand on croit avoir trouvé une méthode directe et générale, on rencontre à l'improviste, à côté de problèmes très simples, des problèmes qu'elle aborde à peine ou même qu'elle ne peut pas résoudre ; et ici le succès dépend tellement du point de vue auquel on se place, que souvent des difficultés qui paraissent insurmontables par certains moyens, disparaissent dès qu'on les attaque par un autre en quelque sorte trivial. Tel est, par exemple, le théorème du n° **26**, relatif aux figures sphériques. Et ceci est également vrai pour des systèmes entiers de propositions comme pour des théorèmes isolés.

Je pense avoir choisi la route la plus avantageuse pour certaines classes de *maxima* et *minima*; car je suis parvenu à des théorèmes fondamentaux, d'où un grand nombre de solutions découlent d'une manière élégante et facile; mais il est bien des questions, principalement parmi celles relatives aux figures dans l'espace, dont la solution m'a échappé et semble exiger des moyens nouveaux. C'est pour ce cas surtout que les deux méthodes se réuniront avec avantage; la méthode synthétique aura à fournir des bases solides, à établir les théorèmes fondamentaux, à montrer enfin à l'analyse le chemin qu'elle doit suivre pour pouvoir déployer librement toute sa force, et pour discuter ultérieurement les questions proposées; aussi est-ce là la marche que l'on a généralement suivie sans toujours l'avouer.

J'ai déjà publié plusieurs extraits de mes recherches concernant les *maxima* et *minima* en géométrie [*]. Le Mémoire suivant a pour objet les relations entre les aires et les périmètres des figures dans le plan et sur la sphère; il a trait à la première des cinq méthodes que j'ai suivies dans ces recherches, et qui toutes sont applicables aux figures planes. Quoique ces cinq méthodes ne diffèrent que par la marche des raisonnements qui conduisent au théorème principal, on ne peut pourtant se passer de leur concours commun, car tel théorème qui s'offre de lui-même, quand on suit l'une des méthodes, ne pourrait être trouvé par aucune des autres qu'avec la plus grande difficulté. La seconde de ces cinq méthodes s'applique également aux figures sphériques; mais nous serons obligés de recourir aux trois dernières pour traiter le cas de l'espace d'une manière en quelque sorte analogue.

La première méthode consiste à établir d'abord deux théorèmes fondamentaux de la plus grande simplicité, et d'où découle un théorème que nous nommerons *principal*, parce qu'il sert de base à tout ce qui suit : on verra par-là qu'il existe une liaison particulière et intime entre les figures susceptibles d'un maximum ou d'un minimum, notamment qu'elles entrent comme parties constitutives de la figure à laquelle le théorème principal se rapporte, et que les fondements sur lesquels celui-ci repose peuvent également servir à en démontrer d'autres beaucoup plus compliqués, et bien plus difficiles en apparence.

DES FIGURES PLANES ET SPHÉRIQUES.

§ I. *Théorèmes fondamentaux sur les figures planes.*

1. *Lemme*. Les sommets de tous les triangles isoscèles construits sur la même base, se trouvent sur la droite qui passe par le milieu de la base et qui est perpendiculaire sur elle; de deux quelconques de ces triangles, celui qui a le plus grand périmètre a aussi la plus grande aire, et réciproquement.

---

[*] *Voyez* le *Journal* de M. Crelle, et les *Mémoires de l'Académie de Berlin ;* les extraits de quelques Mémoires inédits se trouvent aussi dans les *Comptes rendus* de cette Académie.

2. *Lemme.* Les surfaces de tous les triangles construits sur la même base sont entre elles comme leurs hauteurs, et réciproquement. Lorsque les triangles sont équivalents, les sommets sont sur une droite parallèle à la base.

Premier théorème fondamental.

3. 1°. *Entre tous les triangles isopérimètres et de même base le triangle isoscèle est un maximum.*

2°. *De deux de ces triangles, celui qui aura l'angle le plus petit ou le plus grand à la base, ou bien dont l'un des côtés sera le plus petit ou le plus grand, sera le plus petit lui-même, et réciproquement.*

Démonstration. 1°. Soient le triangle isoscèle ACB et le non isoscèle ADB (*Planche I, fig.* 1), construits sur la même base AB, et soit en même temps $AC + BC = AD + BD$; puisqu'il y a toujours une partie AEB, qui est commune aux deux triangles, le théorème sera démontré quand on aura prouvé que l'on a triangle $AEC > BED$.

L'angle α est égal à l'angle β, donc on a $\beta > \gamma$ et $AE > BE$. Faisons $EF = EB$, et prenons sur la ligne EC, $EG = ED$; je dis que le point G doit nécessairement tomber entre C et E. Car supposons que G tombât en C, alors ED étant égal à EC, les deux triangles BED et FEC seraient égaux, d'où résulterait $FC = BD$; en même temps la ligne DF serait égale à BC; donc (puisque par hypothèse $AC + BC = AD + BD$) on aurait $BD + AF = FC + AF = AC$, c'est-à-dire que la somme de deux côtés d'un triangle serait égale au troisième, ce qui est impossible. Le point G peut encore moins tomber au-delà de C, par exemple en H; car on aurait alors, par les mêmes raisons, $AF + FH + HC = AC$, c'est-à-dire que la ligne brisée AFHC serait égale à la droite AC. Donc le point G doit tomber entre E et C. Cela étant, on a triangle $FEG = BED$; donc triangle $AEC > BED$; donc aussi le triangle isoscèle ACB est plus grand que le triangle non isoscèle ADB.

2°. Soient ACB, ADB (*fig.* 2) deux triangles isopérimètres quelconques de même base; désignons par γ le plus petit des quatre angles à la base, ce qui exige que $\gamma < \beta$; nous pourrons démontrer comme nous venons de le faire (1°.) que triangle $ADB < ACB$, c'est-à-dire que le triangle qui a le plus petit angle à la base est le plus petit. — On peut prouver de même que le triangle ADB est plus petit que le triangle ACB, quand on suppose que δ est le plus grand des angles, ou que BD est le plus petit des côtés, ou enfin que AD est le plus grand des côtés. Pour cela il suffit de démontrer que l'hypothèse précédente $\gamma < \beta$ entraîne nécessairement ces trois conditions. Pour prouver que δ est le plus grand des angles, c'est-à-dire pour prouver qu'on a $\delta > \alpha$, retournons le triangle ADB de manière à lui faire prendre la position AD_1B dans laquelle les angles γ et δ tomberont en γ_1 et δ_1, on aura $\gamma = \gamma_1$, $\delta = \delta_1$; le sommet D_1 doit nécessairement tomber au-delà du côté AC, puisqu'on a $\beta > \gamma_1$ $(= \gamma)$, d'après cela on voit que δ_1 sera plus grand que α, donc $\delta > \alpha$. Pour prouver que BD est le *plus petit* et AD le *plus grand* des quatre côtés, j'observe que AD ne peut être ni égal à AC, ni plus petit que AC, en sorte qu'il faudra que AD soit plus grand que AC et par suite $BD < BC$. D'abord si l'on admettait que AD fût égal à AC, alors BD serait égal à BC, et le triangle ADB serait égal au triangle ACB, ce qui est impossible. En second lieu, si l'on avait $AD < AC$, il en résulterait $BD > BC$, et dans le triangle ACD l'angle ACD devrait être plus petit que l'angle ADC; en même temps dans le triangle BCD on aurait angle $BCD > BDC$, ce qui est impossible. Il s'ensuit que $AD > AC$ et $BD < BC$. On démontrerait de la même manière que l'on a $BD_1 > BC$, $AD_1 < AC$, ou bien $AD > BC$, $BD < AC$. Il est donc prouvé qu'en effet BD est le plus petit et AD le plus grand des quatre côtés. — On prouverait par une démonstration semblable que réciproquement chacune de ces trois conditions entraîne la première, savoir, $\gamma < \beta$, et par suite, triangle $ADB < ACB$, et que de même l'existence de ces quatre relations est une conséquence nécessaire de la supposition triangle $ADB < ACB$.

On voit que la seconde partie du théorème (2°.) renferme comme un cas spécial la première (1°.), qui est l'énoncé du maximum. Chacune de ces parties nous sera utile dans la suite.

4. *Entre tous les triangles de même base et de même surface, le triangle isoscèle est celui qui a le plus petit périmètre.*

Démonstration. Soit G le triangle isoscèle et U un triangle non isoscèle quelconque de même base et de même surface; désignons par G_1

un autre triangle isoscèle, construit sur la même base, et dont le périmètre soit égal à celui de U : on aura (3) $G_1 > U$, et (puisque $U = G$), $G_1 > G$; donc (1) périmètre $G_1 >$ périmètre G, ou bien périmètre U $>$ périmètre G.

5. *Entre tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est un maximum, et réciproquement : entre tous les triangles de même surface le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.*

1^re^ DÉMONSTRATION. Le triangle maximum correspondant au périmètre donné doit toujours être isoscèle, que l'on prenne tel ou tel de ses côtés pour base; donc ses côtés pris deux à deux doivent être égaux; donc les trois côtés sont égaux entre eux.

Cette démonstration ne laisse à la vérité rien à desirer sous le rapport de la justesse et de la rigueur; mais elle est incomplète en ce qu'elle ne montre pas clairement aux yeux pourquoi deux triangles de même périmètre étant donnés, dont l'un est équilatéral, l'autre non équilatéral, le premier est plus grand que le second. Pour remédier à cet inconvénient, *Lhuilier* a donné une démonstration par laquelle on s'approche de plus en plus du triangle équilatéral, en transformant indéfiniment le triangle non équilatéral donné en triangles isoscèles de même périmètre; mais cette démonstration n'est pas non plus absolument satisfaisante. J'ai tâché de combler cette lacune par la démonstration suivante :

2^me^ DÉMONSTRATION. Soit donné un triangle non isoscèle quelconque U; construisons sur le côté le plus grand, pris pour base, un triangle isoscèle G de même périmètre; on aura (3) $G > U$: représentons ce triangle G par ABC (*fig.* 3). Par hypothèse la base AB est plus grande et chacun des côtés AC et BC plus petit que le tiers du périmètre. Soit donc la partie BD de la base égale au tiers du périmètre; prenons sur le prolongement du côté adjacent BC le point E tel que le triangle DEB soit isopérimètre au triangle ACB ; on aura $DE + EC = AD + AC$ (puisque BD et BC appartiennent aux deux périmètres). BC étant plus petit que le tiers du périmètre, il s'ensuit $BD > BC$ et l'angle x plus grand que l'angle y, ensuite angle $ADC > ECD$, d'où triangle $ECD > ADC$ (3, 2°.), et enfin $DEB > ACB$, ou triangle DEB plus grand que triangle G. Soit maintenant le triangle DFB équilatéral et par suite ayant un périmètre égal à celui de DEB (ou G et U) dont BD est le tiers; alors on a triangle DFB > DEB (3), donc DFB > G, et *à fortiori* DFB > U. — Cette démonstration est directe et rigoureuse en même temps.

Le théorème réciproque se démontre facilement par voie indirecte, comme le précédent, ou bien il peut être déduit de celui-ci :

Second théorème fondamental.

6. *Entre tous les triangles construits avec deux côtés donnés, celui dans lequel ces deux côtés seront perpendiculaires l'un à l'autre sera un maximum.*

DÉMONSTRATION. Si l'on prend l'un des côtés donnés pour base, la surface du triangle augmente quand la hauteur augmente; or celle-ci est la plus grande possible, quand elle est égale à l'autre côté donné, c'est-à-dire quand ce côté est perpendiculaire à la base.

Il y a une démonstration de ce théorème plus analogue à celle qui concerne les triangles sphériques (**14**). La voici :

Soit AB (*fig.* 4) l'un des côtés donnés pris pour base fixe; les sommets de tous les triangles que l'on peut construire avec les côtés donnés, sont situés dans un cercle FCG, qui a le point A pour centre et l'autre côté AC pour rayon; tirons les droites FG, DE,... parallèlement à la base AB; elles rencontreront en général le cercle en deux points. Ces points de rencontre sont les sommets de deux triangles équivalents, construits avec les côtés donnés, par exemple des triangles ADB et AEB; l'aire de ces triangles devient d'autant plus grande que la parallèle est plus éloignée de la base, et il est clair que cette distance est la plus grande possible quand la parallèle est tangente en C; mais, dans ce cas, il n'y a qu'un seul triangle ACB : dans ce triangle, qui est un maximum, les côtés donnés AB et AC sont perpendiculaires l'un à l'autre.

7. *Entre tous les triangles dont la somme des deux côtés est donnée, celui dans lequel ces deux côtés sont égaux et perpendiculaires l'un à l'autre est un maximum.*

DÉMONSTRATION. Que l'on répartisse la somme donnée, comme l'on voudra, sur les deux côtés, le triangle maximum sera toujours celui qui aura ces deux côtés perpendiculaires l'un à l'autre (**6**); il ne reste donc qu'à démontrer que le triangle isoscèle est le plus grand de tous ces triangles rectangles. Imaginons pour cela un triangle isoscèle construit sur l'hypoténuse de l'un de ces triangles rectangles non isoscèles, et dont la somme des côtés soit la même; il sera plus grand que le triangle non isoscèle, mais plus petit que le triangle isoscèle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont égaux à ses côtés.

Remarquons encore que le produit de deux parties d'une droite donnée est le plus grand possible, quand ces parties sont égales, ou que le rectangle est le plus grand des parallélogrammes à côtés donnés, et qu'entre tous les rectangles de même périmètre le carré est un maximum.

§ II. *Théorèmes fondamentaux pour les figures sphériques.*

8. *Lemme.* Les sommets de tous les triangles sphériques de même base se trouvent sur le grand cercle, qui est perpendiculaire à la base en son milieu; de deux quelconques de ces triangles celui qui a le plus grand périmètre est le plus grand, et réciproquement.

9. *Lemme.* L'aire d'un triangle sphérique de base donnée est d'autant plus petite ou plus grande que le cercle qui passe par son sommet et par les points diamétralement opposés aux extrémités de sa base, est plus ou moins incliné sur cette base (c'est-à-dire selon que l'angle formé par ce cercle et la base est plus petit ou plus grand). Il s'ensuit que les sommets de tous les triangles de même surface se trouvent sur un même cercle, et réciproquement [*], et que tout autre triangle a une

---

[*] J'ai démontré ce théorème pour la première fois dans un Mémoire intitulé : *De la transformation et de la division des figures sphériques au moyen de constructions géométriques.* (*Journal* de M. Crelle, tome II, page 45, mars 1827.) Fondé sur ce théorème, le Mémoire dont je parle avait pour but de rapprocher les opérations de la géométrie sphérique de celles de la géométrie plane.

Ce théorème avait déjà été démontré, du moins en partie, d'abord par *Lexell*, et plus tard par *Legendre;* mais il n'est devenu d'une application facile, que par ce complément indispensable : *que le cercle qui contient les sommets de tous les triangles équivalents passe par les points opposés aux extrémités de la base.* Nous en rappelaire plus petite ou plus grande que ceux-ci, selon que son sommet se trouve dans l'espace compris entre la base et le cercle, ou bien au-delà de ce cercle.

---

lerons succinctement la démonstration, parce que tous les lecteurs ne sont peut-être pas à même de recourir au Mémoire cité.

Nous supprimons les figures, auxquelles il sera facile de suppléer.

1°. Les angles à la base sont égaux dans le triangle sphérique isoscèle.

2°. Dans tout quadrilatère sphérique ABCD inscrit dans un cercle, la somme des angles opposés est la même, en sorte que l'on a

$$A + C = B + D;$$

car si l'on joint le pôle P du cercle aux sommets du quadrilatère au moyen des rayons sphériques (ou arcs de grand cercle) PA, PB, PC, PD, on obtient quatre triangles isoscèles APB, BPC, etc., dont chacun a les angles à la base égaux entre eux, d'où résulte

$$A + C = B + D.$$

3°. Tirez la diagonale AC dans ce même quadrilatère inscrit, désignez par α et α_1 les deux parties dans lesquelles elle divise l'angle A, et de même par γ et γ_1 les parties de l'angle C, de manière que les angles α et γ appartiennent au triangle ABC, et α_1, γ_1 au triangle ADC, vous aurez

$$\alpha + \alpha_1 + \gamma + \gamma_1 = B + D \ (2°),$$
$$(\alpha + \gamma) - B = D - (\alpha_1 + \gamma_1)$$

Fixons les trois sommets A, D, C, tandis que B décrit l'arc ABC; alors les angles B, α, γ changeront de grandeur, mais la différence $\alpha + \gamma - B$ est constante, puisqu'elle reste toujours égale à la différence invariable $D - (\alpha_1 + \gamma_1)$; donc *la base* AC *d'un triangle sphérique* ABC *étant connue de grandeur et de position, et la différence entre la somme des angles adjacents à la base* $(\alpha + \beta)$ *et l'angle au sommet* (B) *étant donnée, le lieu géométrique du sommet est un certain cercle* P *qui passe toujours par les extrémités* A *et* C *de la base.*

4°. Désignons en outre par A_1 et C_1 les points opposés aux points fixes A et C; ils se trouvent sur les côtés AB et BC prolongés au-delà de B, de manière qu'on a deux triangles opposés au sommet, ABC et A_1BC_1, qui changent simultanément; leurs angles au sommet commun B étant opposés, sont égaux, et les angles α, γ et A_1, C_1, adjacents aux bases fixes AC et A_1C_1, sont suppléments les uns des autres, de manière qu'on a

$$\alpha + A_1 = \pi, \quad \gamma + C_1 = \pi;$$

10. *Lemme.* Quand des cercles se touchent sur la surface de la sphère, leur point de contact se trouve sur le même grand cercle avec leurs pôles, de manière que le grand cercle qui passe par deux de ces points, passe nécessairement par le troisième.

Premier théorème fondamental.

