JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les conditions de convergence d'une classe générale de séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 356-359.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__356_0>

SUR LES CONDITIONS DE CONVERGENCE

D'UNE CLASSE GÉNÉRALE DE SÉRIES;

PAR J. LIOUVILLE [*].

On connaît assez les difficultés que présente dans un grand nombre de cas la théorie des suites infinies, à laquelle cependant on est forcé chaque jour de recourir pour résoudre les problèmes de mécanique céleste et de physique mathématique. Aussi, depuis plus de deux siècles, les géomètres en ont fait un des objets principaux de leurs méditations. Notre savant confrère, M. Cauchy, s'en est surtout occupé avec succès : il y est revenu plusieurs fois, en employant des méthodes diverses, et si les théorèmes qu'il a donnés ne suffisent pas encore pour épuiser la question, c'est qu'elle est vraiment de sa nature inépuisable.

Un des plus beaux résultats que l'on ait obtenus en ce genre de recherches consiste dans une relation singulière entre les conditions de convergence de quelques séries et la résolution numérique de certaines équations transcendantes. Déjà Laplace avait fait voir que les séries à l'aide desquelles, dans la théorie du mouvement elliptique des planètes, on développe le rayon vecteur et l'anomalie vraie suivant les puissances croissantes de l'excentricité, sont convergentes tant que l'excentricité ne dépasse pas une certaine limite; il avait montré qu'en supposant, pour plus de simplicité, l'anomalie moyenne égale à un angle droit, cette limite dépend de la résolution d'une équation transcendante dans laquelle entre la base des logarithmes népériens. Depuis, M. Cauchy a retrouvé et beaucoup étendu cette importante proposition : l'analyse élégante et rigoureuse dont il s'est servi lui a fourni des règles

[*] Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XI, page 615.

commodes pour la convergence des séries qui proviennent de l'application de la formule de Lagrange et des autres formules analogues employées par les géomètres pour développer les racines des équations.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je me propose d'abord de discuter une série assez remarquable dont la convergence ou la divergence dépend aussi du rapport de grandeur existant entre le module du paramètre suivant les puissances duquel elle est ordonnée et une certaine racine d'une équation transcendante déterminée. L'équation dont je parle a une infinité de racines positives; c'est tantôt la première, tantôt la seconde, tantôt la $m^{ième}$ de ces racines qu'il faut considérer. La convergence a lieu tant que le module du paramètre est inférieur à cette première, seconde, ou $m^{ième}$ racine : au-delà la série devient divergente. Je traite ensuite par les mêmes principes d'autres séries plus compliquées. On verra peut-être avec intérêt reparaître dans ces problèmes d'analyse pure, auxquels elles semblent d'abord étrangères, ces intégrales d'équations différentielles du second ordre, dont nous sommes tant occupés M. Sturm et moi, et qui jouent un rôle si important dans la théorie de la chaleur et dans celle des corps élastiques.

Soit x une variable réelle comprise entre deux limites x, X : désignons par φ et g deux fonctions de x, qui ne deviennent jamais infinies, et dont la première est quelconque, tandis que la seconde est essentiellement positive. Faisons

$$\varphi_1 = \int_{\mathrm{x}}^{x} dx \int_{\mathrm{X}}^{x} g\varphi dx \ldots, \quad \varphi_{n+1} = \int_{\mathrm{x}}^{x} dx \int_{\mathrm{X}}^{x} g\varphi_n dx \ldots,$$

et soit proposée la série

$$\varphi + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots + \alpha^n\varphi_n + \ldots$$

Voici la règle à l'aide de laquelle on détermine les cas de convergence ou de divergence de cette série.

Considérons la fonction V qui satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2V}{dx^2} + grV = 0,$$

et aux conditions définies

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 1, \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x}:$$

V sera une fonction $V(x, r)$ de x et de r. Maintenant déterminons r en posant

$$\frac{dV(X, r)}{dX} = \varpi(r) = 0;$$

l'équation $\varpi(r) = 0$ aura une infinité de racines $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ que nous supposons ici rangées par ordre de grandeur, et qui sont toutes réelles et positives.

Cela posé, formons le produit

$$V \int_{\mathrm{x}}^{X} gV\varphi dx,$$

où x conserve hors du signe $\int$ la valeur déterminée entrant actuellement dans $\varphi + \alpha\varphi_1 +$ etc.; puis faisons successivement $r = r_1$, $r = r_2 \ldots$ dans ce produit, et désignons par r_m la première racine pour laquelle il ne s'évanouit pas. La série $\varphi + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots$ est convergente quand le module du paramètre α est inférieur à r_m, et divergente dans le cas contraire.

Quant à la somme de la série $\varphi + \alpha\varphi_1 +$ etc., elle est évidemment égale à $\varphi + \alpha s$, s désignant une fonction de x et de α qui satisfait à la fois à l'équation indéfinie

$$\frac{d^2 s}{dx^2} - \alpha g s = g\varphi$$

et aux conditions définies

$$s = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x}, \qquad \frac{ds}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = X.$$

Une fonction $\psi(\alpha)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de α, tant que le module de α reste inférieur au plus petit des modules de z pour lesquels une des deux fonctions $\psi(z)$, $\frac{d\psi(z)}{dz}$, cesse d'être finie et continue. Comme les formules dont s dépend ne sont pas trop compliquées, on peut appliquer à la série $\varphi + \alpha\varphi_1 +$ etc., ce théorème de M. Cauchy, et l'on retombe (je m'en suis assuré) sur la règle indiquée plus haut. Mais la méthode que j'expose de préférence dans mon Mémoire est différente : elle a l'avantage de fournir une expression très simple et très approchée de φ_n, lorsque l'indice n est très grand. D'ailleurs elle s'étend d'elle-même à une foule de séries dont la somme ne peut être trouvée par aucun moyen connu. Elle ramène par exemple l'étude de la série

$$A\varphi^i + A_1\varphi_1^i + A_2\varphi_2^i + \ldots + A_n\varphi_n^i + \ldots$$

à celle de la série plus simple

$$A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots$$

On peut obtenir beaucoup d'autres théorèmes du même genre, soit en conservant entre φ_n et φ_{n+1} une relation de la forme

$$\varphi_{n+1} = \int dx \int g\varphi_n dx,$$

mais déterminant autrement les deux constantes relatives aux deux intégrations indiquées, soit en établissant entre φ_n et φ_{n+1} une relation plus compliquée et contenant le signe $\int$ un plus grand nombre de fois.