

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

CHARLES DELAUNAY

**Note sur la théorie de l'engrenage de White**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 5 (1840), p. 38-41.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1840\\_1\\_5\\_38\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5_38_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

## NOTE

SUR LA THÉORIE DE L'ENGRENAGE DE WHITE;

PAR CHARLES DELAUNAY,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

Je me propose dans cette Note de démontrer les propriétés de l'engrenage de White par des considérations entièrement différentes de celles qu'a employées M. Olivier, dans le Mémoire qu'il a fait imprimer, il y a quelques mois, dans ce Journal.

Supposons d'abord qu'on veuille transmettre le mouvement de rotation d'un axe  $P$  à un axe parallèle  $P'$ , de manière que le rapport des vitesses angulaires reste constant: on sait qu'on peut arriver à ce résultat en fixant sur chaque axe une roue armée de dents cylindriques; et que les profils de ces dents sont tels, que le mouvement relatif des circonférences primitives de l'engrenage soit un mouvement de roulement, ce qui n'est que la traduction géométrique de la condition que le rapport des vitesses angulaires soit constant.

Dans les engrenages dont je viens de parler, le contact de deux dents se transporte successivement en différents points du profil de chacune d'elles, et dans chaque position, les deux dents glissent l'une sur l'autre d'une quantité proportionnelle à la distance du contact de ces dents au contact des circonférences primitives. Pour diminuer l'étendue du glissement, et par suite le travail résistant dû au frottement qui en résulte, il faut donc augmenter le nombre des dents pour que chacune d'elles soit moins long-temps en prise, et qu'ainsi le contact des dents s'éloigne moins du contact des circonférences primitives. Mais à mesure que le nombre des dents devient plus grand, l'épaisseur de chaque dent diminue, et comme cette épaisseur ne peut diminuer au-delà d'une certaine limite sans compromettre la solidité de la dent, il s'ensuit qu'il n'est pas possible, dans les engrenages à dents cylindriques, de dimi-

nuer autant qu'on veut l'étendue du glissement des dents l'une sur l'autre.

Si au lieu d'armer chacun des axes P, P' d'une seule roue, on les arme de deux roues juxtaposées ayant les mêmes circonférences primitives, le même nombre de dents et les mêmes profils pour les dents, et si, de plus, ces deux roues sont fixées l'une à l'autre de manière que leurs dents ne se correspondent pas, mais que le point où le profil d'une dent de la première roue rencontre sa circonférence primitive soit à égale distance des points correspondants appartenant à deux dents consécutives de la seconde roue, il est facile de voir que, pour que le mouvement de l'axe P se transmette convenablement à l'axe P', il ne sera plus nécessaire que chacune des deux roues dont il est armé conduise constamment la roue correspondante de l'axe P'. Si l'on veut, par exemple, qu'il n'y ait jamais qu'une dent en prise, on voit que ce sera alternativement une dent de la première roue et une dent de la seconde; les dents de chaque roue conduiront donc pendant moitié moins de temps que s'il n'y avait qu'une seule roue; la plus grande distance du contact des dents au contact des circonférences primitives sera donc ainsi beaucoup diminuée.

Mais pour qu'une dent conduise pendant moitié moins de temps, il n'est pas nécessaire de diminuer sa longueur; il suffit de former son profil de deux parties: la première, sur laquelle le contact devra avoir lieu, sera déterminée par les règles ordinaires pour la construction des engrenages à dents cylindriques, et la seconde sera une courbe qui pourra se raccorder avec la première, mais qui sera un peu en arrière du prolongement de cette première partie, prolongement qui devrait faire partie du profil de la dent si l'on voulait qu'elle fût en prise plus long-temps.

Il résulte de ce qui précède, qu'au moyen de deux roues juxtaposées et fixées l'une à l'autre, on peut diminuer l'étendue du glissement sans diminuer la solidité des dents, puisqu'on peut leur laisser la même épaisseur à la base et la même longueur.