11. I. *Entre tous les triangles sphériques de même base et de même périmètre, le triangle isoscèle est un maximum.*

II. *Entre deux de ces triangles, celui qui a l'angle le plus petit ou le plus grand à la base, ou dont l'un des côtés est le plus petit ou le plus grand, est le plus petit lui-même, et réciproquement.*

La démonstration de ce théorème ressemble parfaitement à celle du théorème analogue (**3**) ; on n'a qu'à remarquer que les triangles sphériques correspondants aux triangles plans BED et FEG (*fig.* 1) ne sont pas égaux, mais symétriques; ce qui ne nuit en rien au raisonnement (deux triangles symétriques peuvent toujours d'ailleurs être divisés en parties égales). Cette remarque servira de même pour les cas suivants, dans lesquels une différence pareille se fait remarquer.

12. *Entre tous les triangles sphériques équivalents et de même base, le triangle isoscèle a le plus petit périmètre.*

---

puisque (3°) $\alpha + \gamma - B$ est constant et égal à $D - (\alpha_1 + \gamma_1)$, que nous appellerons K, on obtiendra donc

$$A_1 + B + C_1 = 2\pi - K;$$

c'est-à-dire que si la différence $\alpha + \gamma - B$ est constante dans le premier triangle ABC, la somme des angles et par-là même l'aire de l'autre triangle A_1BC_1 sont aussi constantes, et réciproquement. Mais, cela étant, le lieu géométrique du sommet B est un cercle qui passe toujours par les pointes fixes A et C; la proposition est donc démontrée.

Pour le cas spécial où la base fixe AC devient égale au diamètre sphérique du cercle P, K est égale à zéro (puisque $D = \alpha_1 + \gamma_1$, $B = \alpha + \gamma$), et réciproquement. Dans ce cas on aura

$$A_1 + B + C_1 = 2\pi;$$

donc l'aire du triangle A_1BC_1 est égale au quart de la surface de la sphère.

Une autre démonstration, plus simple encore, du théorème général, résulte de considérations stéréométriques.

La démonstration de ce théorème est conforme à celle du théorème analogue donné ci-dessus (**4**).

13. *Entre tous les triangles sphériques de même périmètre, le triangle équilatéral est un maximum; et entre tous les triangles sphériques équivalents, le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.*

Les démonstrations données ci-dessus (**5**) sont pareillement applicables à ce théorème.

Second théorème fondamental.

14. *Le triangle maximum entre ceux que l'on peut construire avec deux côtés donnés, est celui dans lequel l'angle des deux côtés est égal à la somme des angles à la base, ou dans lequel la base est un diamètre du cercle circonscrit.*

Démonstration. Prenons l'un des côtés donnés, par exemple AC (*fig.* 5) pour base fixe; alors le lieu géométrique des sommets des triangles sera un cercle DBE, dont A est le pôle et dont le rayon sphérique est égal à l'autre côté donné AB. Soient A_1 et C_1 les pôles respectivement opposés à A et C. Chacun des cercles qui passent par A_1 et C_1 est le lieu géométrique des sommets d'un système de triangles équivalents, construits sur la base AC (**9**); s'il rencontre le cercle fixe A en deux points D, E, ces deux points seront les sommets de deux triangles ADC et AEC, qui sont équivalents et ont pour côtés les côtés donnés. Remarquons en passant qu'il s'ensuit : *qu'à chacun des triangles qui peuvent être construits avec les côtés donnés correspond en général un second triangle équivalent.* L'aire augmente à mesure que le cercle, lieu géométrique, est moins incliné sur le plan de la base AC; or ce cercle doit d'ailleurs rencontrer le cercle fixe A; il fera donc avec la base le plus grand angle possible quand il ne touchera le cercle fixe qu'en un seul point B; donc le triangle ABC est un maximum entre tous les triangles qui ont les mêmes côtés donnés. Le pôle F du cercle tangent se trouve sur le prolongement du côté AB (**10**). Puisque $FA_1 = FB = FC_1$, on aura, dans le triangle A_1BC_1, $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$; mais on a $\alpha + \alpha_1 = \gamma + \gamma_1 = \pi$ (parce que α_1, γ_1 sont égaux aux angles supplémentaires de α et γ) et $\beta_1 = \beta$; donc

$$\alpha = \beta + \gamma,$$

c'est-à-dire que dans le triangle maximum ABC, l'angle α qui est formé par les deux côtés donnés AB et AC est égal à la somme des deux autres angles $\beta + \gamma$, ce qui était d'abord à démontrer. Ensuite divisez l'angle α au moyen d'un grand cercle AG, de manière qu'on ait $BAG = \beta$, $CAG = \gamma$; alors on a $AG = BG = CG$, donc G est le pôle et BC le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC, ce qui démontre la seconde partie du théorème.

15. *La somme des deux côtés d'un triangle sphérique étant donnée, le triangle maximum est celui qui a ses côtés égaux et formant entre eux un angle égal à la somme des deux autres angles.*

La démonstration de ce théorème est parfaitement semblable à celle du théorème analogue sur les triangles plans (7). On pourrait de même ajouter des corollaires analogues sur les quadrilatères sphériques.

§ III. *Théorèmes plus généraux concernant les figures planes et sphériques.*

Remarque préliminaire générale.

16. Nous venons de montrer, en ce qui concerne les triangles plans et sphériques, combien il est facile d'énoncer les théorèmes d'une manière analogue et de mettre les démonstrations en parfait accord; cela sera tout aussi simple pour les théorèmes et les démonstrations concernant les autres figures. Seulement, pour plus de brièveté, nous énoncerons dans la suite en même temps, et les théorèmes sur les figures planes, et ceux sur les figures sphériques, ou du moins on y suppléera par la pensée toutes les fois que les expressions ne conviendront qu'aux figures planes. J'ai même tâché d'arranger les démonstrations de manière à ce qu'elles puissent servir indistinctement, et presque sans changer d'expressions, pour les figures planes et sphériques; mais partout où il y avait une différence essentielle, je n'ai pas manqué de l'indiquer, et de la discuter même. Pour mieux saisir l'origine générale de ces différences, remarquons, dès à présent, quelques-unes des propriétés des figures sphériques et une relation particulière qui existe entre elles.

I. Le périmètre d'un polygone sphérique convexe est, en général, plus petit que le grand cercle qui est sa limite; de même (la sphère étant donnée) l'aire ou la somme des angles de ce polygone ne peut pas devenir aussi grande que l'on voudra; mais elle a la demi-surface de la sphère pour limite. Or si l'on veut prendre indistinctement pour l'aire du polygone l'une ou l'autre des parties dans lesquelles la surface de la sphère est divisée par sa circonférence, on aura la surface entière de la sphère pour limite de surface. Mais dans le cas où l'on prendrait l'aire de la plus grande partie, le polygone ne serait plus convexe, mais concave; c'est pourquoi l'on ne s'occupe, en général, que de l'aire de la plus petite partie. Cependant ces deux parties sont liées entre elles de manière que, l'une d'elles étant donnée, l'autre est connue, et que, l'une devenant un maximum sous certaines conditions, l'autre sera en même temps un minimum. Tout ce que nous venons de dire sur les polygones est pareillement vrai pour les courbes convexes et fermées.

II. Les figures polaires fournissent des réciproques à tous ces théorèmes : pour chaque théorème qui s'applique, sous certaines conditions, aux côtés et aux angles, au périmètre et à l'aire, etc., d'un polygone de n côtés, il y a toujours pour le polygone polaire un certain théorème correspondant, qui dépend du premier et qui s'obtient en substituant, tant dans les données de la question que dans les propriétés dérivées, un côté à un angle, le périmètre contre l'aire, le maximum au minimum, etc. [*]. Mais nous ne ferons dans la suite aucun usage de cette loi de réciprocité, parce qu'elle ne s'applique pas également aux figures planes. Nous n'indiquerons que la propriété suivante qui en découle.

---

[*] C'est ainsi que l'on peut déduire immédiatement du théorème (**11**) les théorèmes suivants :

I. *Entre tous les triangles équivalents qui ont le même angle au sommet, celui qui a des angles égaux à la base possède un périmètre minimum.*

II. *De deux de ces triangles, celui qui a le côté le plus grand ou le plus petit, ou dont l'un des angles à la base est le plus grand ou le plus petit, aura de même un plus grand périmètre, et réciproquement.*

Il y a une certaine relation constante entre le périmètre de l'une et l'aire de l'autre de deux figures polaires sphériques, laquelle relation sert à trouver une quelconque de ces deux quantités, quand l'autre est donnée. Elle consiste en ce que, si l'on prend la quatrième partie d'un grand cercle (le quadrant) pour unité de longueur et la huitième partie de la surface de la sphère (l'octant) pour unité de surface, que l'on désigne ensuite par u le périmètre de l'une de ces figures et par f la surface de l'autre, exprimées au moyen de ces unités; alors on aura toujours

$$u + f = 4,$$

c'est-à-dire que *pour deux figures sphériques polaires la somme du périmètre* (u) *de l'une d'elles et de l'aire* (f) *de l'autre est égale à quatre.*

Les corollaires suivants découlent de cette loi :

Quand l'une des deux quantités u et f devient un maximum ou un minimum, l'autre devient en même temps un minimum ou un maximum.

Quand la rectification ou la quadrature d'une courbe sphérique peut être exécutée, alors la courbe polaire est respectivement carrable ou rectifiable, et dans le cas contraire elle ne l'est pas.

En rectifiant ou en carrant l'une de ces courbes, on obtient simultanément l'aire ou le périmètre de l'autre, etc.

Théorème principal.

17. *Entre toutes les figures isopérimètres planes (ou sphériques), le cercle est un maximum;* et réciproquement *entre toutes les figures planes équivalentes, le cercle a le plus petit périmètre.*

Démonstration. Il est clair qu'il y a une infinité de figures d'un périmètre donné qui ont diverses formes et diverses aires. On comprend de même que l'aire pourra devenir aussi petite qu'on voudra, mais non pas aussi grande qu'on voudra, puisqu'elle reste évidemment toujours comprise dans l'intérieur du cercle décrit d'un des points de son contour comme centre avec un rayon égal à la moitié du périmètre donné. Mais puisque des figures de périmètre donné peuvent avoir différentes aires, sans pouvoir toutefois grandir indéfiniment, il faut qu'il y ait entre elles *une* figure maximum ou *plusieurs* maxima de différentes formes, c'est-à-dire plusieurs figures de différentes formes et d'une même aire, plus grande que celle des autres figures. Remarquons encore *qu'une figure dont l'aire peut être agrandie sans changer de périmètre, n'est pas un des maxima.* Il s'ensuit que chaque figure maximum est convexe, et qu'elle ne peut pas avoir de lignes droites dans son périmètre, ou du moins qu'il n'y a pas deux lignes droites consécutives, car elle pourrait encore devenir plus grande dans chacun de ces deux cas.

Soit EFGH (*fig.* 6) une des figures maxima. A chaque point A du périmètre correspond un second point B, placé de manière que ces deux points divisent le périmètre en deux parties égales, de sorte qu'on a, quant à la longueur, ligne AEFB = AHGB. Supposons que A et B aient cette propriété, alors la droite AB divise de même l'aire de la figure en deux parties égales, car si l'une d'elles, par exemple AHGBA, était plus grande que l'autre AEFBA, on pourrait transformer la seconde en la rendant égale à la première, puisqu'elles sont isopérimètres et qu'elles ont la base AB en commun; l'aire de la figure entière se serait ainsi accrue sans changer de périmètre, ce qui serait contraire à l'hypothèse; donc les deux parties doivent être équivalentes. Si elles étaient de différentes formes, on pourrait changer l'une d'elles, par exemple AEFBA, de manière qu'elle devienne symétriquement égale à l'autre AGHBA, la ligne AB étant l'axe de symétrie; et la figure nouvelle, composée de ces deux parties, serait équivalente de périmètre et d'aire à la figure primitive; elle serait donc aussi une des figures maxima. Admettons donc que AEFBA soit la partie transformée devenue symétrique à AGHBA; il s'ensuit que le prolongement de la perpendiculaire DI, abaissée d'un point quelconque D du demi-périmètre AHGB sur l'axe AB, rencontre l'autre moitié AEFB en un point C équidistant de l'axe, de manière qu'on a DI = CI, et que les triangles ADB et ACB sont égaux ou symétriques. Si les angles homologues D et C dans ces deux triangles n'étaient pas droits, on pourrait agrandir simultanément l'aire de ces triangles sans rien changer à la longueur de leurs côtés AD et BD, AC et BC (6), ni à la grandeur des segments de la figure, AHD, DGB, BFC, CEA; la base commune AB changerait seule; mais par-là l'aire de la figure entière deviendrait plus grande (puisque le quadrilatère ADBC en fait partie), sans que le périmètre changeât de grandeur, ce qui est contraire à l'hypothèse; donc les angles D et C sont des angles droits. Et comme en laissant les points A et B fixes, D peut représenter un point quelconque du demi-périmètre AHGB, il s'ensuit que la figure en question est un cercle. Il est vrai que la moitié AHGB de ce cercle appartient seule à la figure primitive, et que l'autre moitié AEFBA de celle-ci pouvait être de forme différente; mais puisque, comme nous venons de le démontrer, la moitié non changée de la figure est toujours un demi-cercle (AHGBA), puisqu'en outre on peut choisir arbitrairement et les points de division A et B, et la moitié qui doit rester invariable, la figure entière ne peut être qu'un cercle. Il n'y a donc pas *plusieurs* figures de différentes formes ayant la propriété d'unir la plus grande aire possible à un périmètre donné; il n'y en a qu'une *seule*, le cercle.

Remarques I. Le théorème réciproque se déduit indirectement de celui-ci. Il en est de même pour la plupart des théorèmes réciproques dont nous aurons à nous occuper dans la suite; c'est pourquoi leurs démonstrations seront toujours sous-entendues.

II. Rappelons encore ici, en ce qui concerne les figures sphériques, que toutes les fois que l'on aura recours à un théorème, fondamental ou autre, concernant les figures planes, pour en déduire une démonstration, on devra avoir égard en même temps au théorème analogue sur les figures sphériques. Ayant, par exemple, démontré ci-dessus que dans les triangles ADB et ACB les angles D et C sont droits, on en conclura pour les figures sphériques, que chacun de ces angles est égal à la somme des angles à la base (**14**).

18. Le théorème que nous venons de démontrer (**17**) mérite en effet le nom de théorème *principal*, car il contient, il résume pour ainsi dire les principes les plus essentiels à la solution de la plupart des questions concernant les maxima et les minima d'aire, de périmètre, etc., dans les figures planes et sphériques. Les solutions qu'on en tire pour ces questions sont même aussi naturelles, aussi simples et aussi immédiates que possible, car elles dérivent graduellement du théorème principal, dont elles font pour ainsi dire partie, ou plutôt elles se présentent comme des théorèmes sur les différentes parties de la figure qui en est l'objet. De même que le cercle a la double propriété d'avoir entre toutes les figures isopérimètres ou équivalentes respectivement la plus grande aire ou le plus petit périmètre, de même ses différentes parties sont douées de propriétés semblables, desquelles ces théorèmes découlent. Ainsi ces théorèmes sont liés avec le théorème principal, de telle manière qu'ils en dérivent comme des corollaires, ou du moins que leurs démonstrations en résultent pour la plupart immédiatement. Et pourtant quelques-uns d'entre eux offriraient de grandes difficultés si l'on essayait de les démontrer isolément et indépendamment du théorème principal; c'est là, je crois la raison pour laquelle ils n'ont encore été énoncés ni démontrés par personne, que je sache.

Il serait utile d'adopter des dénominations fixes pour les différentes parties dans lesquelles le cercle lui-même et l'espace qui l'environne peuvent être divisés au moyen de cordes, de sécantes et de tangentes, et de poser certains lemmes préliminaires; cela nous aiderait à énoncer les théorèmes suivants avec plus de facilité, et à les manier avec plus de sûreté. Mais comme la discussion complète de ces matières nous mènerait trop loin, nous n'en présenterons ici qu'une légère esquisse.

On a donné les noms de segment et de secteur à certaines parties de l'aire du cercle; il faudrait de même consacrer des dénominations spéciales aux parties qui sont limitées :

a) par plusieurs cordes et les arcs intermédiaires;

b) par plusieurs angles circonscrits et les arcs intermédiaires;

c) par des cordes et des angles circonscrits et les arcs intermédiaires, etc.

J'ai choisi respectivement les expressions suivantes :

a. *partie de cercle entre* n *cordes;*

b. *partie de cercle entre* m *angles circonscrits;*

c. *partie de cercle entre* n *cordes et* m *angles circonscrits, etc.*

Il resterait encore à rechercher sous quelles conditions chacune de ces parties de cercle sera déterminée, ou bien, si l'on suppose certains éléments donnés, quelles seront les limites entre lesquelles les autres éléments seront renfermés, etc. On peut suivre dans ces recherches une marche toute géométrique, en faisant varier le cercle ou ses éléments d'une manière continue; on parviendra ainsi à se convaincre par l'intuition immédiate de l'existence de certaines relations, et des propriétés qui sont contenues dans les théorèmes auxiliaires dont nous venons de parler. Nous les pourrons donc supposer connus dans la suite, comme on le fait habituellement pour quelques-uns d'entre eux; par exemple, on suppose qu'il y a toujours un cercle auquel un polygone de côtés donnés peut être inscrit.

Pour faire mieux comprendre ce que nous venons de dire, nous allons traiter de la manière indiquée la partie de cercle la plus simple, le segment.

1°. L'aire du cercle est divisée en deux segments $a\alpha$ et $a\beta$ (*fig.* 7) par une corde quelconque a; le plus petit de ces segments peut être nommé segment à *angle aigu*, et l'autre segment à *angle obtus*, lesquelles dénominations sont empruntées aux angles que la corde forme avec l'arc. *Segment rectangulaire* est donc synonyme de *demi-cercle*.

2°. La corde a et le cercle K étant donnés, les aires et les arcs (α, β) des segments restent constants, pendant que la corde change arbitrairement de position.

3°. La corde a étant seule donnée, lorsque le cercle grandit ou diminue, l'arc le plus grand β varie dans le même sens, tandis que le petit arc α varie en sens contraire, et les aires des segments augmentent et diminuent comme les arcs correspondants. L'accroissement et la diminution du grand arc β surpassent la diminution et l'accroissement du petit arc α; la même relation existe entre les segments correspondants. — Le cercle obtient son minimum lorsque son diamètre devient égal à a; alors on a $\alpha = \beta$ et $a\alpha = a\beta$: quand au contraire le cercle devient infiniment grand, l'arc α atteint sa limite, la corde a; de même le segment $a\alpha$ atteint sa limite, zéro, tandis que β et $a\beta$ deviennent infiniment grands. Donc, pendant que le cercle obtient toutes les valeurs possibles, les arcs α et β parcourent ensemble toutes les valeurs entre a et ∞, et les aires des segments $a\alpha$ et $a\beta$ prennent toutes les grandeurs entre o et ∞.

