JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules pour le changement de la variable indépendante

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 311-312.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__311_0>

SUR QUELQUES FORMULES

POUR LE CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans mon Mémoire sur le changement de la variable indépendante [*], j'ai donné des formules générales à l'aide desquelles, p désignant un entier positif, on peut transformer la différentielle à indice μ d'une fonction quelconque prise par rapport à la variable indépendante $\sqrt{x}$, en d'autres différentielles relatives à la variable indépendante x. Ainsi que je l'ai fait observer, ces formules peuvent être utiles, même dans le calcul différentiel ordinaire où les indices de différentiation sont des nombres entiers. En voici un exemple simple :

En différentiant plusieurs fois de suite, par rapport à z, les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-u^2} \cos 2zu\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z^2},$$

on trouve

$$2^{2n+1} \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} . u^{2n} \cos 2zu\, du = (-1)^n . \sqrt{\pi} . \frac{d^{2n} . e^{-z^2}}{dz^{2n}},$$

$$2^{2n+2} . \int_0^\infty e^{-u^2} . u^{2n+1} \sin 2zu\, du = (-1)^{n+1} . \sqrt{\pi} . \frac{d^{2n+1} . e^{-z^2}}{dz^{2n+1}}.$$

Mais il reste à effectuer d'une manière générale, c'est-à-dire quel que soit l'entier n, les différentiations indiquées dans les seconds membres; c'est ce que nos formules permettent de faire.

Posons $z = \sqrt{x}$, $z^2 = x$, et rappelons-nous que

$$\frac{d^\mu y}{dz^\mu} = 2^\mu \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}}\left(x^{\frac{\mu}{2}} d^{\frac{\mu+1}{2}} y\right)}{dx^\mu},$$

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXIV^{me} cahier.

formule qui se déduit de la formule (A_1) du n° VI du Mémoire cité en remplaçant l'intégrale à indice $\frac{1-\mu}{2}$ qui se trouve dans cette dernière par une différentielle à indice $\frac{\mu-1}{2}$. Maintenant soit $\mu = 2n+1$, $y = e^{-z^2} = e^{-x}$; il nous viendra

$$\frac{d^{2n+1}.e^{-z^2}}{dz^{2n+1}} = 2^{2n+1}.\frac{d^n\left(x^{\frac{\mu}{2}}.d^{n+1}e^{-x}\right)}{dx^{2n+1}};$$

d'où

$$\frac{d^{2n+1}.e^{-z^2}}{dz^{2n+1}} = (-1)^{n+1}.2^{2n+1}.\frac{d^n\left(x^{\frac{\mu}{2}}e^{-x}\right)}{dx^n}.$$

Il ne reste donc plus à effectuer que la différentielle $n^{\text{ième}}$ du produit $x^{\frac{\mu}{2}}e^{-x}$; or on a en général

$$\frac{d^n.PQ}{dx^n} = P\frac{d^nQ}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{dP}{dx}.\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{d^2P}{dx^2}.\frac{d^{n-2}Q}{dx^{n-2}} + \ldots,$$

formule qui se termine toujours lorsque n est un entier positif, et qui s'applique immédiatement au cas actuel en prenant $P = x^{\frac{\mu}{2}}$, $Q = e^{-x}$.

On trouvera avec une égale facilité la valeur de $\frac{d^{2n}.e^{-z^2}}{dz^{2n}}$; mais alors il faudra partir de la formule

$$\frac{d^\mu y}{dz^\mu} = 2^\mu.\sqrt{x}.\frac{d^{\frac{\mu}{2}}\left(x^{\frac{\mu-1}{2}}.d^{\frac{\mu}{2}}y\right)}{dx^\mu},$$

et faire $\mu = 2n$, ce qui n'introduira dans le second membre aucune différentielle à indice fractionnaire [*].

---

[*] Au surplus une simple différentiation suffirait pour passer de la valeur de d^{2n} à celle de d^{2n+1} ou de la valeur de d^{2n-1} à celle de d^{2n}. Ajoutons qu'il serait aisé d'arriver par d'autres moyens aux conséquences que fournit notre analyse : par exemple on pourrait observer que la recherche des différentielles successives de e^{-z^2} dépend du développement de $e^{-(z+h)^2} = e^{-z^2}.e^{-2zh}.e^{-h^2}$ suivant les puissances de h; mais la méthode précédente méritait aussi d'être indiquée.