Au lieu de deux roues on pourrait en mettre trois à côté l'une de l'autre, et en les disposant convenablement, chacune d'elles n'aurait à conduire que pendant le tiers du temps pendant lequel elle conduirait si elle était seule; l'étendue du glissement sera donc encore dimi-

nuée. En continuant de la même manière, on voit qu'on pourra diminuer autant qu'on voudra le travail résistant dû au frottement de glissement, sans nuire à la solidité des dents, en mettant sur chaque axe un nombre suffisant de roues.

Si maintenant on suppose que le nombre des roues devienne infini, et qu'en même temps leur épaisseur devienne infiniment petite, de manière que l'épaisseur totale conserve une valeur finie, on voit que le contact n'aura plus lieu sur chaque dent que pendant un instant infiniment petit, après lequel il se transportera sur la dent voisine, et ainsi de suite jusqu'à ce que quittant la dent de la dernière roue, il se transporte sur une autre dent de la première roue pour continuer de la même manière. La partie du profil de chaque dent sur laquelle se fait le contact, se réduit dans ce cas à l'élément de ce profil qui est adjacent à la circonférence primitive; le contact des dents coïncide donc toujours avec celui des circonférences primitives; il n'y a donc plus frottement de glissement. Mais alors il est évident que l'ensemble des dents des différentes roues sur lesquelles le contact se transporte successivement, forme un véritable filet de vis, et que la suite des positions du contact sur ce filet forme une hélice située sur le cylindre lieu géométrique des circonférences primitives. De plus, les deux hélices dont les divers éléments viennent ainsi successivement se superposer sont également inclinées sur les axes  $P, P'$ . L'engrenage auquel nous venons d'être conduits n'est donc autre chose que l'engrenage de White, et l'on voit que dans cet engrenage il n'y a pas de frottement de glissement, pourvu que les courbes qui servent de bases aux filets hélicoïdaux saillants satisfassent à la condition de ne se toucher pendant le mouvement des deux axes qu'aux points où elles rencontrent les cylindres primitifs. Ces courbes seront faciles à trouver, d'après ce que j'ai dit sur la construction des profils des dents dans le cas où l'on aurait deux roues juxtaposées sur chaque axe.

Si, les axes  $P$  et  $P'$  restant parallèles, leur distance variait un peu, les propriétés démontrées précédemment n'auraient plus lieu généralement; mais on conçoit qu'on puisse déterminer les courbes qui servent de bases aux filets, de manière que ces propriétés aient encore lieu quelle que soit la variation de la distance des axes. Sans entrer dans plus de détails, je me contenterai de dire qu'on pourrait y arriver en partant

de l'engrenage cylindrique à développements qui, comme on sait, permet de faire varier la distance des axes sans que pour cela l'engrenage cesse de fonctionner convenablement.

Les filets saillants dont les roues sont armées dans l'engrenage de White peuvent être considérés comme engendrés par le profil qui leur sert de base auquel on donnerait un mouvement de rotation autour de l'axe du cylindre, et en même temps un mouvement de translation parallèlement à l'axe, ces deux mouvements étant déterminés de manière que le point du profil qui est sur le cylindre, y décrive une hélice. Les deux hélices qui servent de directrices à deux filets correspondants sur les deux roues sont, d'ailleurs, les transformées d'une même droite tracée dans le plan tangent commun aux deux cylindres, obtenues par l'enroulement de ce plan sur chacun des deux cylindres. Pour peu qu'on réfléchisse à la manière dont nous avons été conduits des engrenages cylindriques ordinaires à l'engrenage de White, on verra qu'on peut remplacer la droite tracée dans le plan tangent commun aux deux cylindres par une courbe quelconque tracée aussi dans ce plan; en enroulant ce plan successivement sur les deux cylindres, il en résultera deux transformées qui pourront servir de directrices dans la génération des filets de l'engrenage, tout aussi bien que les deux hélices que nous avons considérées d'abord, et l'engrenage résultant jouira encore des mêmes propriétés.

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit pour le cas où les deux axes  $P$  et  $P'$  sont parallèles, peut se dire de même dans le cas où ces axes se rencontrent.