On remarque encore :

4°. Qu'étant données deux des quatre quantités suivantes : 1) le cercle K, 2) la corde a, 3) l'arc α ou β, 4) l'aire du segment

$\alpha\alpha$ ou $a\beta$, les deux autres sont absolument déterminées, sauf le cas où l'arc et l'aire seraient donnés, car alors deux segments seraient possibles en général, savoir, le segment à angle aigu et celui à angle obtus, comme on verra dans la suite (**33**). On suppose toutefois, que les quantités données ne s'excluent pas mutuellement, en ayant égard aux limites indiquées ci-dessus (3°).

Conséquences du théorème principal.

19. *Si le périmètre d'une figure se compose d'une droite de longueur arbitraire* G *et d'une ligne* L *de forme arbitraire, et si en même temps la longueur de la ligne* L *ou l'aire de la figure est donnée, celle-ci est un maximum, ou la ligne* L *est un minimum, quand cette figure est un demi-cercle.*

Démonstration. Toute figure comprise dans ce théorème peut être considérée comme la moitié d'une figure symétrique, dont la droite G est l'axe de symétrie, et dont le périmètre, égal à 2L, est donné. Mais l'aire de la moitié est nécessairement un maximum dès que la figure entière en est un. Donc notre théorème est une conséquence du théorème du n° **17** [*].

Il s'ensuit en particulier : *qu'entre tous les segments de cercle à arcs égaux ou à aires égales, c'est le demi-cercle qui a l'aire la plus grande ou l'arc le plus petit.*

20. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé d'une droite donnée* a *et d'une ligne prise à volonté* L, *le segment de cercle a la plus grande aire pour des longueurs égales de la ligne* L, *et la plus petite ligne* L *quand les aires sont égales.*

---

[*] On pourrait démontrer séparément ce théorème, et en déduire inversement le théorème principal; la démonstration sera même très courte, si l'on renonce en partie à la rigueur et à la généralité que nous avons tâché de maintenir. On n'a qu'à supposer qu'une figure maximum existe; dès lors il ne sera pas difficile de démontrer qu'elle ne peut être que le demi-cercle, parce qu'on pourra faire grandir chaque autre figure, telle que AEFBA (fig. 6) (dans laquelle AB représente la droite G qui est à volonté, et AEFB représente la ligne donnée L), toutes les fois que l'angle ACB ne sera pas droit pour chacun des points C de la ligne AEFB.

Démonstration. Supposons la ligne L de forme quelconque, et qu'elle compose avec la droite a le périmètre de la figure aL, on peut toujours construire sur a un segment de cercle dont l'arc α soit égal à L (**18**), α et L étant situés du même côté de a. Complétons le cercle, et désignons l'autre arc par β; alors le cercle de périmètre $\alpha + \beta$ est plus grand que la figure limitée par $\mathrm{L} + \beta$ (**17**); ainsi $a\alpha + a\beta > a\mathrm{L} + a\beta$; donc $a\alpha > a\mathrm{L}$.

Remarque. On déduira de ce théorème une règle générale, qui nous sera bien utile dans la suite. La voici :

Dans toute figure dont l'aire doit être un maximum sous des conditions quelconques, chaque partie du périmètre qui est libre d'avoir une forme quelconque entre deux points donnés, doit être un arc de cercle.

21. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé de deux droites données* a, b *et d'une ou de deux lignes à volonté* l *et* l_1, *c'est la partie de cercle comprise entre les droites* a *et* b, *prises comme cordes* (**18**), *qui a l'aire maxima quand la somme des lignes* $\mathrm{l} + \mathrm{l}_1 = \mathrm{L}$ *est donnée, et la somme minima* L *ou* $\mathrm{l} + \mathrm{l}_1$, *quand l'aire est donnée.*

Démonstration. Soit K le segment de cercle, et F une quelconque des autres figures dont nous venons de parler. Ajoutons à K les deux segments de cercle $a\alpha$ et $b\beta$, de manière à compléter le cercle K_1; ajoutons les mêmes segments à la figure F, de manière à obtenir une figure F_1; alors K_1 et F_1 seront de même périmètre, $\mathrm{L} + \alpha + \beta$; mais l'aire de K_1 est plus grande que celle de F_1, donc aussi $\mathrm{K} > \mathrm{F}$.

Remarque. On voit qu'il est indifférent que les droites a et b se succèdent immédiatement dans le périmètre, qu'elles aient ou qu'elles n'aient pas d'extrémité commune, qu'il y ait une seule ligne L ou deux lignes l et l_1.

22. *Si au lieu des droites* a *et* b, *leur somme* $\mathrm{s} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$ *est donnée, les autres conditions restant les mêmes, l'aire de la partie de cercle est un maximum maximorum, et la somme* $\mathrm{L} = \mathrm{l} + \mathrm{l}_1$ *est un minimum minimorum, lorsque les deux droites sont égales, c'est-à-dire lorsqu'on a* $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \frac{1}{2}\mathrm{s}$.

Démonstration. Prenons a et b de longueurs différentes, et construisons la partie de cercle renfermée par elles de manière qu'elles aient un point C commun (on aura alors $l_1 = 0$ et $l = L$); joignons les autres extrémités A et B par la droite AB, la figure en question sera composée du triangle ACB et du segment ALB; mais ce triangle s'accroîtra quand les côtés a et b deviennent égaux; la figure entière croît par là, et plus encore quand elle se convertit en une partie de cercle entre les côtés égaux, pris comme cordes, C. Q. F. D.

23. *La partie de cercle entre* n *cordes* a, b, c,.... *est un maximum entre toutes les figures dont le périmètre est composé de ces mêmes côtés droits et d'autres lignes à volonté* l, l_1, l_2,.... *dont le nombre est arbitraire depuis* 1 *jusqu'à* n *et dont la somme* = L; *et les aires de toutes ces figures étant égales, son périmètre est un minimum.*

Ce théorème se démontre comme celui du n° **21**.

24. *Si dans le théorème précédent les cordes* a, b, c,.... *ne sont pas données isolément, mais si leur somme* s *est donnée, l'aire de la partie de cercle est un maximum entre les maxima, et la somme* L *des autres parties du périmètre* l, l_1, l_2,.... *est un minimum entre les minima, lorsque ces droites sont égales entre elles.* — Ce théorème est encore applicable au cas où l'on se donnerait quelques-unes des droites et seulement la somme des autres, et au cas où les sommes de différents groupes de droites seraient données; ce seraient alors les droites appartenant au même groupe qui devraient être égales entre elles.

Ce théorème se démontre de la même manière que le théorème du n° **22**.

25. Pour le cas spécial où la somme $L = l + l_1 + \ldots$ est égale à zéro, on a les théorèmes suivants qui sont connus:

I. *Un polygone de côtés* a, b, c,..., *donnés, est un maximum lorsqu'il est une partie de cercle entre les cordes* a, b, c,...., *c'est-à-dire lorsqu'il est inscriptible dans un cercle.*

II. *Un polygone de* n *côtés et de périmètre donné est un maximum, lorsqu'il a les côtés égaux et qu'il est inscriptible à un cercle, c'est-à-dire lorsqu'il est régulier;* et réciproquement *entre les périmètres de tous les polygones équivalents de* n *côtés, celui du polygone régulier est un minimum.*

26. Quand on cherchera donc quel polygone a l'aire maxima pour un périmètre constant, ou le périmètre minimum pour une aire constante, le nombre de côtés étant variable, on n'aura qu'à s'occuper des polygones réguliers, et l'on trouvera la loi suivante :

Les aires des polygones réguliers isopérimètres forment une série croissante, qui commence par le triangle et se termine par le cercle ; et les périmètres des polygones équivalents forment une série décroissante, à partir du triangle jusqu'au cercle.

Démonstration. Deux polygones réguliers isopérimètres d'un nombre de côtés différents étant donnés, par exemple un pentagone ABCDE et un quadrilatère *abcd*, on peut considérer ce dernier comme un pentagone dont l'un des côtés serait nul, ou bien, en prenant arbitrairement un point *e* sur un des côtés de ce quadrilatère, par exemple, sur *ad*, le considérer comme un pentagone *abcde*, dont l'un des angles *e* serait égal à deux angles droits; le quadrilatère régulier peut donc être regardé comme un pentagone irrégulier : donc son aire est plus petite que celle du pentagone régulier ABCDE.

Remarque I. On trouverait des lois semblables et pour le théorème du n° **24** et pour un grand nombre des théorèmes suivants, en supposant toujours la somme des côtés rectilignes *a*, *b*, *c*,..., donnée, et en variant leur nombre; mais il suffit d'avoir appelé sur ce point l'attention du lecteur.

II. La démonstration qu'on vient de lire est remarquable par sa simplicité, et il est bien étonnant qu'on ne l'ait pas encore donnée. Toutes les démonstrations que je connais de ce théorème pour les figures planes sont plus ou moins prolixes et embarrassées; la plus élégante de toutes est celle qu'en donne *Lhuilier;* mais il paraît qu'il n'en existe encore aucune pour les figures sphériques. Aussi ne suis-je parvenu à trouver la démonstration donnée ci-dessus, qui s'applique également aux deux espèces de figures, qu'après en avoir fait plusieurs pour les figures planes, et tenté inutilement de les appliquer d'une manière analogue aux figures sphériques.

27. I. *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé d'un nombre* n *de côtés rectilignes* a, b, c,..., *donnés, d'une droite* G *de longueur arbitraire, et d'un nombre* (*qui peut varier depuis* 1 *jusqu'à* n *inclusivement*) *de lignes,* l, l_1, l_2,..., *de forme quelconque, la partie de cercle entre* G *pris pour diamètre et les cordes* a, b, c,..., *est un maximum tant que la somme* L $=$ l $+$ l_1 $+\ldots$ *reste la même, et son périmètre est un minimum entre ceux de toutes les figures qui lui sont équivalentes.*

II. *Un théorème analogue s'applique au cas où la somme des* n *droites* a, b, c,..., *serait donnée; il faut alors qu'elles soient égales entre elles.*

III. *Si dans les deux cas* (I *et* II) *les lignes* l, l_1..., *sont toutes nulles, la figure se change en un polygone de* n $+$ 1 *côtés, inscrit à un cercle qui aura le côté arbitraire* G *pour diamètre.*

La démonstration est fondée sur les théorèmes précédents et ressemble à celle du théorème (**19**).

28. Entre toutes les figures dont le périmètre est composé des deux côtés AB, AC d'un angle droit A, et d'une ligne arbitraire L, le quadrant de cercle a la double propriété d'avoir une aire maxima pour la même longueur de la ligne L, et la ligne L minima pour l une même aire donnée. — Ce théorème a pareillement lieu quand la ligne L est composée de droites données a, b, c, ..., et de lignes arbitraires l, l_1, l_2, ...; c'est alors la partie de cercle entre les cordes a, b, ..., et les rayons AB, AC qui est un maximum; de même quand la somme et le nombre des droites a, b, c, ..., sont donnés.

Dans tous ces cas on peut considérer la figure en question comme moitié d'une autre figure, qui aurait la droite AB ou AC pour axe de symétrie; ces théorèmes découlent alors immédiatement des théorèmes précédents (**19** et **27**).

29. I. Si la ligne L doit partir d'un certain point B du côté donné AB, le maximum ou le minimum (**28**) a lieu lorsque la figure est la moitié d'une partie de cercle dont l'autre côté AC est l'axe de symétrie, de manière que le centre du cercle est sur ce côté auquel par suite L est perpendiculaire.

II. Le point B étant donné sur le côté BD, si l'angle BDC, au lieu d'être droit, est aigu, les théorèmes restent les mêmes, car la figure s'est seulement accrue d'un triangle constant BAD, que l'on obtient en abaissant du point B une perpendiculaire BA au côté CD; le centre du cercle se trouve encore sur le côté CD.

30. *Entre toutes les figures limitées par les côtés* AB *et* AC *d'un* *angle donné* BAC, *qui peuvent être de longueur quelconque, et par une ligne* L *de longueur donnée mais de forme arbitraire, le secteur de cercle est un maximum.*

Démonstration. Qu'on construise la même figure symétriquement sur un des côtés, par exemple sur AC, de manière que la figure ABLC soit d'un côté et que la figure AB_1L_1C soit de l'autre côté de AC; alors il faut, pour que l'aire soit la plus grande possible, que la ligne $BLCL_1B_1$, de même que sa moitié L, soient des arcs d'un cercle dont le centre se trouve sur le côté AC; mais par les mêmes raisons ce même centre de L doit être sur le côté AB; il est donc au point d'intersection A des côtés AB, AC.

Une autre démonstration découle de (**29**, I).

31. I. *Ce théorème* (**30**) *a pareillement lieu pour le cas où la ligne* L *est composée de droites données* a, b, c,..., *et de lignes arbitraires* l, l_1, l_2,...; *la partie du secteur de cercle entre les rayons* AB, AC *et les cordes* a, b, c,..., *est alors un maximum.*

II. *Faisant décroître les lignes* l, l_1, l_2,... *jusqu'à ce qu'elles deviennent nulles, on obtient un théorème concernant le polygone dont un angle* BAC *est donné avec tous les côtés* a, b, c,..., *non adjacents à cet angle* [*].

Ces théorèmes et le théorème (**30**), se transforment en plusieurs autres, donnés ci-dessus, quand on fait successivement l'angle $A = \frac{1}{2}\pi$, $= \pi$, $= 2\pi$.

32. *Entre tous les secteurs de cercle isopérimètres, celui dont l'arc est égal au diamètre est un maximum.*

Démonstration. Toute aire de secteur est égale à la moitié d'un triangle rectangle, dont les côtés qui comprennent l'angle droit sont respectivement égaux à l'arc et au diamètre; mais ce triangle est un maximum quand il est isoscèle (**7**) : donc, etc.

Remarque. Ce théorème ne s'applique pas complétement aux secteurs

---

[*] Il s'ensuit en particulier : *qu'entre tous les triangles dont l'angle au sommet* A *et la base* a *sont donnés, c'est le triangle isoscèle qui est un maximum; et qu'entre tous les triangles équivalents, qui ont le même angle* A *au sommet, c'est le triangle isoscèle qui a la plus petite base* a.

de cercle sphériques, car ce n'est pas au diamètre sphérique mais au diamètre rectiligne véritable que l'arc doit alors être égal. Aussi devient-il difficile de le démontrer géométriquement, tandis qu'on y parvient sans peine au moyen du calcul.

Les deux théorèmes se correspondent du reste de la manière suivante :

I. L'angle au centre appartenant au secteur maximum reste le même, tant sur la sphère que dans le plan, quelle que soit du reste la longueur du périmètre; il est toujours égal à $\frac{4}{\pi}\,90^\circ$.

II. L'aire du secteur plan est égale au carré du rayon, l'aire du secteur sphérique est égale au carré de la corde rectiligne qui correspond à son rayon sphérique.

Pour le cas spécial où le périmètre du secteur sphérique est égal au périmètre d'une moitié de grand cercle, ce secteur correspond à un grand cercle, et son aire est égale à $2r^2$, ou à $\frac{1^{\text{ième}}}{2\pi}$ de la surface de la sphère dont r est le rayon.

33. *De deux segments de cercle à angles aigus et à arcs de même longueur, celui auquel appartient l'angle le plus grand ou la plus petite corde, est le plus grand; et de deux segments à angles obtus et à arcs de même longueur, le plus grand est celui dont l'angle est plus petit ou dont la corde est plus grande.*

Démonstration. Soient ALB et $A_1L_1B_1$ deux segments à angles aigus; soit en outre arc $L =$ arc L_1 et corde $AB <$ corde A_1B_1 ; de C, centre de L, menons les rayons CA et CB, et prenons sur leurs prolongements deux points de manière que la droite qui les unit soit parallèle à AB et égale à A_1B_1 (*fig.* 8); construisons enfin le segment $A_1L_1B_1$ sur cette corde qui sera située au-delà de AB; on sait (**30**) que le secteur CALBC est plus grand que $CA_1L_1B_1C$; donc, en retranchant de part et d'autre le triangle ACB, on a $ALB > AA_1L_1B_1BA$; donc, *à fortiori*, segment $ALB >$ segment $A_1L_1B_1$.

La seconde partie du théorème se démontre d'une manière analogue.

Remarques. I. Entre les segments à angles aigus et ceux à angles obtus se trouve placé le segment rectangulaire ou le demi-cercle qui est le maximum des segments à arcs égaux (**19**); les segments des deux genres diminuent à mesure qu'ils s'en éloignent, et puisqu'ils décroissent d'une manière continue, il faut que pour chaque segment d'une espèce il y en ait un de l'autre espèce qui lui soit équivalent; il y a donc toujours deux et seulement deux différents segments d'arc et d'aire donnés; il faut toutefois pour cela que l'aire donnée soit plus petite que celle du demi-cercle dont l'arc a la longueur donnée. Cela confirme encore ce que nous avons avancé ci-dessus (**18**, **4**).

II. Il y a des théorèmes analogues concernant d'autres figures construites sur deux bases inégales AB et A_1B_1, et dont le reste du périmètre L et L_1 est composé de droites données a, b, c,... communes aux deux figures, et d'autres parties arbitraires l, l_1, l_2,..., de même somme de part et d'autre, en sorte qu'on ait $L = L_1$; les démonstrations découlent du nº **31**.

34. *Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés des côtés d'un angle* A *donné, dont l'un* AB *est déterminé, tandis que l'autre* AC *est arbitraire, et d'une ligne quelconque* L *menée de* B *au côté* AC, *mais ne le dépassant pas, la partie de cercle convexe qui est comprise entre la sécante* AB *et la tangente* AC *est un maximum tant que le périmètre ne varie pas, c'est-à-dire tant que la somme* L + AC *reste la même (et réciproquement).*

Démonstration. Soit BLC (*fig.* 9) un arc de cercle qui touche AC au point C; soit en même temps L + AC la longueur voulue; ABLCA sera la partie de cercle en question. Nous avons donc à démontrer qu'il n'y a pas d'autre ligne L_1, menée du point B à un autre point E ou F du côté AC, sans dépasser ce côté, qui forme une figure de même périmètre et de même ou de plus grande aire.

