

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Note sur un théorème de Fermat

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 5 (1840), p. 184-185.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5_184_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

SUR UN THÉORÈME DE FERMAT;

PAR M. LEBESGUE.

Théorème. « Si l'on admet que l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ soit impossible en nombres entiers, il en résultera que l'équation » $x^{2^n} + y^{2^n} = z^2$ l'est également. »

Démonstration. Dans l'équation $x^{2^n} + y^{2^n} = z^2$ on peut toujours supposer les inconnues x, y, z premières deux à deux, de sorte qu'il y aura nécessairement deux inconnues impaires et l'une paire, puisqu'elles ne sauraient être toutes trois impaires. Il faut encore que z soit impair, puisqu'un carré pair ne saurait avoir la forme $4k + 2$. On peut, d'après cela, considérer l'équation $(2^a x)^{2^n} + y^{2^n} = z^2$, où x, y, z seront supposés impairs. Cela posé, en faisant $x = pq$, sous l'hypothèse de p et q impairs et premiers entre eux, il en résultera

$$z \pm y^n = 2p^{2n}, \quad z \mp y^n = 2^{2na-1} \cdot q^{2n},$$

et par conséquent,

$$z = p^{2n} + 2^{2na-2} \cdot q^{2n}, \quad \pm y^n = p^{2n} - 2^{2na-2} \cdot q^{2n}.$$

1°. Pour $n = 1$, on a la solution connue

$$z = p^2 + (2^{a-1} q)^2, \quad \pm y = p^2 - (2^{a-1} q)^2, \quad x = 2^a pq;$$

2°. Pour $n = 2$, l'équation $\pm y^n = p^{2n} - 2^{2na-2} \cdot q^{2n}$ ne peut subsister avec le signe inférieur, on prendra donc $y^2 = p^4 - 2^{4a-2} q^4$; donc si l'on pose $q = rs$, il en résultera $p^2 \pm y = 2r^4$, $p^2 \mp y = 2^{4a-3} \cdot s^4$, et par suite l'équation $p^2 = r^4 + (2^{a-1} s)^4$, où les inconnues sont impaires et premières entre elles. Ainsi l'équation $(2^a x)^4 + y^4 = z^2$ entraîne l'équation $(2^{a-1} s)^4 + r^4 = p^2$, celle-ci entraîne semblablement $(2^{a-2} t)^4 + u^4 = v^2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve $P^4 + Q^4 = R^2$,

où P, Q, R sont des nombres impairs, ce qui est impossible. Il est donc prouvé que $x^4 + y^4 = z^2$ est impossible, ainsi qu'on l'a déjà démontré par la méthode de Fermat. L'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ sera par conséquent impossible pour toutes les valeurs paires de n .

3°. Pour le cas de n impair, l'équation $\pm y^n = p^{2n} - 2^{2an-2} \cdot q^{2n}$ pourra s'écrire $y^n = p^{2n} - 2^{2an-2} \cdot q^{2n}$, en supposant y positif ou négatif. Soit donc $y = rs$, en supposant r et s impairs premiers entre eux, et l'un d'eux négatif s'il est nécessaire; il faudra poser $r^n = p^n + 2^{an-1} \cdot q^n$, $s^n = p^n - 2^{an-1} \cdot q^n$; d'où $r^n - s^n = (2^a q)^n$. Quel que soit le signe de s , cette dernière équation a toujours la forme $X^n + Y^n = Z^n$; donc l'impossibilité de cette équation entraîne celle de l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$.

Il résulte donc des théorèmes démontrés par Fermat et Euler, par MM. Legendre et Dirichlet, et en dernier lieu par M. Lamé, que l'impossibilité de l'équation $x^{4n} + y^{4n} = z^2$, et celle de l'équation $x^n + y^n = z^n$ pour $n = 3, 5, 7$, entraînent celle de l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ pour

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 - 12 - 14, 15, 16 - 18 - 20, 21, 22 \\ - 24, 25, 26, 27, 28 - 30, \text{ etc.}$$

Les recherches que j'ai faites sur l'équation $x^n + y^n = z^n$ m'ont conduit à démontrer l'impossibilité de quelques équations indéterminées dont je m'occuperai dans un autre article.