Imaginons d'abord la ligne L_1 qui joint B et E; le segment BLC et la figure BL_1EC auront la même base BC et des périmètres égaux; on aura donc (**20**) BLC > BL_1EC, et par suite ABLCA > ABL_1EA.

Tirons la ligne L_1 de B en F; pour qu'elle renferme la plus grande aire possible, il faut qu'elle soit un arc de cercle (**20**, *remarque*) et qu'elle s'élève, du moins en partie, au-dessus de l'arc L; mais alors elle rencontre encore cet arc dans un point autre que B, et puisque, en outre, le prolongement de L, l'arc CD, la rencontre évidemment, on est conduit à deux cercles ayant trois points communs, ce qui est impossible. — Si cette manière de raisonner ne paraît pas absolument satisfaisante, on pourra recourir à la suivante, plus directe encore.

Quelle que soit la forme de la ligne L_1, tirée de B en F, il faut qu'elle rencontre l'arc CD, prolongement de L, dans un certain point G (car elle ne peut ni passer entre le cercle et le côté AC, ni dépasser ce côté); on a donc un triangle mixtiligne FGC, dans lequel $FG + CG > CF$

ou
$$CF - CG < FG; \qquad (\alpha)$$

et puisque les figures ABLCA et ABL_1FA sont isopérimètres, on a

$$BLC + CF = BL_1G + GF. \qquad (\beta)$$

Retranchant l'inégalité (α) de l'équation (β), il vient

$$BLC + CG > BL_1G, \qquad (\gamma)$$

ce qui démontre que le segment de cercle BLCG est plus grand que la figure BL_1G, construite sur la même base BG. Mais on a encore à ajouter le triangle CFG à la première partie; donc, *à fortiori,*

$$ABLCA > ABL_1FA.$$

Remarquons encore, relativement à l'étendue et aux limites de ce théorème, qu'il subsiste toujours, quelque grand que puisse être le périmètre par rapport au côté donné AB, sauf le cas où l'on établirait la condition *que la ligne* L *ne doit pas non plus dépasser le prolongement de ce côté* AB; car alors le théorème ne continue à avoir lieu que jusqu'à ce que le point D tombe en B, et que le côté AB soit tangent en B au cercle L. Au-delà de ces limites le théorème se changerait en un des suivants (37). Si, au contraire, le périmètre diminue ou si l'angle A s'accroît, le point C s'approche du sommet A jusqu'à ce qu'il l'atteigne enfin; alors la figure se change en un segment de cercle (appartenant à la corde AB), limite en quelque sorte des figures comprises dans notre théorème, car il correspond à $AC = 0$, et si l'on continue à diminuer le périmètre ou à augmenter l'angle A, la figure ne change plus, mais le côté AC n'est plus tangent au cercle, il le coupe en A.

35. *Si n'est pas la somme* L + AC *qui est donnée comme dans le théorème précédent, mais la différence* L — AC *ou* AC — L, *l'aire de la figure est un minimum (au lieu d'un maximum) quand celle-ci est une partie de cercle concave* (fig. 10) *entre la sécante* AB *et la tangente* AC.

Car joignons par la droite BA_1 le point B à un point A_1 suffisamment éloigné, pris sur le prolongement de AC; comme L — AC ou AC — L est donné et que AA_1 est connu, on connaîtra de même $A_1C + L$; or il est clair que ABLC devient un minimum quand l'aire A_1BLC est un maximum, ce qui a lieu quand la condition énoncée dans notre théorème est satisfaite.

36. *Si, sous les conditions des deux derniers théorèmes* (**34** *et* **35**), *la ligne* L *doit être composée de droites données* a, b, c,... *et de parties arbitraires* l, l_1, l_2,..., *la figure sera un maximum ou un minimum, selon qu'elle sera une partie convexe ou concave de cercle, comprise entre la sécante* AB, *la tangente* AC *et les cordes* a, b, c,...

La discussion des limites entre lesquelles ces deux théorèmes sont possibles, rentre dans les recherches mentionnées ci-dessus (**18**).

Nous ajouterons seulement que l'angle A, le côté AB et les droites a, b, c,... étant donnés, il y aura en général deux valeurs déterminées du périmètre, pour lesquelles la partie de cercle en question se transforme en polygone, parce que alors les arcs l, l_1, ... deviennent nuls : dans l'intervalle compris entre ces deux polygones le théorème est impossible.

37. *Entre toutes les figures isopérimètres dont le périmètre est composé de deux côtés* AB *et* AC, *de longueur arbitraire, formant entre eux un angle donné* A, *et d'une ligne quelconque* L, *qui les joint, sans les dépasser, celle-là est un maximum, qui est une partie convexe de cercle* ABLCA (*fig.* 11), *entre l'angle circonscrit* A (*en sorte que* L *est alors un arc de cercle tangent aux côtés* AB *et* AC). *Et si, au lieu du périmètre, c'est la différence entre la ligne* L_1 (*au lieu de* L) *et la somme des côtés* AB *et* AC *qui est donnée, la figure est un minimum, lorsqu'elle est une partie concave de cercle* ABL_1CA *entre l'angle circonscrit* A.

Démonstration. Si l'on joint un point quelconque D de la lig ne L avec le point A, au moyen d'une droite AD, les parties DB et DC doivent être des arcs de cercle, tangents aux côtés AB et AC, pour que la figure soit un maximum (**34**); et comme le point D est absolument arbitraire, il faut que toute la ligne L soit un arc de cercle, qui est tangent en même temps aux deux côtés.

Remarques. I. Si l'angle A devient $= \pi$ ou $> \pi$, la partie de cercle convexe se transforme en un cercle entier, et le théorème perd alors tout caractère propre; la partie concave devient nulle sous la même condition.

II. Si les côtés de l'angle A sont limités au moyen d'une droite EF ou GH, qui est donnée avec ses angles adjacents E, F ou G, H, ces théorèmes s'appliquent également aux figures EBLCF et EBL_1CF, ou GBL_1CH et GBLCH, dont la première est un maximum quand le périmètre est donné, tandis que la dernière est un minimum quand la différence $(EB + CF) - L_1$ ou $(BG + HC) - L$ est donnée. Ces théorèmes restent les mêmes, quand on a $A = 0$, et que par-là les côtés EG et FH sont parallèles.

38. *Quand la ligne* L *ou* L_1 (**37**) *doit être composée de droites données* a, b, c,..., *et d'arcs arbitraires* l, l_1,..., *la figure est pareillement un maximum ou un minimum, lorsqu'elle est une partie de cercle convexe ou concave entre les cordes* a, b, c,... *et l'angle circonscrit* A.

Les limites sont données par le cas où les lignes l, l_1, l_2,... deviennent nulles; alors la figure devient un polygone, dont les côtés AB et AC sont égaux.

39. I. *Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés des côtés* AB, AC *d'un angle donné* A, *arbitraires en longueur, plus d'une ligne* L *qui les joint sans les dépasser, et pour lesquelles la somme des lignes* L *et* AC *est donnée, la figure maxima est la partie de cercle convexe entre la tangente* AC *et la normale* AB (*qui passe par le centre*).

II. *Si la différence entre* L *et* AC *est donnée, la figure minima est une partie de cercle concave, entre la tangente* AC *et la normale* AB.

III. *Ces deux théorèmes ont également lieu quand la ligne* L *est composée de droites données* a, b, c,... *et de lignes arbitraires* l, l_1, l_2,...

Démonstration. On n'a qu'à répéter la même figure symétriquement au-delà de AB; ces théorèmes découlent alors immédiatement des précédents (**37** et **38**).

40. I. *Entre toutes les figures isopérimètres, dont les périmètres sont composés des côtés* AC *et* AF, BD *et* BE *de deux angles* A *et* B *donnés, lesquels côtés sont de longueur arbitraire, plus d'une ou de deux lignes à volonté* l *et* l_1, *qui joignent les extrémités de ces côtés, si l'on suppose que les figures ne sortent pas des deux espaces angulaires* A *et* B, *la partie de cercle convexe* AClDBEl_1F (*fig.* 12, *a*) *entre les angles circonscrits* A *et* B *est un maximum.* — *Ou bien, si c'est la différence entre la somme des côtés du plus petit angle* A *et le reste du périmètre, c'est-à-dire si c'est la différence* (AC + AF) —(BD + BE + l + l_1) *qui est donnée, la figure minimum est la partie de cercle concave* AClDBEl_1FA (*fig.* 12, *b*) *entre les angles circonscrits* A *et* B.

Démonstration. Complétons le cercle au moyen des arcs α et β; alors la partie convexe AClDBEl_1F = K (*fig.* 12, *a*) est composée du cercle $\alpha l \beta l_1 = K_1$ et des deux parties concaves Aα et Bβ entre les angles A et B. Imaginons une quelconque F des figures comprises dans le théorème, et retranchons-en les mêmes parties Aα et Bβ entre les angles A et B; il reste une figure F_1 dont le périmètre, comme il est facile de le voir, est *égal* au périmètre du cercle K_1 ou *plus petit*, de manière qu'on a toujours $K_1 > F_1$, et ensuite $K > F$.

Le raisonnement suivant peut également servir à cette démonstration. On montrera d'abord que le maximum ne peut pas être limité par les seuls côtés des angles A et B, qu'il ne peut donc pas être un quadrilatère, mais que les lignes l et l_1 sont nécessaires. On voit ensuite que ces lignes doivent être des arcs de cercle (**20**) tangents aux côtés (**34** ou **37**), et qu'ils appartiennent à un même cercle (**38**). Car si l'on joint deux points quelconques x et x_1 des arcs l et l_1 au moyen d'une droite $xx_1 = a$, celle-ci partage la figure en deux parties, dont chacune est un maximum, lorsqu'elle est une partie de cercle entre l'angle A ou B et la corde a (**38**).

II. La forme de la figure maximum n'est pas absolument déterminée, car les arcs l et l_1 peuvent changer de grandeur comme ils voudront, pourvu que leur somme reste constante et que le cercle ne varie pas. Si donc l'un des angles, par exemple A, reste fixe, l'autre B pourra tourner autour du cercle pour occuper toutes les positions depuis celle où son côté BE tombe sur le prolongement du côté AF jusqu'à celle où l'autre côté BD tombe sur le prolongement de AC. Une des positions intermédiaires est celle dans laquelle la droite AB, qui joint les sommets des deux angles, divise en deux parties égales et ces angles et la figure elle-même. Pour la limite donnée par la coïncidence de BE et du prolongement de AF (*fig.* 12, *c*), le théorème peut être énoncé de la manière suivante :

Entre les figures isopérimètres, dont le périmètre est composé de trois droites consécutives CA, AB, BD *de longueur arbitraire, formant entre elles deux angles donnés* A *et* B, *et d'une ligne arbitraire* L, *qui joint la première et la dernière des droites, sans les dépasser, la figure maximum est celle dans laquelle la ligne* L *est un arc du cercle, tangent aux trois droites.* — Il existe un théorème analogue pour la partie concave du cercle.

III. Ajoutons le corollaire suivant, qui concerne le cas dans lequel la diagonale AB passe par le centre du cercle, et partage la figure en deux moitiés symétriques.

Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés de trois droites consécutives CA, AB, BD, *formant entre elles les angles donnés* $\frac{1}{2}$ A *et* $\frac{1}{2}$ B, *et d'une ligne arbitraire* l, *qui joint les côtés extérieurs* AC *et* BD *sans les dépasser, la somme des lignes* l, AC *et* BD *restant constante, la figure maximum est celle dans laquelle* l *est un arc de cercle qui a son centre sur le côté placé au milieu* AB *et qui est tangent aux côtés extérieurs* AC *et* BD.

41. *Si les conditions restent les mêmes que dans le théorème précédent* (**40**), *sauf qu'au lieu des angles* A *et* B, *c'est leur somme* S *qui est donnée, la figure est un maximum maximorum, lorsque ces angles sont égaux.*

Démonstration. Supposons les angles inégaux, soit $A > B$, et la partie de cercle, comme ci-dessus (**40**, II), de la forme (*fig.* 12, *c*); tirons la droite A_1B_1, de manière qu'on ait angle $CA_1B_1 = DB_1A_1$ et triangle AA_1B_1 équivalent à triangle ABB_1; alors la figure A_1CLDB_1 est équivalente à ACLDB. Si les triangles étaient isopérimètres, c'est-à-dire si l'on avait

$$AA_1 + A_1B_1 = AB + BB_1,$$

le triangle AA_1B_1 serait plus grand que le triangle ABB_1, parce que l'angle x est plus grand que y (**3**, II); mais les triangles sont supposés être équivalents : donc

$$AA_1 + A_1B_1 < AB + BB_1,$$

et par suite, périmètre A_1CLDB_1 < périmètre ACLDB. Mais il est clair que la première figure étant équivalente à la seconde, quoique son périmètre soit plus petit, pourra avoir une aire plus grande que celle-ci à même périmètre, d'autant plus qu'elle aussi pourra être une partie de cercle.

C'est la facilité de son application aux figures sphériques qui nous a fait choisir cette démonstration; car il y en a de plus simples et de plus directes pour les figures planes seules. Par exemple, tirons la droite A_1B_1 de manière qu'on ait

$$\text{angle } A_1 = \text{angle } B_1 \text{ et } AA_1 + A_1B_1 = AB + BB_1;$$

alors, puisque $x > y$, le triangle AA_1B_1 est plus grand que ABB_1 (**3**, II), et à périmètre égal la figure A_1CLDB_1 plus grande que ACLDB, etc. — Enfin la figure dont nous nous occupions dans le n° **40**, III, peut servir à une autre démonstration du même théorème.

42. I. *Entre toutes les figures isopérimètres dont les périmètres sont composés :*

1°. *Des côtés de longueur arbitraire de* m *angles donnés* A, B, C,... *dont la somme est plus grande que* $(m - 2)\pi$;

2°. *De lignes quelconques*, l, l_1, l_2,..., *dont le nombre est arbitraire depuis* 1 *jusqu'à* m *et qui joignent des côtés de différents angles;*

Si l'on exige en outre qu'aucune de ces figures ne sorte des espaces angulaires, la figure maximum est une partie de cercle convexe entre les angles circonscrits A, B, C,...

Si A, *le plus petit des angles donnés, est assez petit pour que son angle supplémentaire soit plus grand que la somme des angles sup-*

plémentaires de tous les autres angles donnés, et si l'on connaît en même temps la différence entre la somme des côtés de l'angle A *et le reste du périmètre, la figure est un minimum, lorsqu'elle est une partie de cercle concave entre les angles circonscrits* A, B, C,...

Cette partie de cercle concave est de même forme que celle que nous avons considérée dans le n° **40**. Dans la suite, la seconde partie sera toujours sous-entendue.

II. *Si l'on donne seulement la somme des angles et non chaque angle à part, la figure est un maximum maximorum, lorsque ces angles sont égaux, et que la figure est également une partie de cercle entre eux.*

La démonstration de ces théorèmes est analogue à celle du n° **40**.

43. I. *L'aire d'un polygone de* m *côtés, dont les angles et le périmètre sont donnés* [*], *est un maximum lorsque ce polygone est circonscriptible à un cercle* [**].

II. *Si le périmètre seul est donné, le polygone de* m *côtés est un maximum, quand il est equiangle et circonscriptible à un cercle, c'est-à-dire quand il est régulier.*

Ces théorèmes découlent comme limites des précédents (**42**) quand on y fait diminuer la somme des angles donnés jusqu'à ce qu'elle devienne égale à $(m - 2)\pi$; les arcs l, $l_1, \ldots$, deviennent alors nuls, et la figure se change en un polygone de m côtés.

---

[*] Il suffit pour le polygone plan de m côtés, que $m - 1$ angles soient donnés, car le dernier angle est alors déterminé. Quant au polygone sphérique de m côtés, il faut remarquer que son aire serait fixée dès que ses m angles seraient donnés : il faut donc énoncer ainsi le théorème en ce qui le concerne : *Si les angles d'un polygone sphérique de* m *côtés sont donnés, son périmètre est un minimum lorsqu'il est circonscriptible à un cercle;* le théorème sur les figures planes devient plus analogue à celui-ci, quand on suppose donnés les angles et l'aire.

[**] Je crois que c'est *Lhuilier* qui, dans son ouvrage mentionné ci-dessus, a été le premier à énoncer ce théorème pour les figures planes. Il le démontre au moyen du calcul, d'une manière très ingénieuse, mais assez compliquée. On ne le retrouve plus dans les auteurs qui lui sont postérieurs; ils paraissent avoir reculé devant la démonstration.

On peut aussi démontrer directement ces théorèmes, conformément au n° **40**.

44. I. *Si le périmètre d'une figure doit être composé :*

1°. *Des côtés de longueur arbitraire de* m *angles donnés* A, B, C,... *dont la somme est plus grande que* $(m-1)\pi$;

2°. *D'une droite* g *de longueur arbitraire;*

3°. *De lignes quelconques* $l, l_1, l_2, \ldots$;

Si en outre la figure doit être renfermée dans les espaces angulaires donnés, et si, à l'exception de la droite g, *la longueur de tout le reste du périmètre est donnée, l'aire comprise est un maximum, quand la figure est une partie de cercle entre les angles circonscrits* A, B, C,..., *et le diamètre* g.

Si donc la base g aboutit par son extrémité à un des côtés des angles, il faut qu'elle soit perpendiculaire sur lui.

On obtient le corollaire suivant, en faisant diminuer les angles jusqu'à ce que leur somme soit égale à $(m-1)\pi$.

II. *Entre tous les polygones que l'on peut construire sur une base arbitraire* g *la somme* s *des deux angles adjacents à cette base étant supposée égale à* π *ou* 180°, *et les autres angles étant donnés ainsi que la somme des côtés (la base* g *non comprise), le polygone maximum est celui qui est composé de côtés tous tangents au cercle dont la base* g *est le diamètre. Les angles à la base sont donc droits.*

Si, au lieu des angles A, B, C,...., la somme de deux, de trois, etc., d'entre eux est donnée, qu'ils se suivent ou non dans le périmètre, l'aire est la plus grande possible quand ils sont égaux.

Ces théorèmes découlent du précédent (**42**), quand on répète la figure symétriquement de l'autre côté de la base g.

45. I. *Si l'on supprime la droite* g, *et si l'on suppose que la somme des* m *angles soit plus grande que* $(m-\frac{3}{2})\pi$, *que l'angle* A *soit plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *et que de ses côtés* AA_1, AA_2, *l'un* AA_1 *soit arbitraire, tandis que le reste du périmètre est donné; la figure est un maximum, lorsqu'elle est une partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C,..., *la tangente* AA_2 *et la normale* AA_1.

Quand la somme des angles devient $= (m-\frac{3}{2})\pi$, le théorème s'énonce ainsi :

II. *Si les angles d'un polygone sont donnés, si l'un des angles* A_1 *adjacents à sa base* AA_1 *est égal à* $\frac{1}{2}\pi$, *et l'autre* A *plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$; *si en outre la somme de tous les côtés, moins la base, est donnée; ce polygone est un maximum, lorsque ces côtés sont tangents à un cercle dont le centre est sur la base* AA_1.

III. *Si, au lieu des angles* A, B, C,..., *leur somme est donnée, la figure devient, dans les deux cas précédents* (I et II), *un maximum maximorum, lorsqu'on a*

$$B = C = D = \ldots = 2A,$$

les conditions indiquées plus haut étant d'ailleurs remplies; en outre, les côtés compris entre les angles B, C, D,..., *seront égaux, et chacun d'eux sera double du côté perpendiculaire sur la base en* A_1.

Ces théorèmes découlent du n° **42**, tout-à-fait comme ceux du n° **44**.

46. I. *Le périmètre d'une figure étant composé:*

1°. *Des côtés de* m *angles donnés* A, B, C, D,..., *dont la somme est plus petite que* $(m - 2)\pi$;

2°. *De lignes arbitraires* $l, l_1, l_2, \ldots$;

Si les angles A *et* B *sont aigus tous les deux, et si de leurs côtés* AA_1, AA_2 et BB_1, BB_2, *deux, par exemple* AA_1 *et* BB_1, *ne forment qu'une même droite* AB, *si, en outre, tout le périmètre, à l'exception de la base* AB, *est donné, l'aire de la figure est un maximum lorsqu'elle est une partie de cercle entre les angles circonscrits* C, D,..., *les tangentes* AA_2, BB_2, *et la normale* AB.

II. *Etant donnés les angles d'un polygone, avec cette condition que les angles* A *et* B, *adjacents à la base* AB, *soient aigus, ou tout au plus droits; si en outre la somme de tous les côtés, excepté la base, est donnée, le polygone est un maximum, lorsque tous ces côtés sont tangents à un cercle dont le centre est sur la base* AB. *De plus:*

III. *Les angles étant arbitraires, le polygone est un maximum, lorsque* $C = D = \ldots = 2A = 2B$; *alors tous les côtés, à l'exception de la base, sont égaux, ou*

IV. *Si l'angle* A, *qui n'est pas plus grand que* $\frac{1}{2}\pi$, *est seul donné de grandeur, le polygone est un maximum lorsque* $2B = C = D = \ldots$.

En même temps tous les côtés sont égaux, à l'exception de ceux qui forment l'angle A.

Il ne sera pas inutile d'énoncer séparément l'application de ce théorème (IV) au quadrilatère et au triangle :

1°. Entre tous les quadrilatères que l'on peut construire avec un angle donné $A < \frac{1}{2}\pi$ et avec trois côtés BC, CD, DA, dont la somme est donnée, le plus grand est celui dans lequel l'angle $C = D = 2B$, et le côté $BC = CD$; — et si $A = \frac{1}{2}\pi$, il faut en outre qu'on ait $2AD = BC = CD$.

2°. Entre tous les triangles ABC qui ont le même angle donné $A < \frac{1}{2}\pi$ adjacent à la base AB, et dont la somme des côtés $AC + BC$ est la même, celui-là est un maximum dans lequel l'angle au sommet C est le double de l'autre angle à la base B [*]; — et si $A = \frac{1}{2}\pi$, on a $C = 2B = \frac{1}{3}\pi$, et en outre $BC = 2CA$, ce qui est une propriété connue.

47. I. *Si le périmètre d'une figure est composé :*

1°. *Des côtés de* m *angles donnés* A, B, C,..., *dont la somme est plus grande que* $(m - 1)\pi$;

2°. *Des lignes arbitraires* $l, l_1, l_2, \ldots$;

Si la longueur des côtés AA_1 *et* AA_2 *qui forment l'angle* A *est arbitraire, tandis que la longueur du reste du périmètre est donnée, la figure maximum est la partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C,... *et l'angle au centre* A. — Les côtés AA_1 et AA_2 sont donc des rayons du cercle; si l'un d'eux aboutit par son extrémité, non à un arc (l), mais à un côté d'un angle, il est perpendiculaire sur lui.

II. *Si la somme de deux angles quelconques* A_1 *et* A_2 *d'un polygone, entre lesquels un seul angle* A *est compris, est égale à* π, *et si en même temps, et les autres angles* A, B, C,..., *et la somme de tous les côtés non adjacents à l'angle* A *sont donnés, ce polygone est un maximum lorsque les côtés arbitraires* AA_1 *et* AA_2 *sont des rayons d'un cercle auquel tous les autres côtés sont tangents; de manière que les angles* A_1, A_2 *sont égaux et droits.*

---

[*] Même dans ce cas, le plus simple de tous, il est impossible de construire géométriquement la figure maxima, car elle suppose l'exécution de la trisection de l'angle supplémentaire de A, qui est égal à 3B.

III. *Si l'angle* A *seul est donné, les autres conditions restant les mêmes, le polygone est un maximum lorsque les autres angles* B, C,..., X *sont égaux; en même temps les côtés compris entre ces angles deviennent égaux, de même que ceux qui sont adjacents au premier et au dernier angle* BA_1 *et* XA_2, *qui sont de longueur moitié des autres.* — Dans ce cas la figure s'approche d'un secteur de polygone régulier, ce qu'elle devient en effet quand l'angle A est commensurable à π.

Ces théorèmes sont indépendants de la grandeur de l'angle A; s'il devient successivement $= \pi$, 2π, les théorèmes se changent en ceux des n° **44** et **42**.

48. I. *Si, toutes choses restant les mêmes, l'un des côtés de l'angle* A, *par exemple* AA_2, *est donné, de manière que l'autre* AA_1 *seulement demeure arbitraire, la figure est un maximum lorsqu'elle est une partie de cercle convexe entre les angles circonscrits* B, C,..., *la sécante* AA_2 *et la normale* AA_1.

Pour une certaine longueur de la partie donnée du périmètre, la figure se change en un polygone, limite des figures du théorème.

II. *Si l'angle* A *est plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *et si, comme dans le cas précédent,* AA_2 *est donné de même que la longueur du reste du périmètre, y compris le côté* AA_1, *la partie de cercle entre les angles circonscrits* B, C,..., *la tangente* AA_1 *et la sécante* AA_2, *est un maximum.*

La limite est encore donnée par un polygone.

49. I. *Entre toutes les figures de périmètre donné et composé :*

1°. *De* n *droites données,* a, b, c,... ;

2°. *Des côtés non déterminés des* m *angles donnés* A, B, C,... *dont la somme est plus grande que* $(m - 2)\pi$;

3°. *De lignes arbitraires* l, l_1, l_2,..., *dont le nombre est arbitraire de* 1 *jusqu'à* $m + n$;

Si les figures ne dépassent aucun des espaces compris dans les m *angles, la partie convexe de cercle entre les* n *cordes* a, b, c,..., *et les* m *angles circonscrits* A, B, C,..., *est un maximum.*

II. *Si, au lieu d'un certain nombre de côtés ou d'angles, c'est leur somme qui est donnée, les autres conditions restant les mêmes, l'aire de la figure augmente quand on rend les éléments appartenant à la* *même somme égaux entre eux; il s'ensuit que pour un même périmètre, une même somme des* n *droites et une même somme des* m *angles, la figure qui a ses côtés et ses angles égaux est un maximum maximorum.*

A la limite de ces deux théorèmes, pour une certaine longueur du périmètre, la partie de cercle se change en un polygone qui est en partie inscrit et en partie circonscrit au cercle, et qui peut avoir chaque nombre de côtés depuis $n + m + 1$, qui est le plus petit nombre, jusqu'au plus grand $2n + m$ ou $n + 2m$ (selon qu'on a $m > n$ ou $n > m$); cela dépend de la manière dont on fait suivre les angles et les côtés dans le périmètre. Ces théorèmes renferment du reste plusieurs des précédents.

50. I. *Si les périmètres des figures contiennent, outre les parties énumérées ci-dessus* (**49**, I), *une droite* g *de longueur arbitraire, et si la somme des* m *angles donnés est plus grande que* $(m - 1)\pi$, *la figure maxima est une partie de cercle convexe entre les cordes* a, b, c,..., *les angles circonscrits* A, B, C,..., *et le diamètre* g. En faisant diminuer le périmètre jusqu'à une certaine longueur, on obtient la limite des parties de cercle qui est un polygone.

II. *Le périmètre restant toujours composé comme dans* (**49**, I), *si l'angle* A *est plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *si l'un de ses côtés* AA_1 *et* AA_2, *par exemple* AA_1, *n'est pas compris dans la longueur donnée du périmètre, et si la somme de tous les angles est plus grande que* $(m - \frac{3}{2})\pi$, *la figure maximum est une partie de cercle entre les cordes* a, b, c,..., *les angles circonscrits* $B_1, C, \ldots$, *la tangente* AA_2 *et la normale* AA_1.

Si le côté AA_2 était donné séparément, il faudrait qu'il fût une sécante de la partie de cercle.

III. *Si l'angle* A *est de grandeur quelconque, mais donnée, si ses deux côtés ne sont pas compris dans la partie de périmètre donnée, et si la somme des* m *angles est plus grande que* $(m - 1)\pi$, *il faut que dans le maximum* A *soit un angle au centre, et que ses côtés* AA_1 *et* AA_2 *soient des rayons de la partie de cercle.*

Ce dernier théorème en renferme plusieurs autres, que l'on obtient quand on fait successivement $A = \pi, 2\pi$, ou quand on supprime les n côtés $a, b, c, \ldots$, ou les m angles $A, B, C, \ldots$ Sa limite, que l'on obtient en diminuant jusqu'à un certain point la partie de périmètre donnée, est un polygone.

Remarque générale.

51. La plupart des théorèmes précédents s'appliquent aux polygones limites des parties de cercle; mais si l'on examine ces polygones indépendamment des recherches précédentes, si l'on donne à leurs éléments variables d'autres valeurs que celles qui appartiennent aux limites des parties de cercle, on voit que, même sous ce nouveau point de vue, ces polygones limites ne sont encore que des cas particuliers. Car quand on sort de ces valeurs limites en assujétissant la figure à rester toujours un polygone de même nombre de côtés (qui ne doit ni contenir des arcs l, l_1, ..., ni se changer en partie de cercle), le maximum est assujéti à des conditions absolument différentes, qui changent encore, selon que les valeurs données aux éléments sont plus *grandes* ou plus *petites* que les valeurs limites.

On parvient à ces propriétés du polygone, en discutant les cas de maximum et de minimum d'une manière plus générale et plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici; dans tous les cas où les éléments nécessaires pour la détermination complète du polygone ne sont pas tous donnés, on recherchera les conditions de maximum et minimum relatives aux autres éléments. Le nombre des divers cas est très grand même quand on ne s'occupe que des différentes combinaisons des côtés, des angles, de la somme de plusieurs côtés ou angles, et de l'aire. Il paraît du reste que ces recherches devront être fondées (à l'instar de la théorie sur l'égalité des polygones) sur les propriétés du quadrilatère, de manière qu'il importerait de discuter d'abord toutes les questions que le quadrilatère peut offrir; mais leur nombre s'élève jusqu'à 25 ou 30, et l'on ne pourra guère répondre, avec les moyens dont nous disposons maintenant, qu'à la moitié d'entre elles. Au surplus il est probable que les divers cas sont tellement enchaînés entre eux, qu'il suffira d'en démontrer quelques-uns; les autres découleront immédiatement de ceux-là.

Théorèmes qui concernent plusieurs figures en même temps, ou des figures qui sont déterminées par des limites fixes ou par des éléments donnés.

52. I. *Si nous appelons* S *la somme des deux figures* $a\alpha$ *et* $b\beta$, *construites sur des bases* a *et* b, *respectivement données, et avec des*

lignes arbitraires α et β dont la somme $\sigma = \alpha + \beta$ est également donnée, S *sera un maximum lorsque les figures sont des segments de cercles de rayons égaux, pourvu que le segment ayant pour corde la plus petite base* b *soit un segment à angle aigu.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un cercle ABC (*fig.* 13) dans lequel les bases données a et b, prises comme cordes, soutendent des arcs α et β, dont la somme soit égale à σ, mais plus petite que la circonférence du cercle; il est clair qu'alors la somme des deux segments $a\alpha + b\beta$ est un maximum sous les conditions données. Car, la figure $ab\gamma$ restant invariable, si l'on fait varier comme on voudra les arcs α et β, mais de manière que leur somme soit toujours égale à σ, l'aire des figures renfermées par ces arcs et par l'arc fixe γ sera toujours plus petite que celle du cercle ABC; donc la somme des aires des deux figures formées par ces arcs et par les bases données a et b sera plus petite que celle des aires des segments du cercle $a\alpha$ et $b\beta$. Le segment $b\beta$ ayant pour base la plus petite corde, est nécessairement à angle aigu, tandis que l'autre segment peut être indifféremment ou à angle aigu ou à angle obtus.

Il reste encore à démontrer que le cercle supposé existe dans tous les cas.

Le plus petit des cercles dans lesquels les bases données a et b puissent être des cordes, est celui qui a la plus grande corde a pour diamètre. Supposons pour un moment que le cercle ABC soit ce cercle M, alors trois cas sont possibles, savoir :

$$\alpha + \beta = \sigma, \tag{1}$$

$$\alpha + \beta > \sigma, \tag{2}$$

$$\alpha + \beta < \sigma. \tag{3}$$

Dans le premier cas le cercle M satisfait aux conditions du théorème.

Dans le second cas faisons croître le cercle M, en écartant en même temps l'une de l'autre les cordes a et b; les centres de tous les cercles ainsi obtenus resteront évidemment entre les cordes a et b dans l'espace $ab\gamma$, et puisque d'après cela les deux segments sont à angles aigus, chacun des arcs α et β, et conséquemment leur somme ira continuellement en diminuant; cette somme s'approchera ainsi de plus en plus de

σ, jusqu'à ce qu'elle lui devienne égale pour un certain cercle M_1 qui satisfait aux conditions du théorème.

Dans le troisième cas on fera également grandir le cercle, mais en rapprochant en même temps la corde a de la corde b; alors le centre est dans le segment $a\alpha$, dont l'angle devient obtus, tandis que celui du segment $b\beta$ reste aigu; l'arc α croît donc et l'arc β diminue. Mais l'accroissement de α surpasse évidemment le décroissement de β : la somme $\alpha + \beta$ va donc en grandissant, et puisque en outre α peut acquérir toute grandeur voulue, tandis que β ne peut jamais devenir plus petit que b, la somme $\alpha + \beta$ obtiendra toutes les valeurs possibles et deviendra aussi égale à σ pour un certain cercle M_1, qui sera le cercle cherché.

On peut donc toujours satisfaire aux conditions du théorème, pourvu que $\sigma > a + b$, mais on ne le peut que d'une manière seulement.

Dans tous les cas le segment $b\beta$ sur la plus petite corde est constamment à angle aigu, tandis que l'autre $a\alpha$ peut être à angle aigu, droit ou obtus.

II. Le théorème ci-dessus (I) ne se rapporte qu'au maximum absolu ou principal de la somme des deux figures, qui varient autant que les éléments donnés le permettent. Si l'on veut traiter cet objet d'une manière plus complète, on s'y prendra ainsi qu'il suit :

Que l'on répartisse comme on voudra la somme σ sur α et β, parties des périmètres des figures $a\alpha$ et $b\beta$, toujours est-il que chacune d'elles, de même que leur somme S, sera un maximum, lorsque ces figures sont des segments de cercle. Nous pouvons donc admettre que les figures $a\alpha$ et $b\beta$ sont des segments de cercle. Si l'on fait maintenant varier leurs arcs α et β d'une manière continue, sous la condition que toujours $\alpha + \beta$ soit égal à σ, la somme de leurs aires $a\alpha + b\beta = S$ changera aussi continuellement; et l'on peut se demander : *Sous quelles conditions, et combien de fois cette somme devient un maximum ou un minimum ?*

La discussion ultérieure de cette question donne le résultat suivant : *Si les cordes* a *et* b *de deux segments de cercle* aα *et* bβ, *et la somme de leurs arcs* $\sigma = \alpha + \beta$ *sont données, la somme de leurs aires* $S = a\alpha + b\beta$ *est en général un maximum ou un minimum quand les arcs appartiennent à des cercles de rayons égaux; si aucun des deux segments* *ne doit être plus grand que le cercle entier, la condition d'avoir des rayons égaux ne peut être remplie que de trois manières au plus; mais si les segments peuvent aussi être plus grands que le cercle, le nombre des cas satisfaisant à la condition augmentera, et d'autant plus que la somme* σ *sera plus grande relativement aux cordes* a *et* b.

Pour le cas particulier où ni α ni β ne doivent être plus grands que le cercle, l'existence des cercles dans lesquels un maximum ou un minimum a lieu, peut être démontrée de la manière suivante :

Si l'on regarde les droites a et b comme cordes d'un cercle quelconque, et si l'on désigne les petits arcs qu'elles soutendent par α et β, et les grands arcs par α_1 et β_1, on peut former avec ces quantités les quatre sommes différentes $\alpha + \beta$, $\alpha_1 + \beta$, $\alpha + \beta_1$, $\alpha_1 + \beta_1$, et l'on aura à rechercher combien il y a de cercles dans lesquels une de ces sommes est égale à σ.

Nous avons déjà démontré ci-dessus (I) que, en ce qui concerne les sommes $\alpha + \beta$ et $\alpha_1 + \beta$ dans lesquelles entre le plus petit arc β soutendu par la plus petite corde b, il y a toujours un et seulement un cercle M_1 qui satisfait à l'une ou l'autre. Il reste donc à examiner combien il y a de cercles correspondants à une des sommes $\alpha + \beta_1$ et $\alpha_1 + \beta_1$, c'est-à-dire au cas où le segment ayant la plus petite des bases pour cordes est à angle obtus.

Désignons par N le cercle dans lequel la somme du plus petit arc α soutendu par a, et du plus grand arc β_1 soutendu par la plus petite corde b devient un minimum $= \sigma_1$; trois relations sont alors possibles entre σ_1 et σ; on aura

	(1)	$\sigma_1 > \sigma$,
ou	(2)	$\sigma_1 = \sigma$,
ou	(3)	$\sigma_1 < \sigma$.

Pour le cas (1) il est clair qu'il n'y a pas de cercle qui satisfasse à la condition ci-dessus;

Pour le cas (2) le cercle N lui-même est le cercle cherché;

Pour le cas (3), enfin, il y a deux cercles qui remplissent la condition exigée; on s'en assure par le raisonnement suivant :

Il est clair que la somme des deux grands arcs $\alpha_1 + \beta_1$ est un minimum dans le cercle M, qui a la plus grande corde a pour diamètre.

Dans ce cas, à proprement parler, α_1 n'est plus un grand arc, car on a $\alpha_1 = \alpha$. Soit σ_2 cette somme minimum, il y a alors trois combinaisons possibles; on a

	(a)	$\sigma_1 < \sigma$,	et en même temps	$\sigma_2 < \sigma$,
ou	(b)	$\sigma_1 < \sigma$,		$\sigma_2 = \sigma$,
ou	(c)	$\sigma_1 < \sigma$,		$\sigma_2 > \sigma$.

Pour chacune de ces trois relations on peut, en partant des cercles N et M, parvenir à deux cercles qui remplissent la condition ci-dessus énoncée.

A. Dans l'hypothèse (a) faisons *premièrement* croître le cercle N, la somme des arcs $\alpha + \beta_1$ croîtra de même (parce que au commencement elle est un minimum égal à σ_1, et que β_1 croît plus vite que α ne diminue), et puisque β_1 peut devenir de grandeur quelconque, tandis que α ne peut diminuer que jusqu'à la limite a, il faut qu'on parvienne à un cercle N_1 qui satisfasse à cette condition, que $\alpha + \beta_1$ soit égal à σ. — *Secondement* faisons croître le cercle M, la somme $\alpha_1 + \beta_1$ croîtra avec lui, et nous parviendrons à un cercle M_2, dans lequel on aura $\alpha_1 + \beta_1 = \sigma$, lequel est donc le cercle en question.

B. Dans l'hypothèse (b), c'est *premièrement* le cercle M lui-même qui satisfait à la condition. — *Secondement* lorsque l'on fait croître le cercle N, $\alpha + \beta_1$ augmente en même temps jusqu'à ce que l'on parvienne enfin à un cercle N_1 dans lequel on aura $\alpha + \beta_1 = \sigma$.

C. Faisons dans l'hypothèse (c) croître *premièrement* le cercle N; on parviendra comme ci-dessus à un cercle N_1 qui rend $\alpha + \beta_1 = \sigma$; — *secondement* faisons diminuer le cercle N; par cela même $\alpha + \beta_1$ croîtra, et, avant d'atteindre le cercle minimum M, on parviendra à un cercle N_2 dans lequel $\alpha + \beta_1$ est égal à σ.

On démontrera géométriquement, au moyen du théorème (I), que les segments des différents cercles, qui remplissent la condition mentionnée ci-dessus, ont les propriétés suivantes :

(α) Dans tous les cercles désignés par N_1, la somme des segments $a\alpha + b\beta_1$ est un maximum relatif;

(β) La somme $a\alpha_1 + b\beta_1$ dans les cercles M_2 et M (dans le cas B), et la somme $a\alpha + b\beta_1$ dans le cercle N_2, sont des minima ;

(γ) Dans le cercle désigné par N, au cas spécial (2), la somme des segments $a\alpha + b\beta_1$ n'est ni un maximum ni un minimum, car ce cas peut être considéré comme limite des deux parties du cas (C), puisque les cercles N_1 et N_2 se confondent tous les deux avec le cercle N, et par conséquent neutralisent leurs propriétés opposées.

Il y a encore deux limites pour la somme des segments en question ; on parvient à ces limites en faisant continuellement diminuer l'un des arcs α et β (et ici ce ne sont plus les petits arcs, mais des arcs quelconques soutendus par les cordes a et b que nous désignons par α et β) ; en dernier lieu β coïncidera avec sa corde b, ou α avec la corde correspondante a ; la somme $a\alpha + b\beta$ diminue simultanément, elle est donc un minimum lorsque α ou β ont atteint leurs limites. Chacun de ces minima limites n'est composé que d'un seul segment $a\alpha'$ ou $b\beta'$, l'autre segment devenant nul ; les arcs de ces segments seront relativement $\alpha' = \sigma - b$ ou $\beta' = \sigma - a$; et puisque de ces deux segments celui qui a la plus petite corde est plus petit, on a $a\alpha' > b\beta'$.

III. Ces résultats subissent différentes modifications, selon les différentes longueurs relatives des cordes a et b. Considérons, par exemple, les deux cas spéciaux suivants :

1°. Soit $a = b$; alors les cercles N et M, N_1 et M_1 se confondent, le cercle N_2 devient impossible, et quant aux autres cercles, il faut avoir égard aux relations suivantes :

(α) Si l'on a $\sigma > \pi a$ ou $\sigma = \pi a$, c'est-à-dire si la somme donnée σ n'est pas plus petite que le cercle M, qui a a pour diamètre, les arcs α_1 et $\beta\,(=\alpha)$ forment pour le maximum principal (I) une circonférence entière de cercle M_1, c'est-à-dire que les segments $a\alpha_1$ et $b\beta$ composent l'aire du cercle M_1. Dans le cercle M_2, dans lequel la somme $a\alpha_1 + b\beta_1$ est un minimum (II, β), les deux segments sont égaux et tous les deux à angle obtus ; leur somme est donc plus grande que l'aire du cercle M_2.

(β) Si l'on a $\sigma < \pi a$, le maximum principal est le seul possible ; il a lieu quand les deux segments sont égaux et à angle aigu.

Dans les deux cas les maxima limites (II) ne changent pas.

2°. Si l'on a $b = 0$, β et $b\beta$ deviennent également nuls, tandis que β_1 est la circonférence du cercle entier, et $b\beta_1$ est l'aire de ce cercle.

Dans ce cas le maximum principal n'est donc qu'un seul segment $a\alpha$ ou $a\alpha_1$, et le cercle N dans lequel la somme $\alpha + \beta_1$ $(= \alpha + \alpha_1)$ devient un minimum $= \sigma_1$ (II) est doué de la propriété particulière : *que la somme des tangentes* AD *et* BD, *menées aux extrémités de la corde* a *et se coupant en* D, *est égale à* $\alpha + \beta_1$, *c'est-à-dire qu'elle est égale à la somme du petit arc* α *et de la circonférence du cercle entier* β_1. Le minimum σ_2 de la somme $\alpha_1 + \beta_1$ qui a lieu pour le cercle M dont a est le diamètre, est alors égal à $\frac{3}{2}\pi a$.

(α) Si $\sigma_1 < \sigma$, et en même temps $\sigma_2 > \sigma$(II, C), les deux cercles N_1 et N_2 ont lieu, et comme nous avons vu que $a\alpha + b\beta_1$ (c'est-à-dire la somme du segment $a\alpha$ et du cercle entier N_1) est un maximum dans le premier, $a\alpha_1 + b\beta_1$ est un minimum dans le second, et l'on a $N_1 > N$ et $N_2 < N$ (II, C).

(β) Quand on a $\sigma_2 < \sigma$, M_2 au lieu de N_2 est le cercle dans lequel $a\alpha_1 + b\beta_1$ devient un minimum.

On peut énoncer ainsi les deux théorèmes (α) et (β) :

Si l'on mène une corde AB = a *dans un cercle quelconque* β_1, *et si l'on tire par ces extrémités les tangentes* AD *et* BD, *la somme des aires du cercle entier et du segment à angle aigu est un maximum ou un minimum, selon que la somme de ces tangentes est plus petite ou plus grande que la somme de la circonférence entière et du petit arc, c'est-à-dire selon qu'on a*

$$\mathrm{AD} + \mathrm{BD} \lesseqgtr \beta_1 + \alpha;$$

il est bien entendu qu'ici l'arc α *et le cercle* β_1 *peuvent changer et avoir des rayons différents quelconques, pourvu que la corde* a *reste constante et que la somme* $\alpha + \beta_1$ *soit toujours égale à* σ.

La somme $a\alpha_1 + b\beta_1$ est de même un minimum dans tous les cas.

IV. Les corollaires suivants découlent des théorèmes précédents :

1°. Un segment à angle aigu $b\beta$ est plus grand que le secteur $C\gamma$ dans le même cercle C si l'arc du secteur est égal au double de la différence entre l'arc et la corde du segment, c'est-à-dire si $\gamma = 2(\beta - b)$. — Ce théorème est du reste pareillement applicable aux segments qui surpassent le demi-cercle jusqu'à un certain segment à angle obtus qui est précisément égal au secteur, et au-delà duquel le secteur devient plus grand que le segment. — De même la différence entre les aires du cercle et du polygone convexe inscrit est plus grande qu'un secteur dont l'arc est égal à deux fois la différence entre les périmètres de ces figures, si toutefois le centre C du cercle n'est pas en dehors du polygone. De même la différence de deux segments à angles aigus $b\alpha - b\beta$, ayant la même corde b, est plus grande qu'un secteur $C\gamma$ du plus petit des deux cercles, si l'on a $\gamma = 2(\alpha - \beta)$.

2°. Si trois segments de cercles $a\alpha$, $a\beta$ et $a\gamma$, sont placés du même côté de leur corde commune a, et que leurs arcs soient liés par l'équation $2\beta = \alpha + \gamma$, les aires des lunules $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ sont liées par les relations suivantes :

(1). Si $\beta < \pi$, on a $\alpha\beta > \beta\gamma$;
(2). Si $\beta > \pi$, on a $\alpha\beta < \beta\gamma$.

53. *Les conditions restant les mêmes que dans le théorème* (52, I), *sauf que la somme* $s = a + b$ *est donnée au lieu des bases* a *et* b, *la somme* S *des deux segments* $a\alpha$ *et* $b\beta$ *est d'autant plus petite que la différence entre* a *et* b *est plus petite, de manière que la somme* S *est un minimum maximorum, lorsqu'on a* $a = b = \frac{1}{2}s$, *et que cette somme devient la plus grande possible ou un maximum limite, lorsque, par exemple, on a* $a = s$ et $b = 0$; *alors c'est le segment* $a\alpha$ *qui est ce maximum, tandis que* $b\beta$ *est nul.*

Démonstration. Prenons a et b de grandeurs quelconques, mais différentes; soit pour fixer les idées $a > b$ (*fig.* 14), et admettons que les segments $a\alpha$ et $b\beta$, dont la somme représente dans ce cas le maximum principal, appartiennent à un même cercle, et que leurs cordes AC et BC, c'est-à-dire a et b, aient une extrémité C commune. Soit en outre $a_1 + b_1 = a + b = s$, et de plus $a_1 - b_1 < a - b$; on aura d'abord le triangle $AC_1B > ACB$ (3). Imaginons les segments de cercle $a_1\alpha_1$ et $b_1\beta_1$, construits sur les bases a_1 et b_1, dont la somme est le maximum dans ce cas; les trois arcs α_1, β_1 et γ forment une figure plus petite que le cercle isopérimètre $\alpha\beta\gamma$, et puisque cette figure est composée des segments $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c\gamma$ et du triangle AC_1B, il faut que $a_1\alpha_1 + b_1\beta_1$ soit plus petit que $a\alpha + b\beta$.

54. *Étant données les droites* a, b, c, d,..., *bases d'un nombre quelconque de figures* aα, bβ, cγ, dδ,..., *et la somme* $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta,\ldots$, *des lignes* α, β, γ, δ,..., *qui complètent leurs périmètres, la somme de leurs aires ne peut être un maximum que quand ces figures sont toutes des segments de cercles égaux; il faut en outre, pour le maximum principal, que le segment ayant la plus grande base puisse seul être à angle obtus.*

Ce théorème découle du précédent (**52**, I).

On peut se demander s'il n'y a pas plusieurs cas dans lesquels les figures satisfassent aux conditions du théorème, qui consistent en ce que ces figures soient des segments de même cercle, et qu'aucune d'elles ou que celle seulement qui a la plus grande corde soit à angle obtus; et si dans chacun de ces cas la somme des aires est un *maximum ?*

Soit a la plus grande des bases, et M le plus petit cercle que nous puissions considérer, c'est-à-dire soit M le cercle qui a cette base a pour diamètre : inscrivons dans ce cercle les autres bases b, c, d,..., comme cordes; appelons β, γ, δ,... les plus petits arcs qui leur correspondent, et α, α_1 les arcs correspondants à a (α_1 deviendra le plus grand arc, quand nous ferons croître dans la suite le cercle); trois relations sont alors possibles : on a

$$(1) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots < \sigma,$$

ou

$$(2) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sigma,$$

ou

$$(3) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots > \sigma.$$

I. Dans la première hypothèse faisons croître le cercle M et prenons α_1 au lieu de α; on parviendra toujours à un cercle M_1 dans lequel on aura

$$\alpha_1 + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sigma;$$

car, supposé même que la somme $\beta + \gamma + \delta + \ldots$ décroisse au commencement plus que l'arc α_1 ne croît, l'inverse devra pourtant arriver plus tard, puisque α_1 peut grandir jusqu'à l'infini, tandis que $\beta + \gamma + \delta + \ldots$, ne peut diminuer jusqu'à la limite $b + c + d + \ldots$. La somme pourra donc toujours atteindre la grandeur donnée σ; mais il est clair qu'il n'y a qu'une seule manière de remplir la condition.

II. Dans le second cas (2) le cercle M lui-même satisfait, et si α_1 augmente au commencement moins rapidement que la somme $\beta+\gamma+\delta+\ldots$, ne diminue, l'on parvient en outre, comme ci-dessus (I), à un cercle M_1 dans lequel on a

$$\alpha_1+\beta+\gamma+\delta+\ldots=\sigma.$$

III. Dans le troisième cas on obtient d'abord, en faisant croître le cercle M, un cercle M_3, dans lequel on a

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=\sigma,$$

car tous ces arcs, α, β, γ,..., diminuent. Si en outre α_1 augmente au commencement moins rapidement que la somme $\beta+\gamma+\delta+\ldots$, ne diminue, de manière que la somme $\alpha_1+\beta+\gamma+\ldots$, soit d'abord décroissante, il faut qu'il y ait un certain cercle M_m, dans lequel cette somme devient un minimum $=\sigma_1$, et au-delà duquel elle commence à croître indéfiniment, puisque l'arc α_1 n'a pas de limite. Donc, si σ_1 est plus petit que σ, il doit y avoir entre M et M_m un cercle M_2, dans lequel $\alpha_1+\beta+\gamma+\ldots$, est égal à σ, et, le cercle augmentant continuellement, on trouvera encore, après avoir dépassé M_m, un cercle M_1 dans lequel on aura $\alpha_1+\beta+\gamma+\ldots=\sigma$.

Les différents cercles que nous venons de signaler offrent les propriétés suivantes :

(*a*) Dans tous les cercles désignés par M_1, la somme des segments $a\alpha_1$, $b\beta$, $c\gamma$,..., est un maximum; de même la somme $a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots$ est un maximum dans le cercle M_3.

(*b*) Dans le cercle M_2 la somme $a\alpha_1+b\beta+c\gamma+\ldots$ est un minimum.

Si dans le cas III, σ_1 est égal à σ, les cercles M_2 et M_1 se confondent avec le cercle M_m, qui ne peut en conséquence offrir ni un minimum, ni un maximum.

Il reste à examiner lequel des deux maxima (III), qui ont lieu en même temps dans les cercles M_1 et M_3, est le plus grand ou le maximum principal.

Remarque. Le théorème précédent peut servir entre autres à résoudre le problème suivant :

Entourer un polygone convexe donné avec un fil flexible de longueur aussi donnée σ, de manière qu'il passe par tous les sommets des angles de ce polygone et qu'il comprenne un espace maximum.

A l'égard des figures sphériques, on peut énoncer le problème de la manière suivante :

Un certain nombre de points fixes étant donnés sur la limite d'un pays, et le périmètre étant aussi donné, déterminer les frontières de manière que l'aire comprise soit un maximum.

55. *Si l'on suppose que les figures du théorème précédent soient des segments de cercle et qu'ils puissent être indistinctement plus grands ou plus petits que le cercle entier, leur somme, les autres conditions restant les mêmes, est un maximum ou un minimum, aussi souvent que leurs arcs ont le même rayon.*

On verra aisément que le nombre de cas dans lesquels ces conditions peuvent être satisfaites est très grand, et même encore, quand on exclut les segments plus grands que le cercle, et que l'on peut seulement prendre le plus grand ou le plus petit segment correspondant à chaque corde. Pour reconnaître si certains cercles sont possibles ou non, on se servira de cercles auxiliaires, pareils au cercle M_m, employé dans le n° **54**, III ; ces cercles, qui doivent avoir la propriété que la somme des arcs soutendus par les cordes données a, b, c,..., soit un minimum, seront l'objet d'un problème préliminaire ; toutefois, pour chacune des cordes, on dira d'avance si l'on aura à prendre le plus grand ou le plus petit arc. Il faudra rechercher leur propriété caractéristique, qui est la suivante pour un cas très particulier.

Soient les cordes données égales $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c} = \ldots$, *en nombre impair* $2\mathrm{n}+1$; *si on les inscrit à un cercle variable* M_m, *et que l'on ajoute les plus grands arcs* α_1 *de* n *cordes aux petits arcs* α *des autres* $\mathrm{n}+1$ *cordes, la somme totale* $\mathrm{n}\alpha_1 + (\mathrm{n}+1)\alpha$ *est un minimum, quand elle est égale à la somme* $\mathrm{AD}+\mathrm{BD}$, *des tangentes* AD, BD *menées aux extrémités de l'une des cordes* a.

Un théorème analogue à celui du n° **52**, III, 2°, découle de cette propriété.

56. Les théorèmes **52** et **54** se prêtent à un grand nombre d'applications, que nous allons indiquer, les unes en peu de mots et les autres avec détail.

Nous remarquerons d'abord que, pour les parties de cercle les plus compliquées, on peut établir des théorèmes analogues à celui du n° **52**, qui ne se rapporte qu'à la partie de cercle la plus simple.

Nous allons énoncer ces théorèmes sommairement, sans les discuter un à un.

I. *La somme des aires de deux figures* F *et* F_1, *dont le périmètre de chacune est composé d'un certain nombre de lignes en partie données, et en parties arbitraires, comme dans les théorèmes depuis n°* **21** *jusqu'à n°* **50**, *et dont la somme des périmètres est donnée, ne peut être un maximum que lorsque ces figures sont des parties de cercle à rayons égaux; ou si ces figures sont supposées être des parties de cercle, la somme de leurs aires est en général un maximum ou un minimum toutes les fois qu'elles appartiennent à des rayons égaux.*

Il est facile de vérifier cette assertion au moyen du théorème **52**, I. Pour que la somme $F + F_1$ devienne un maximum, ces figures doivent être d'abord des parties de cercle; elles contiendront donc des arcs L et L_1; puis si dans l'étendue de ces arcs on retranche de ces figures deux segments à angles aigus $a\alpha$ et $b\beta$, et que l'on suppose pour un moment que les cordes a et b et la somme des arcs $\alpha + \beta$ soient données, la somme des segments $a\alpha + b\beta$ doit être un maximum; donc les arcs α et β, et conséquemment aussi les arcs L et L_1, ont des rayons égaux.

II. *Si l'on exige que les figures* F *et* F_1, *dont la somme des périmètres est donnée, soient des parties de cercle seulement entre des angles circonscrits donnés (que par conséquent leurs périmètres ne contiennent pas de cordes données), la somme de leurs aires est un minimum, lorsqu'elles ont des rayons égaux.* Les deux maxima limites ont lieu quand l'une ou l'autre des figures devient nulle. On pourrait chercher lequel est le plus grand. Quand F et F_1 sont des parties de cercle dans un seul angle circonscrit, F dans A et F_1 dans B, ces limites sont isopérimètres, et alors F_1 est plus petit que F si l'on a $A > B$.

Ce même théorème (II) peut encore être considéré, quant aux figures planes, comme un cas particulier du suivant:

III. *La somme des aires de deux figures* F *et* F_1 *qui sont données de forme, c'est-à-dire qui doivent être semblables à deux autres figures données* f *et* f_1, *et dont la somme des périmètres* $U + U_1$ *est donnée, est un minimum quand ces aires sont proportionnelles aux périmètres, c'est-à-dire quand* $F : F_1 = U : U_1$.

Le théorème du n° **54** sert à étendre ces propositions (I et II) à un nombre quelconque de parties de cercle arbitraires.

On déduira encore immédiatement des théorèmes **52** et **54** la série suivante de propositions, concernant des figures qui dépendent d'éléments fixes ou qui sont renfermées entre des limites fixes.

57. I. *Si le périmètre donné* U *d'une figure doit passer par les extrémités d'une droite donnée* AB = a (*fig.* 15), *et si ce périmètre est plus petit que la circonférence du cercle, dont* a *est le diamètre, en sorte que* U *soit plus petit que* πa, *l'aire de la figure est un maximum lorsqu'elle est composée de deux segments de cercle égaux* aα *et* bβ, *construits sur la corde* AB.

Si l'on a $U = \pi a$, ou $U > \pi a$, la condition que le périmètre passe par A et B, ne détermine plus la forme de la figure, qui est alors un cercle.

II. *Si le périmètre* U *est de longueur constante, tandis que la droite* a *augmente ou diminue, l'aire diminue ou augmente en même temps* (**33**). Si a a diminué jusqu'à ce qu'on ait $U = \pi a$, l'aire ne change plus, car la figure reste alors constamment un cercle.

58. I. Entre toutes les figures dont les périmètres sont composés d'une droite G de longueur arbitraire et d'une ligne L de forme arbitraire, mais de longueur donnée, et qui doit passer par un point A placé de manière que la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite G soit égale à une longueur donnée p, si L est plus petit que $p\pi$; entre toutes ces figures, dis-je, la figure maximum est celle dans laquelle la ligne L est composée de deux arcs de cercle égaux α et β qui ont leurs centres sur G (**57**, I). — Si l'on a au contraire $L = p\pi$, ou $L > p\pi$, la figure est toujours un demi-cercle dont L est la demi-circonférence et G le diamètre.

II. L'aire d'une figure dont le périmètre se compose d'une droite donnée et fixe AB, d'une autre droite fixe G, mais de longueur arbitraire et de deux lignes quelconques α et β, dont la somme σ est donnée, et qui joignent les deux extrémités de la droite AB à des points quelconques de la droite G, cette aire ne peut être un maximum que lorsque la droite G est normale aux arcs α et β qui sont des arcs de cercle à rayons égaux.

Si un angle fixe GH est donné au lieu de la droite G, et si la droite fixe AB est comprise dans l'espace de cet angle, α et β doivent être respectivement normales à ses côtés G et H, et avoir des rayons égaux.

III. Si l'on exige que le périmètre d'une figure soit composé d'une droite fixe G de longueur arbitraire et d'une ligne L donnée de longueur seulement, et que cette ligne L passe par un certain nombre de points donnés A, B, C,..., qui sont tous placés du même côté de la droite G, cette figure ne peut être un maximum que lorsque toutes les parties de la ligne L, soit qu'elles joignent deux points fixes consécutifs, soit qu'elles joignent le premier et le dernier point fixe aux extrémités de la droite G, sont des arcs de cercle à rayons égaux (**54**), et lorsque ces dernières deux parties tombent normalement sur la droite G (I).

Il existe un théorème analogue pour le cas où un angle GH est donné au lieu de la droite fixe G, etc.

59. *Si le périmètre* L *de longueur donnée* (fig. 16) *doit passer par un point* A *et se terminer à une ligne* G, *donnée de position, et si l'on a* $L < \pi a$, *où nous désignons par* a *la perpendiculaire* AB *abaissée de* A *sur* G, *l'aire de la figure renfermée est un maximum, lorsque* L *est composé de deux arcs de cercle à rayons égaux* α *et* β, *qui ont la droite* AB *pour corde commune et qui par conséquent coupent sous des angles égaux la droite* G. — *Si l'on a* $L = \pi a$ ou $L > \pi a$, *la figure en question est toujours un cercle* ACD, *tangent à la droite* G.

60. *Soient données de position deux droites parallèles* G *et* H (fig. 17), *dont la distance perpendiculaire est égale à* a; *soit en outre donnée la longueur* L *du périmètre d'une figure, lequel doit être tracé de manière à atteindre aux deux droites sans les dépasser, et peut avoir de commun avec chacune d'elles ou un seul point ou une partie quelconque de sa longueur; l'aire de la figure renfermée est, selon les différentes longueurs du périmètre donné, un maximum quand elle a les formes suivantes:*

1°. *Si l'on a* $L = \pi a$: *le cercle* $\gamma\gamma$, *tangent à* G *et* H, *dont* a *est le diamètre, est un maximum;*

2°. *Si l'on a* $L < \pi a$: *le périmètre de la figure maximum est composé de deux arcs de cercle égaux* α *et* β, *qui ont la perpendiculaire* $AB = a$ *pour corde commune, et qui coupent les droites* G *et* H *sous des angles égaux ;*

3°. *Si l'on a* $L > \pi a$: *le maximum est limité par deux demi-cercles* α_1 *et* β_1, *tangents à* G *et* H, *c'est-à-dire appartenant au diamètre* a, *et par les deux droites* CD *et* EF, *parties égales de* G *et* H.

61. *Si le périmètre d'une figure est composé d'une droite* AB *d'une longueur donnée* 2b *et de position fixe* (fig. 18), *et d'une ligne quelconque* L, *donnée de longueur seulement; si l'on exige en outre que la ligne* L *ne dépasse jamais une droite* G, *parallèle à la droite* AB *à la distance* a, *mais que toujours elle y atteigne en un point ou qu'elle ait une certaine partie commune avec cette droite; la figure ainsi formée, pour être un maximum, devra prendre des formes différentes selon les différentes longueurs de la ligne* L, *savoir :*

1°. *Pour la plus petite valeur de* L, *que nous désignons par* 2c, L *se compose de deux droites égales* AC *et* BC, *et la figure est un triangle isoscèle* ACB, *limite des figures en question;*

2°. *Pour une certaine longueur* γ, L *se change en un arc de cercle* ACB, *auquel la droite* G *est tangente en* C; *la figure est un segment de cercle* $A\gamma C\gamma B$;

3°. *Pour une certaine longueur* $2b + \pi a$, L *se compose de deux demi-cercles égaux* δ *et* ε *et de la partie* DE, *qui lui est commune avec la droite* G; *ces demi-cercles sont tangents à la ligne* G *en* D *et en* E, *et leurs diamètres, qui sont de longueur* a, *sont perpendiculaires aux deux droites données; la figure maximum est donc composée dans ce cas d'un rectangle* ADEB *et des deux demi-cercles* $A\delta D$ *et* $B\varepsilon E$.

Dans les longueurs intermédiaires et au-delà de la plus grande, la figure se transforme de la manière suivante:

4°. *Si l'on a* $\gamma > L > 2c$, *la ligne arbitraire* L *est composée de deux arcs de cercle égaux* α *et* β, *qui coupent la droite* G *dans le même point connu* C *et sous des angles égaux ;*

5°. *Si l'on a* $\gamma < L < 2b + \pi a$, *elle se compose de deux arcs de cercle égaux* α_1 *et* β_1 *tangents à la droite* G *en* A_1 *et* B_1 *et d'une droite* A_1B_1, *dont le milieu est sur le point fixe* C;

6°. *Si* $L > 2b + \pi a$, *la ligne* L *est composée de deux arcs de cercle* α_2 *et* β_2 *de même rayon et de la droite* $A_2 B_2$, *qui est de longueur constante* $2b$, *mais variable de position; les deux arcs sont tangents à la droite* G *en* A_2 *et* B_2 *et forment ensemble un cercle entier; le plus grand des arcs peut indifféremment être placé en* A *ou en* B.

Dans tous ces cas il est bien facile de déterminer les aires au moyen des valeurs données de a, b et L; dans le dernier cas, par exemple, l'aire de la figure est égale à

$$2ab + \frac{(L - 2b)^2}{4\pi}.$$

II. *Si la droite* G *a une position fixe quelconque* (*on suppose qu'elle ne passe pas entre les extrémités de la droite* AB), *si par exemple elle est plus éloignée de* B *que de* A (fig. 19), *la ligne* L *prend les différentes formes suivantes pour que la figure renfermée soit un maximum dans chaque cas.*

Pour sa limite minimum la ligne L *est composée de deux droites* AC *et* BC *qui coupent la droite* G *dans le même point* C *et sous des angles égaux et dont la somme est moindre que la somme des deux droites qui joignent tout autre point de la droite* G *avec les points* A *et* B; *quand on a* $L > AC + BC$, *elle est formée par deux arcs de cercle* α *et* β *de même rayon* r, *qui coupent la droite* G *dans le même point* D (*placé entre* C *et* E) *et sous le même angle* φ; *si* L *continue de croître, le point* D *se meut de* C *vers* E, *tandis que le rayon* r *et l'angle* φ *diminuent; quand la ligne* L *a atteint une certaine longueur* ε, *elle n'est plus qu'un seul arc de cercle* AεEεB, *tangent en* E *à la droite* G *et l'angle* φ *est nul;* φ *reste nul pendant l'accroissement ultérieur de* L, *et dès-lors la ligne* L *est composée de deux arcs de cercle* α_1 *et* β_1 *de même rayon* r, *qui sont tangents à la droite* G *en* A_1 *et* B_1, *et de la droite* $A_1 B_1$; *ces deux points* A_1 *et* B_1 *s'éloignent d'abord du point* E, *en s'approchant respectivement des points* C *et* F, *tandis que le rayon* r *décroît; chacun des arcs* α_1 *et* β_1 *est plus petit que la demi-circonférence; enfin on arrive au point où l'arc* β_1 *devient une demi-circonférence, décrite sur le diamètre* BF, *qui est la perpendiculaire abaissée du point* B *sur la droite* G; *là le rayon* r *est un mini-*

mum, le point B_1 *tombe en* F *et le point* A_1 *atteint sa distance maximum au point* E *dans la direction* EC; *si* L *continue de croître, l'arc* β_1 *devient de plus en plus grand et* α_1 *de plus en plus petit par rapport à la demi circonférence correspondante, le point* A_1 *marche dès lors dans le même sens que* B_1, *et le rayon* r *et la partie droite* $A_1 B_1$ *croissent indéfiniment.*

62. *Si l'on doit construire une figure* F *de périmètre donné sous la condition qu'elle ait avec chacun des côtés d'un polygone donné* P, *ou un point commun ou une partie commune; pour que l'aire de la figure inscrite soit un maximum, il faut que toutes les parties de son périmètre, qui joignent deux côtés consécutifs du polygone* P, *soient des arcs de cercle égaux, et que les deux arcs qui coupent un même côté du polygone* P *forment avec lui des angles égaux qui seront nuls, quand le côté respectif a une certaine partie commune avec le périmètre de la figure* F, *ou quand les deux arcs ont le même centre* (**61**, II).

La considération des limites de la figure F nous conduit à quelques résultats intéressants que nous allons discuter.

63. I. Quand on fait varier le périmètre de la figure F inscrite, tandis que le polygone P reste le même, il est difficile de déterminer d'une manière générale les limites de ce périmètre et la forme correspondante de la figure F, principalement si l'on admet que P puisse être un polygone quelconque. La difficulté reste la même quand on ne désigne par P que des polygones convexes, et quand on suppose en même temps que la figure F soit comprise dans leurs espaces intérieurs; car il y a des cas où cette condition est contraire à la nature du problème. On sait bien que le périmètre de la figure F aura alors une limite supérieure, qui est le périmètre du polygone P lui-même; mais la forme de sa limite inférieure, du minimum du périmètre de F, dépend des propriétés du polygone P. Il y a pourtant certains cas dans lesquels la figure se transforme à cette limite en un polygone rectiligne F_1 inscrit au polygone P, et du même nombre de côtés. Les côtés du polygone F_1 peuvent considérés comme des arcs de cercle d'un rayon infini, et chacun des côtés du polygone P doit former des angles égaux avec les deux côtés du polygone F_1 qui le coupent. C'est en conséquence de cette propriété que *le périmètre du polygone* F_1 *est un minimum entre ceux de tous les polygones inscrits au polygone donné* P (ou, comme on le verra dans la suite, qu'il est du moins un des polygones à périmètre minimum). Il reste à voir si réciproquement un polygone inscrit F_1, qui remplit la condition que ses angles extérieurs soient divisés en deux parties égales par les côtés du polygone P, peut toujours être considéré comme limite de la figure F. Pour cela, il faut savoir s'il est toujours possible d'inscrire à chaque polygone P donné un autre polygone F_1 qui ait cette propriété; ou bien si le polygone P doit répondre à certaines conditions pour que cela soit possible; et enfin, quand F_1 est inscriptible, s'il présente vraiment la limite de la figure F.

On se convaincra facilement que, dans certains cas, le polygone F_1 doué des propriétés exigées, existe; car on n'a qu'à le supposer donné, et l'on aura de suite le polygone correspondant P, puisque les droites qui partagent les angles extérieurs du polygone F_1 en deux parties égales sont les côtés du polygone P.

On répond à toutes ces questions au moyen des considérations suivantes.

II. Supposons que le polygone F_1 soit inscrit au polygone P comme on l'exige; désignons les angles consécutifs de celui-ci par $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$, et les angles du polygone F_1 par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, en nommant a_1 l'angle dont le sommet est sur le côté A_1A_2, a_2 celui qui est sur le côté A_2A_3, etc. On aura alors

$$(\mathrm{A})\ \begin{cases} 2A_1 = a_m + a_1, \\ 2A_2 = a_1 + a_2, \\ 2A_3 = a_2 + a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2A_m = a_{m-1} + a_m. \end{cases}$$

On tire de ces équations les conséquences suivantes :

1°. *Si le nombre* m *des côtés des polygones est impair et* $= 2n + 1$, *les angles du polygone* F_1 *sont immédiatement déterminés par les angles du polygone donné* P; *car chacun des angles de* F_1 *est égal à la différence entre la somme des angles à indice impair et la somme des angles à indice pair du polygone* P, *en comptant chaque fois les angles de manière que des deux angles de* P *voisins de l'angle cherché,* *l'un soit le premier, l'autre le dernier; en sorte que l'on a, par exemple,*

$$(\mathrm{B})\quad a_m = (A_1 + A_3 + \ldots + A_{2n+1}) - (A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}).$$

2°. *Si au contraire le nombre des côtés est pair, si l'on a* $m = 2n$, *les angles du polygone* F_1 *ne sont pas déterminés comme dans le premier cas; mais ceux du polygone* P *sont assujétis à une certaine condition, de manière que celui-ci ne peut être un polygone quelconque. Cette condition consiste en ce que la somme des angles pairs doit être égale à celle des angles impairs; on aura donc*

$$(\mathrm{C})\quad A_1 + A_3 + \ldots + A_{2n-1} = A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}.$$

Dans le premier cas (1°) le polygone F_1 est toujours possible et absolument déterminé, sans que le polygone P soit assujéti à aucune condition; mais, vu la restriction *ci-dessus* (I), il cesse de représenter la limite de la figure F_1 dès qu'un de ses angles devient négatif, ce qui peut facilement arriver, comme on le voit par la forme de l'équation (B).

Mais dans le second cas (2°), si les angles de P remplissent la condition (C), le polygone F_1 n'est pas encore entièrement déterminé, car une infinité de polygones f_1 restent possibles, lesquels sont tous inscrits au polygone P sous la condition donnée et avec un périmètre minimum, c'est-à-dire qu'ils ont tous des périmètres égaux et plus petits que ceux de tout autre polygone inscrit au polygone P. Parmi tous ces polygones f_1 se trouvera aussi le polygone F_1, limite de la figure F, et ce ne peut être que celui d'entre eux dont l'aire est un maximum.

Les raisonnements suivants serviront à faire voir comment on trouvera le polygone F_1 dans les deux cas, ou les polygones f_1 dans le dernier cas, en même temps qu'ils montreront leurs propriétés d'un nouveau point de vue.

III. A. Soit donné un polygone P d'un nombre impair $2n + 1$ de côtés. D'un point quelconque a, pris sur le premier côté $A_1 A_2$, faisons partir un rayon de lumière sous un angle arbitraire α; supposons qu'il subisse sur le second côté ou une reflexion ou une réfraction telle que le rayon réfracté se propage suivant la même droite que le rayon réfléchi, mais en sens contraire ; la même chose se reproduira sur le troisième, sur le quatrième côté, etc., jusqu'à ce que le rayon soit enfin rejeté du dernier côté sur un point b du premier, avec lequel il formera l'angle β. Prenons maintenant ce point b pour point de départ, le rayon sera encore réfléchi ou réfracté dans le point b même, ensuite sur tous les autres côtés, et il reviendra pour la seconde fois sur le côté $A_1 A_2$, qu'il rencontrera dans le point c, et sous un angle γ. Alors les relations suivantes ont lieu :

1°. *On a toujours* $\gamma = \alpha$;

2°. *Si le point de départ* a *change arbitrairement de position sur le côté* A_1A_2, *tandis que l'angle* α *reste constant, la droite* ac *et le chemin parcouru ne changent pas de longueur; pour cela il faut qu'on prenne toutes les parties du chemin avec le signe* $+$, *si le rayon a été réfléchi sur tous les côtés; mais s'il a aussi été réfracté, on donnera des signes contraires aux parties du chemin parcourues avant et après la réfraction : les parties du chemin doivent donc changer de signe après chaque réfraction.*

3°. *Pour chaque angle donné* α, *il y a une position du point de départ* a, *telle que le point* b *coïncide avec lui; et, réciproquement pour chaque position du point* a, *on peut déterminer l'angle* α, *de manière que le point* b *tombe en* a.

4°. *Il existe toujours une seule grandeur de l'angle* α, *pour laquelle on a* $\mathrm{ac} = 0$, *c'est-à-dire pour laquelle le point de retour* c *coïncide avec le point de départ* a, *quelle que soit la position de celui-ci sur la droite* A_1A_2; *le chemin du rayon est alors un polygone* f_2 *de* $4n + 2$ *côtés inscrit au polygone* P, *de manière qu'il y fasse deux tours et qu'il y ait deux sommets d'angles sur chacun des côtés de celui-ci. Dans ce cas l'angle* β *est égal à* α; *le rayon retourne donc après le premier circuit sous le même angle, sur le premier côté sous lequel il en est parti; les côtés de chacun des polygones* f_2 *sont donc parallèles deux à deux. Le périmètre du polygone* f_2 *est constant, si l'on a égard au sens du rayon* (2°). *Les sommets des angles* a *et* b *sont toujours également éloignés d'un point fixe* m *sur le côté* A_1A_2, *de sorte qu'on a toujours* $\mathrm{am} = \mathrm{bm}$, *et la même chose a lieu sur tous les côtés du po-*

lygone P; *donc si l'on met* a *en* m, b *y tombe aussi; le rayon revient donc sur son chemin après n'avoir décrit qu'un seul tour qui est le polygone* F_1 *de* 2n + 1 *côtés; on peut donc considérer le double de celui-ci comme un des polygones désignés par* f_2 : *ce polygone spécial est justement le polygone* F_1 *dont nous avons parlé ci-dessus* (II); *le double de son aire est en même temps un maximum entre les aires des polygones* f_2.

B. Soit donné un polygone P d'un nombre pair $2n$ de côtés. Supposons que d'un point a, pris sur le premier côté A_1A_2, parte un rayon de lumière sous un angle arbitraire α, qu'il se meuve comme ci-dessus, et qu'après un premier tour il retombe sous un angle β sur un point b du même côté A_1A_2, etc. Alors ont lieu les lois suivantes :

1°. *On a toujours*

$$\alpha - \beta = (A_1 + A_3 + \ldots + A_{2n-1}) - (A_2 + A_4 + \ldots + A_{2n}) = u.$$

2°. *Si la différence* u *est commensurable avec* π, *le rayon de lumière retournera sur le premier côté après un certain nombre de tours sous le même angle qu'il en était parti au commencement; s'il y arrive donc dans le point* t *et sous l'angle* τ, *on aura* $\tau = \alpha$; *si* α *reste constant tandis que le point* a *change de position, le chemin du rayon et la droite* at *restent aussi constants, etc.*

3°. *Soit* u = o, *c'est-à-dire soit la somme des angles pairs du polygone* P *égale à la somme de ses angles impairs; alors on a* $\beta = \alpha$, *c'est-à-dire que le rayon revient déjà après un seul tour rencontrer le premier côté sous le même angle sous lequel il est parti. Si le point* a *change de position, sans que la grandeur de l'angle* α *varie, le chemin du rayon et la distance des deux points* a *et* b *restent constants. Quelle que soit la position du point* a, *il y a toujours un angle correspondant* α, *qui fait que* b *tombe sur* a; *le rayon décrit donc toujours un polygone* f_1 *du même nombre de côtés et du même périmètre, qui est inscrit au polygone donné* P : *parmi ces polygones* f_1 *qu'on peut obtenir ainsi, se trouve celui que nous avons désigné ci-dessus* (II) *par* F_1 *et qui est la limite de la figure* F; *c'est celui d'entre eux dont l'aire est un maximum et qui jouit en même temps de la propriété que*

LA SOMME DE SES CÔTÉS PAIRS EST ÉGALE A LA SOMME DES CÔTÉS IMPAIRS; *par-là le polygone* F_1 *est parfaitement déterminé.*

C. Remarquons d'abord que le premier théorème (A), qui se rapporte aux polygones à nombre de côtés impair, peut être considéré comme un cas spécial du second théorème (B, 3°); car puisqu'on est obligé de faire deux tours dans ces polygones (A), cela revient parfaitement au même que si le polygone P était du nombre double $4n + 2$ de côtés et qu'on ne fît qu'un seul tour; on satisferait toujours à la condition $u = 0$. La construction suivante est donc indistinctement applicable aux polygones f_1 et f_2; elle découle des propriétés suivantes :

1°. Les côtés homologues des polygones f_1 sont parallèles entre eux (à cause de l'angle constant α);

2°. Quand la position d'un quelconque des côtés est donnée, celle des autres côtés se trouve aussi déterminée : donc le polygone entier est connu dans ce cas;

3°. Le premier côté $a_1 a_2$ de l'un des polygones f_1, dont les deux extrémités a_1 et a_2 se trouvent sur les premiers deux côtés A_1A_2 et A_2A_3 du polygone P, peut passer par un point quelconque donné p_1 ; on trouvera ce côté de la manière suivante :

« Du point donné p_1 on abaissera une perpendiculaire p_1q_1 sur le » second côté A_2A_3 du polygone P, et on prendra sur son prolonge- » ment un point p_2 tel que l'on ait $p_2q_1 = p_1q_1$; du point p_2 on abais- » sera de même une perpendiculaire p_2q_2 sur le troisième côté A_3A_4, » et on prendra sur son prolongement le point p_3 tel que $p_3q_2 = p_2q_2$; » on répétera la même opération sur tous les côtés du polygone P, » jusqu'à ce que l'on parvienne au point p_{m+1} moyennant la perpen- » diculaire abaissée du point p_m sur le premier côté A_1A_2; ce point » (p_{m+1}) se trouve sur le côté demandé a_1a_2 ou sur son prolongement; » ce côté est donc parfaitement déterminé par la position connue des » deux points p_1 et p_{m+1}. »

On construira donc dans les deux cas, d'abord un quelconque des polygones f_1 ou f_2, et l'on en déduira facilement le polygone spécial F_1.

Il y a encore une autre construction qui s'applique seulement aux polygones f_2 d'un nombre de côtés impair, car dans ceux-ci on peut trouver immédiatement l'angle α au moyen des angles du polygone donné P (II, 1°).

64. Il ne sera pas inutile de considérer encore les cas spéciaux suivants .

I. Si le polygone donné P (**63**, III, B, 3°) est un quadrilatère ABCD, il faut qu'il soit inscriptible à un cercle (parce qu'on a $A + C = B + D$). On trouvera les quadrilatères inscrits f_1 de périmètre minimum au moyen d'un autre procédé plus simple que le précédent; on construira d'abord le quadrilatère spécial F_1, limite de la figure F, et qui a l'aire maximum de la manière suivante :

« Dans le quadrilatère ABCD tirez les diagonales AC et BD; de leur » point d'intersection E abaissez sur les côtés du quadrilatère les per- » pendiculaires Ea, Eb, Ec et Ed; les points a, b, c, d sont les sommets » des angles du quadrilatère cherché F_1. »

Le quadrilatère $abcd$ ou F_1 est *circonscriptible à un cercle qui a son centre en* E.

Pour obtenir les autres quadrilatères f_1 ou $a_1b_1c_1d_1$, on prend un point arbitraire a_1 et l'on fait les côtés a_1b_1, b_1c_1, etc., parallèles aux côtés homologues ab, bc, etc., du quadrilatère $abcd$.

II. Si le polygone donné P (n° **62**) est un triangle ABC, et si la figure inscrite F doit être comprise dans son espace intérieur, le périmètre L de la figure F aura les formes et les limites suivantes :

1°. *Pour une certaine longueur* a *de* L, *la figure est le cercle inscrit au triangle;*

2°. *Si l'on a* $L > a$, *ce périmètre est composé de trois parties des côtés du triangle et de trois arcs de cercle du même rayon, dont chacun a pour tangentes deux côtés du triangle;*

3°. *Si l'on a* $L < a$, *le périmètre est composé de trois arcs de cercle de rayons égaux, qui forment un triangle curviligne* $\alpha\beta\gamma$, *inscrit au triangle* ABC; *chacun des côtés de celui-ci est coupé sous des angles égaux par les deux côtés adjacents du triangle inscrit; les droites qui partagent les trois angles du triangle* $\alpha\beta\gamma$ *en deux parties égales, se rencontrent en un seul point* D. *Si le triangle donné* ABC *est à angles aigus, la limite inférieure de* $\alpha\beta\gamma$ *ou* F, *que nous avons désignée par*

F_1 (**63**), *est le triangle rectiligne* abc, *que l'on obtient en joignant les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle* ABC *sur les côtés opposés. Le triangle* abc *a donc le périmètre minimum entre tous les triangles inscrits au triangle donné* ABC; *les droites qui partagent ses angles en deux parties égales, sont en même temps ces perpendiculaires desquelles nous venons de parler et qui se coupent en* D; *ses angles extérieurs sont partagés en deux moitiés par les côtés du triangle* ABC.

Remarque. Ces théorèmes se rapportent également aux triangles plans et sphériques. Mais ce serait l'objet d'une recherche particulière de voir si les théorèmes concernant le quadrilatère ABCD (I) et les polygones P, f_1 et f_2 (**63**) peuvent aussi être transportés aux figures sphériques ou s'il faudra y apporter certaines modifications; car il est clair qu'un polygone F_1 à périmètre minimum et qui est la limite de la figure F, existe aussi sur la sphère, et que l'on obtiendra le polygone P par la construction donnée ci-dessus (**63**, I) si le polygone F_1 est donné.

65. Jusqu'ici nous avons supposé que tous les côtés du polygone P soient des droites données; mais on pourrait employer de même un polygone curviligne ou une courbe quelconque P_1. Le théorème paraît alors être plus général, mais pourtant il n'est qu'une conséquence du théorème précédent; c'est pourquoi les propriétés principales de la figure F restent les mêmes.

Pour que la figure F soit donc un maximum, les conditions suivantes doivent être remplies; il faut:

1) *Que toutes les parties du périmètre qui joignent des côtés courbes consécutifs de* P_1 *soient des arcs de cercle égaux;*

2) *Que les deux arcs qui rencontrent un même côté de* P_1, *le coupent dans le même point et sous des angles égaux, ou qu'ils lui soient tangents en deux points différents.*

Ce théorème ne s'applique pas seulement aux figures situées dans un plan ou sur une sphère, mais il a lieu quelle que soit la surface courbe sur laquelle elle se trouve [*].

---

[*] J'ai déjà fait connaître ce théorème dans une autre occasion. Voyez les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Berlin, avril 1839; et le journal *l'Institut*, année 1839.

Voici l'énoncé de ce théorème général :

« *Un nombre arbitraire de courbes ou un polygone curviligne* P_1 *étant*
» *donné sur une surface courbe* S *quelconque, on doit lui inscrire une*
» *figure* F *de périmètre donné, qui ait avec chacun des côtés de* P_1,
» *ou un point ou une partie commune, et dont l'aire soit un maxi-*
» *mum; elle aura les propriétés caractéristiques suivantes :*

» 1°. *Si l'on mène la surface développable, tangente à la surface* S,
» *suivant une de ces parties du périmètre de la figure* F, *qui joignent*
» *deux côtés consécutifs de* P_1, *et si on la développe ensuite, il faut*
» *que cette partie donne un arc de cercle;*

» 2°. *Tous les arcs de cercle que l'on obtient de cette manière seront*
» *de même rayon;*

» 3°. *Enfin, les deux lignes qui font partie du périmètre de* F, *et*
» *qui rencontrent un même côté de* P_1, *doivent, ou le couper dans le*
» *même point et sous des angles égaux, ou lui être tangents en deux*
» *points différents.* »

66. La figure F pourra toujours se transformer à sa limite en un polygone F_1, dont les côtés sont les lignes les *plus courtes* sur la surface S et qui donnent des *droites* par le développement; le périmètre de ce polygone F_1 est en même temps un maximum ou un minimum entre ceux de tous les polygones que l'on peut inscrire au polygone P_1 avec les lignes les plus courtes. Il paraît même qu'en général, si réciproquement le périmètre d'un polygone F_1, inscrit au polygone P_1 avec les lignes les plus courtes, est un maximum ou un minimum, ce polygone est la limite de la figure F. Mais le cas spécial suivant fait en quelque sorte une exception à cette règle.

Si l'on désigne par P_1 un système de m courbes ou un polygone curviligne de m côtés, situé dans un plan, F_1 sera un polygone rectiligne. Mettons dans les sommets de tous les angles de F_1 des tangentes à ces courbes; elles formeront un polygone P, qui sera avec le polygone F_1 dans la relation du n° **63**. Car le polygone F_1 est aussi la limite de la figure F inscrite à ce polygone P; donc son périmètre est un minimum entre ceux de tous les polygones inscrits à P; ses angles extérieurs sont divisés en deux parties égales par les côtés de P; et enfin si le nombre des côtés est pair, si l'on a $m = 2n$, la somme des angles à indices pairs du polygone P doit être égale à la somme de ses angles à indices impairs. Dans ce cas, la somme des côtés à indices pairs du polygone F_1 doit aussi être égale à la somme de ses côtés à indices impairs (**63**, III, B, 3°). Donc un polygone f_1 à périmètre minimum, inscrit au polygone courbe P_1 de $2n$ côtés, n'est pas nécessairement la limite de la figure F; pour cela il faut encore que la somme de ses côtés pairs soit égale à la somme des côtés impairs.

Cette exception n'a pas lieu si m est impair, si l'on a $m = 2n + 1$; pour ce cas nous avons le théorème spécial suivant :

Si les sommets des angles d'un triangle abc (ou F_1) *sont respectivement sur trois courbes données* A, B, C (*ou* P_1), *il faut, pour que son périmètre soit un maximum ou un minimum, que les normales à ces courbes, menées par les sommets des trois angles du triangle, divisent ces angles en deux parties égales; elles se rencontreront donc en un seul point; ou bien la normale dans chaque sommet doit rencontrer en un même point les tangentes dans les autres sommets.*

Ce théorème s'applique à la sphère d'une manière analogue.

67. On peut encore varier de plusieurs manières les données pour les figures comprises dans un plan. Par exemple, soit donnée une seule courbe P_1, au lieu des m courbes du cas précédent; on demande quelle est la figure F, ou quel est le polygone rectiligne f_1, inscriptible sous les mêmes conditions. On aura alors le théorème suivant, relatif au polygone f_1 :

Entre tous les polygones rectilignes de m *côtés, qui peuvent être inscrits à une courbe donnée* P_1, *celui seulement dont les angles sont divisés en deux parties égales par les normales de la courbe, peut avoir un périmètre maximum ou minimum.* — En particulier on pourra s'exercer sur le problème suivant : P_1 *étant une ellipse donnée, trouver le polygone* f_1, *dont le périmètre est un maximum?*

68. Le maximum ou le minimum d'aire d'un polygone rectiligne p inscrit au polygone curviligne P_1 est assujéti à la condition suivante :

Pour que l'aire d'un polygone rectiligne p *de* m *côtés, qui est inscrit à un polygone donné curviligne de* m *côtés* (*ou à une seule courbe*) P_1, *soit un maximum ou un minimum, il faut que la tangente, en chacun des sommets, soit parallèle à la diagonale qui joint les angles voisins.*

Il y a un théorème analogue pour les mêmes figures, tracées sur la sphère.

On sait que la courbe donnée P_1 étant une ellipse, il y a une infinité de polygones p qui satisfont à la condition, et qui ont donc tous une même aire maxima.

Remarque. On pourra s'exercer à chercher les conditions que les polygones *circonscrits* au polygone curviligne donné doivent remplir pour avoir une aire ou un périmètre maximum ou minimum.